МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}=\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+$
$+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta+\sin 2\alpha=$
$=2\cos 2\beta\underbrace{(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta)}_{=-\frac{1}{\sqrt{17}}}=-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$\Rightarrow \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}\Rightarrow \sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1 случай) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1$

$2\cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha)=0\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\text{ не опред.}-\text{ не подходит по условию}\\ 4\sin\alpha+\cos\alpha=0\Rightarrow\end{array}\right.$

$\Rightarrow 4\sin\alpha=-\cos\alpha\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{4}$

2 случай) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha-(1-2\sin^2\alpha)=-1$

$2\sin\alpha(4\cos\alpha+\sin\alpha)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0\\ 4\cos\alpha+\sin\alpha=0\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-4\end{array}\right.$

Ответ: $0,\ -\frac{1}{4},\ -4.$

№2

$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1)\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2)\end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases}3y-2x\geq 0\\ 3xy-2x-3y+2\geq 0\end{cases}$

$3y(x-1)-2(x-1)\geq 0$

$(3y-2)(x-1)\geq 0$

$\begin{cases}y\geq\frac{2}{3}x\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 1\\ y\geq\frac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 1\\ y\leq\frac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$ ← ОДЗ

$(1)^2: \quad 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$(2): \quad 3(x-1)^2-3+3(y-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{3}=4$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

Пусть $x-1=a$, $y-\frac{2}{3}=b$ $\quad (x=a+1,\ y=b+\frac{2}{3})$ подставим туда

$4a^2+8a+4-15ab-15b-10a-10+9b^2+12b+4+2a+2+$

$+3b+2-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^2-15ab+9b^2=0$

$a^2+b^2=\frac{25}{9} \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{25}{9}-a^2}$

1случ.) $b\geq 0$. $\quad 4a^2-15a\sqrt{\frac{25}{9}-a^2}+25-9a^2=0$

$-5a^2+25=15a\sqrt{\frac{25}{9}-a^2}$

$-a^2+5=3a\sqrt{\frac{25}{9}-a^2} \Rightarrow a^4-10a^2+25=9a^2(\frac{25}{9}-a^2)$

$\Rightarrow a^4-10a^2+25=25a^2-9a^4 \Rightarrow 10a^4-35a^2+25=0$

$2a^4-7a^2+5=0 \quad D=49-40=3^2, \ a^2_{1,2}=\frac{7\pm3}{4}=\left[\begin{array}{l}\frac{5}{2}\\ 1\end{array}\right.$

1.1) $a^2=\frac{5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=\sqrt{\frac{5}{2}}\\ a=-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}b=\sqrt{\frac{25}{9}-\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}},\ x=\sqrt{\frac{5}{2}}+1\\ b=\sqrt{\frac{25}{9}-\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}},\ x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{array}\right.$

1.1.1) $x=1+\sqrt{\frac{5}{2}}>1$, $y=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}+\frac{2}{3}>\frac{2}{3}$ – подходит

$\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \vee y=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}>\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2}{3}x>y$

$\Rightarrow 3y-2x<0$ – не подходит под ОДЗ

1.1.2) $x=1-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$, $x<1$, но $y>\frac{2}{3}$ – не подходит под ОДЗ

1.2) $a^2=1 \Rightarrow a=\pm1$

1.2.1) $a=1 \Rightarrow x=2$, $b=\sqrt{\frac{25}{9}-1}=\frac{4}{3}$, $y=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

$(2,2)$ удовл. ОДЗ

1.2.2) $a=-1 \Rightarrow x=0$, $b=\sqrt{\frac{25}{9}-1}=\frac{4}{3}$, $y=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

$x<1$ но $y>\frac{2}{3}$ – не подходит под ОДЗ

2случ.) $b<0$, $b=-\sqrt{\frac{25}{9}-a^2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4a^2+15a\sqrt{\frac{25}{9}-a^2}+25-9a^2=0$

$\cancel{25-5a^2=-15}$

$15a\sqrt{\frac{25}{9}-a^2}=5a^2-25$

$3a\sqrt{\frac{25}{9}-a^2}=a^2-5 \Rightarrow 9a^2\left(\frac{25}{9}-a^2\right)=a^4-10a^2+25$

$25a^2-9a^4=a^4-10a^2+25, \quad 10a^4-35a^2+25=0$

$2a^4-7a^2+5=0 \quad D=49-40=3^2, \; a_{1,2}^2=\frac{7\pm3}{4}=\left[\begin{array}{l}\frac{5}{2}\\ 1\end{array}\right.$

2.1) $a^2=\frac{5}{2}$

2.1.1) $a=\frac{\sqrt5}{\sqrt2}, x=1+\frac{\sqrt5}{\sqrt2}, b=-\sqrt{\frac{25}{9}-\frac{5}{2}}=-\frac{\sqrt5}{3\sqrt2},$

$y=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt5}{3\sqrt2}$. $x>1$ но $y<\frac{2}{3}$ – не подходит под ОДЗ

2.1.2) $a=-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}, x=1-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}, b=-\frac{\sqrt5}{3\sqrt2}, y=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt5}{3\sqrt2}$

$\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt5}{3\sqrt2} \vee \frac{2}{3}-\frac{\sqrt5}{3\sqrt2}=y \Leftrightarrow \frac{2}{3}x<y$ – подходит по ОДЗ

2.2) $a^2=1$

2.2.1) $a=1, \; x=2, \; b=-\sqrt{\frac{25}{9}-1}=-\frac{4}{3}, \; y=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$

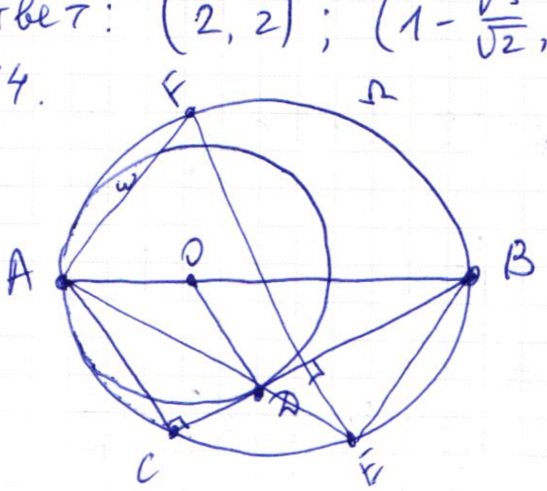
$x>1$ но $y<\frac{2}{3}$ – не подходит под ОДЗ

2.2.2) $a=-1, \; x=0, \; b=-\frac{4}{3}, \; y=-\frac{2}{3}$

$3y-2x=-2<0$ – не подходит под ОДЗ

Ответ: $(2,2)$; $\left(1-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}, \frac{2}{3}-\frac{\sqrt5}{3\sqrt2}\right)$

№4.



1) O – центр ω, $AO=r$, $AB=2R$
(r, R – радиусы ω и Ω)

$\angle ACB=90°$ – впис. в Ω, опир. на диаметр.

$OD\perp CB$ – радиус и касат. ω

$\Rightarrow$ ~~AC~~ $\triangle ABC\sim\triangle OBD$

(по двум углам) $\Rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{BC}{BD} = \frac{CD+DB}{BD} = \frac{CD}{BD} + 1 =$

$= \frac{\frac{5}{2}}{\frac{13}{2}} + 1 = \frac{5}{13} + 1 = \frac{18}{13} = \frac{2R}{2R-r}$

$36R - 18r = 26R \Rightarrow 10R = 18r \Rightarrow r = \frac{5}{9}R$

$OD = r$. Из $\triangle OBD$ по т. Пифагора: $OB^2 = OD^2 + DB^2$

$(2R-r)^2 = r^2 + \frac{169}{4}$

$4R^2 - 4rR = \frac{169}{4}$

$4R^2 - 4\cdot\frac{5}{9}R^2 = \frac{169}{4} = 4\cdot\left(1-\frac{5}{9}\right)R^2 = 4\cdot\frac{4}{9}R^2 = \frac{169}{4} \Rightarrow$

$R = \sqrt{\frac{169\cdot 9}{4\cdot 4\cdot 4}} = \frac{13\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{39}{8}$

$r = \frac{5}{9}R = \frac{5\cdot 39}{8\cdot 9} = \frac{5\cdot 13}{8\cdot 3} = \frac{65}{24}$

2) $\angle AFE = \angle ABE$ – вписан., опир. на $\breve{AE}$

$\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + CAE$ (опир. на $\breve{CE}$)

$AB = 2R = \frac{39}{4}$, $CB = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = 9$, $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{\frac{39^2}{16} - \frac{36^2}{16}} =$

$= \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$

$\sin\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{39}{4}} = \frac{15}{39} = \frac{5}{13}$, $\cos\angle ABC = \frac{BC}{AB} = \frac{9}{\frac{39}{4}} = \frac{36}{39} =$

$= \frac{12}{13}$

~~$\sin\angle CAE =$~~ $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

$\sin\angle CAE = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 5\cdot\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\angle CAE = \frac{AC}{AD} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} =$

$= \frac{3}{\sqrt{13}}$. ~~$\sin\angle ABE =$~~ $\sin\angle AFE = \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{12}{13} =$

$= \frac{15+24}{13\sqrt{13}} = \frac{39}{13\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

3) $AC \parallel FE \Rightarrow \angle CAD = \angle AEF$

$\sin\angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \angle AFE = \angle ADC$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle CDA$ (по 2-м углам).

$\angle AEB = 90°$ – опир. на диаметр, $\sin\angle ABE = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = \frac{3AB}{\sqrt{13}} = \frac{3\cdot\frac{39}{4}}{\sqrt{13}} = \frac{3\cdot 3\cdot 13}{4\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

~~$\frac{S_{AFE}}{S_{CDA}} = k^2 = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2$ (подобные) $= \left(\frac{9\sqrt{13}\cdot 4}{4\cdot 15}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{13}}{5}\right)^2 = \frac{117}{25}$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~8~~ $\angle FAE = \angle ACD = 90^\circ \Rightarrow S_{AEF} = \dfrac{AE \cdot AF}{2}$

$\dfrac{AF}{CD} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AF = \dfrac{CD \cdot AE}{AC} = \dfrac{\frac{5}{2} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{4}}{\frac{15}{4}} = \dfrac{5 \cdot 9 \cdot \sqrt{13}}{2 \cdot 15} = \dfrac{3\sqrt{13}}{2}$

$S_{AEF} = \dfrac{9\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13}}{4 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{27 \cdot 13}{16} = \dfrac{351}{16}$

Ответ: радиусы $\frac{65}{24}$ и $\frac{39}{8}$; угол $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$, площадь $\frac{351}{16}$.

№5

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$, $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$, $f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$,

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$, $f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$, $f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$,

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$, $f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$, $f(23) = 5$. ~~44~~ (от простых)

$\forall a \in \mathbb{Q}_+ : f(a \cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$x, y \in \mathbb{N}$. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + (f(1) - f(y)) =$
$= f(x) - f(y)$

таблицу значений $f(x)$ для $x \in \mathbb{N}$, $3 \le x \le 27$:

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1
Вычисление	$\mathbb{P}$	$2\cdot2$	$\mathbb{P}$	$2\cdot3$	$\mathbb{P}$	$2\cdot4$	$3\cdot3$	$2\cdot5$	$\mathbb{P}$	$2\cdot6$	$\mathbb{P}$	$2\cdot7$	$3\cdot5$

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0
$4\cdot4$	$\mathbb{P}$	$2\cdot9$	$\mathbb{P}$	$4\cdot5$	$3\cdot7$	$2\cdot11$	$\mathbb{P}$	$4\cdot6$	$5\cdot5$	$2\cdot13$	$3\cdot9$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Назовем $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ - мн-ва чисел натур. от 3 до 27, $f(x)$ от которых равна $0, \dots, 5$.

Если x и y в одном мн-ве $\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) = 0 \nless 0$

Если x и y в разных мн-вах $\Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ровно одна пара (x, y) или (y, x) подходит под условие (разность значений $f < 0$)

$\Rightarrow$ нам надо посчитать, сколько пар из разных мн-в.

$|A_0| = 10,\ |A_1| = 7,\ |A_2| = 3,\ |A_3| = 2,\ |A_4| = 2,\ |A_5| = 1$

$$\underbrace{(10\cdot 7 + 10\cdot 3 + 10\cdot 2 + 10\cdot 2 + 10\cdot 1)}_{\text{из } A_0 \text{ и другого}} + \underbrace{(7\cdot 3 + 7\cdot 2 + 7\cdot 2 + 7\cdot 1)}_{\text{из } A_1 \text{ и другого (не из } A_0)}$$

$+ (3\cdot 2 + 3\cdot 2 + 3\cdot 1) + (2\cdot 2 + 2\cdot 1) + 2\cdot 1$ (каждый с каждым)

$= \cancel{70} = \cancel{10(}$

$= 10\cdot 15 + 7\cdot 8 + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 2 = 150 + 56 + 15 + 8 =$

$= 229$

Ответ: 229.

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

ОДЗ: $x^2 + 6x > 0 \Leftrightarrow x(x+6) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -6 \end{array}\right.$

$\Rightarrow |x^2+6x| = x^2+6x$

Пусть $t = x^2 + 6x > 0$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$. Пусть $t = 4^k$ $(k = \log_4 t)$

$3^k + 4^k \geq \cancel{t^{k\log_4 5}} = 4^{k\log_4 5} = 5^k$

При $k<0$: $\frac{1}{3^{|k|}} + \frac{1}{4^{|k|}} = \frac{3^{|k|} + 4^{|k|}}{3^{|k|}\cdot 4^{|k|}} \vee \frac{1}{5^{|k|}} \Leftrightarrow \underbrace{5^{|k|}}_{>4^{|k|}}(\underbrace{3^{|k|} + 4^{|k|}}_{>3^{|k|}}) >$

$> 3^{|k|}\cdot 4^{|k|} \Rightarrow \forall k<0\ \ 3^k + 4^k > 5^k$

~~для~~ $g(x) = 3^x + 4^x - 5^x = 3^x + 4^x - (3^2+4^2)^{\frac{x}{2}} = 9^{\frac{x}{2}} + 16^{\frac{x}{2}} - (9+16)^{\frac{x}{2}} =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Посмотрим на ф-ию $h(x)=x^a$ при $x>0$.

При $a=0$ $h(x)=1$, $g(0)=1+1-1>0$.

При $0<a<1$: $h''(x)=a(a-1)x^{a-2}<0 \Rightarrow$ ф-ия $h(x)$ вогнута $\Rightarrow$ по н-ву Йенсена $h\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le\frac{h(\alpha)+h(\beta)}{2}$

$\alpha=9$, $\beta=16$. $h\left(\frac{9+16}{2}\right)=\frac{(9+16)^a}{2^a}$, $2^a<2$, $\frac{h(9)+h(16)}{2}=\frac{9^a+16^a}{2}$

$\Rightarrow 9^a+16^a\ge(9+16)^a$

$\Rightarrow$ при $0<\frac{x}{2}<1$ $(0<x<2)$ $g(x)>0$

При $x=2$ $g(x)=3^2+4^2-5^2=0$

При $x>2$: $h''(x)=a(a-1)x^{a-2}>0 \Rightarrow$ выпукл. $\Rightarrow$

аналогично $9^a+16^a\le(9+16)^a$

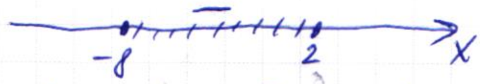
$\Rightarrow g(x)<0 \Rightarrow$ нер-во выполнено при $k\le2$ ~~$x\le2$~~.

(н-во $3^k+4^k\ge5^k$).

$x^2+6x=t=4^k\le4^2=16=\cancel{x^2+6x}$.

$x^2+6x-16=0$ $\frac{D}{4}=9+16=5^2$ $x_1=-3+5=2$ $x_2=-8$

оба уд



$\begin{cases} x\in[-8,2] \\ ОДЗ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\le x\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-8,-6)\cup(0,2]$

Ответ: $[-8,-6)\cup(0,2]$.

$\left(\frac{9}{25}\right)^x + \left(\frac{16}{25}\right)^x$

$\left(\frac{9+25}{2}\right)^x \vee \left(\frac{9}{2}\right)^x + \left(\frac{25}{2}\right)^x = \frac{9^x+25^x}{2^x}$

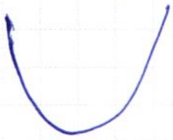
$b = 4-a$

$12a+16-4a-9=$

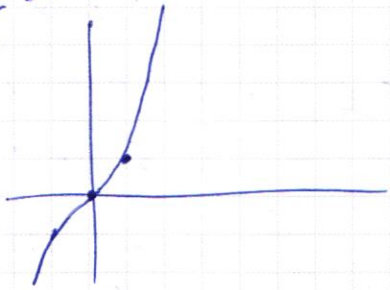
$=8a+7=0$

$a=-\frac{7}{8}$

$b=-3a$

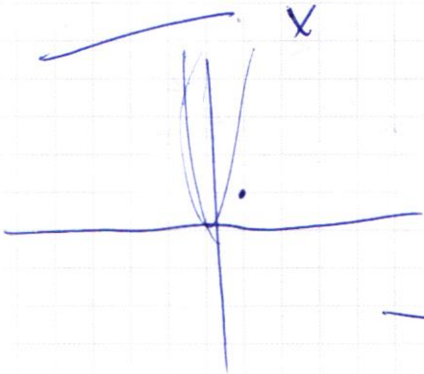


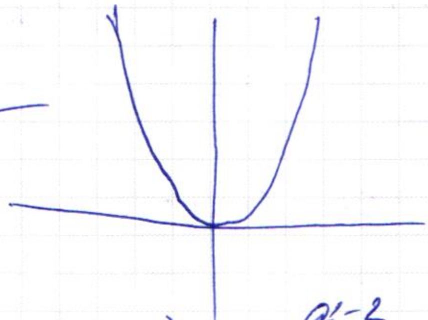
x^2

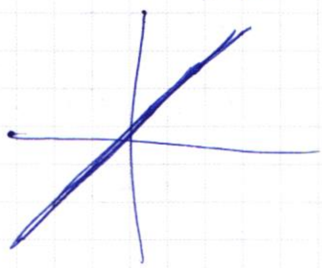


x^3

$12a-12b$







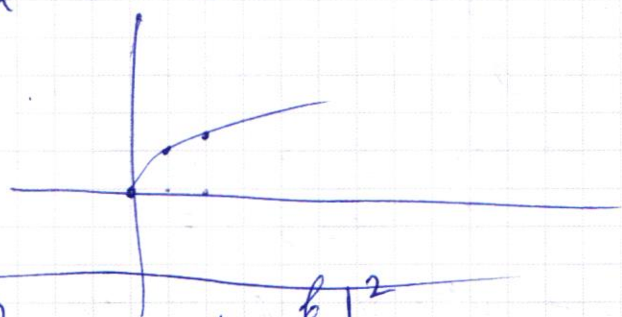
a^1

$(x^a)'' = (ax^{a-1})' = a(a-1)x^{a-2}$

$64-$

$27+64<125$

$b=2-5a$

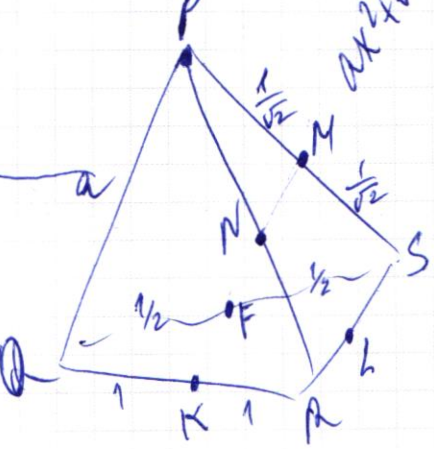


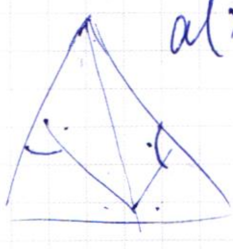
$\frac{4x-3}{x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

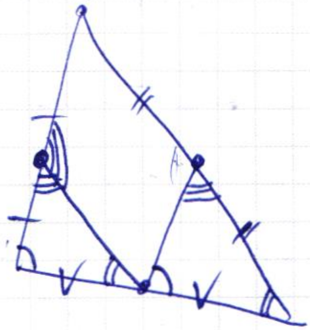
$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

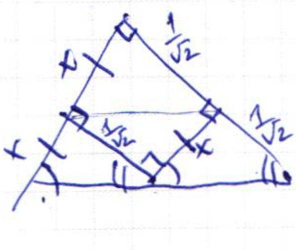
ax^2+bx+c

$b=4-a$









$b=\frac{9}{4}-3a$

$\frac{9}{4}-3=-\frac{7}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

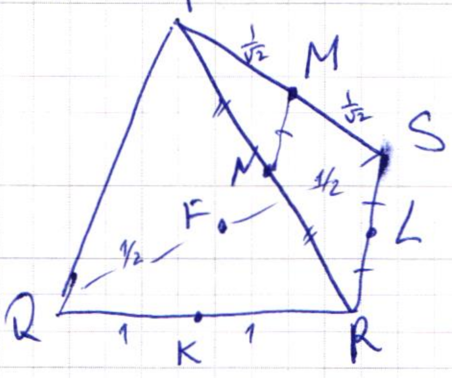
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

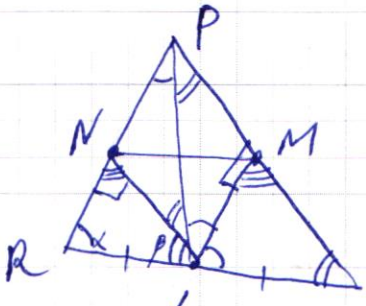
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.



P, M, N, L в одной плоскости и на одной сфере $\Rightarrow$ PMLN - вписан. четыр.



ML, NM, NL - сред. линии $\Rightarrow$ $NM \parallel RS$, $ML \parallel RP$, $NL \parallel PS$

$\Rightarrow \angle PRS = \angle MLS$, $\angle RLN = \angle RSP \Rightarrow \angle RNL = \angle LMS = 180° - \alpha - \beta$

NPML - вписан. $\Rightarrow \angle PNL + \angle PML = 180° \Rightarrow \angle PNL = \angle LMS =$
$= \angle RNL$, $\angle PNL + \angle RNL = 180° \Rightarrow \angle PNL = \angle RNL = \angle PML =$
$= \angle LMS = 90° \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle NLM = 90° = \angle NPM \Rightarrow$
NPML - прямоугол.

$KF \parallel RS$, $NM \parallel RS$ (сред. линии) $\Rightarrow KF \parallel NM$

$\Rightarrow$ K, F, N, M в одной пл-ти $\Rightarrow$ KFMN - вписан. четыр.

$\Rightarrow$ ~~либо при~~ $KF = \frac{RS}{2} = NM \Rightarrow$ ~~KFMN~~ KFMN - прямоуг. (впис. параллел.)

У прямоуг. диагон. равны $\Rightarrow PL = NM = RL = LS = FK = x$

$\Rightarrow \triangle PLS$, $\triangle PLR$ - р/б $\Rightarrow \angle LPS = \beta$, $\angle RPL = \alpha \Rightarrow \angle RP$

№6.

$$\frac{4x-3}{2x-2} \overset{①}{\geq} ax+b \overset{②}{\geq} 8x^2-34x+30 \qquad \forall x\in(1,3]$$

$$\begin{array}{r|l} 4x-3 & 2x-2 \\ 4x-4 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

1) $\underset{>0 \text{ при } x\in(1,3]}{\frac{4x-3}{2x-2}} \geq ax+b \iff 4x-3\geq 2ax^2+2bx-2ax-2b$

$f(x)=2ax^2+2(b-a-2)x+3-2b\leq 0$

$\frac{D}{4}=(b-a-2)^2-6a+4ab=a^2+b^2+4-2ab-4b+4a-6a+4ab=$

$=a^2+b^2+2ab-2a-4b+4$

$x_{1,2}=\frac{a-b+2\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{2a}$

1 случай) $a>0$. парабола выпукл. вниз

$(1,3]\subset[x_1,x_2]$, где x_1,x_2 – корни квад. ур-ия

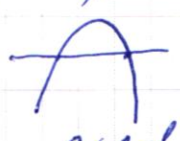
Если $f(1)\leq 0$ и $f(3)\leq 0$, $\iff$ ~~то~~ $\forall x\in(1,3]$ $f(x)\leq 0$.

$f(1)=2a+2b-2a-4+3-2b=-1<0$

$f(3)=18a+6b-6a-12+3-2b=12a+4b-9\leq 0$

① выполн. $\forall x\in(1,3]$ при $\begin{cases} a>0 \\ 12a+4b-9\leq 0\end{cases}$

2 случай) $a<0$



$f(x)\leq 0\ \forall x\in(1,3] \iff \left[\begin{array}{l} \text{корней } f(x) \text{ нет} \\ \begin{cases} \text{корни есть} \\ f(1)\leq 0 \\ f(3)\leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_в\leq 1 \text{ – абсцис. верш.} \\ x_в\geq 3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$

$x_в=\frac{a+2-b}{2a}\leq 1 \iff a+2-b\geq 2a$

$a+b\leq 2$

$x_в=\frac{a+2-b}{2a}\geq 3 \iff a+2-b\leq 6a$

$5a+b\geq 2$

$$\begin{cases} a<0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{D}{4}=a^2+b^2+2ab-2a-4b+4<0 \\ \begin{cases} a^2+b^2+2ab-2a-4b+4\geq 0 \\ 12a+4b-9\leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a+b\leq 2 \\ 5a+b\geq 2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$$

3 случай) $a=0$

$f(x)=2(b-2)x+3-2b$

$f(x)\leq 0\ \forall x\in(1,3] \iff \begin{array}{l} f(1)\leq 0 \\ f(3)\leq 0\end{array}$

можно включить в 1 случай

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $g(x)=8x^2-(34+a)x+30-b\le 0$

$g(x)\le 0\ \forall x\in[1,3] \Leftrightarrow \begin{cases} g(1)\le 0\\ g(3)\le 0\end{cases}$

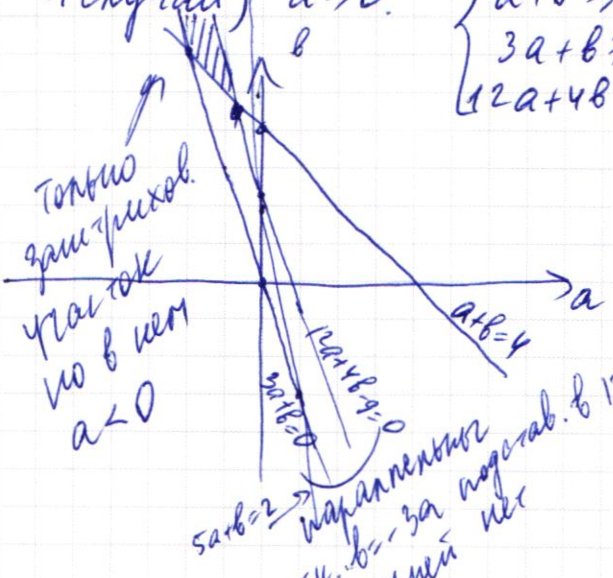
$g(1)=8-34-a+30-b=4-a-b\le 0$

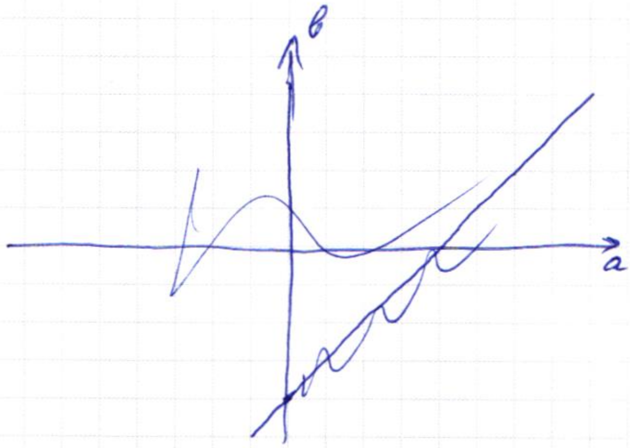
$g(3)=72-102-3a+30-b=-3a-b\le 0$

$\begin{cases} a+b\ge 4\\ 3a+b\ge 0\end{cases}$

При $a+b\ge 4$ $\frac{D}{4}$ у $(1)\ge 0$.

1 случай) $a\ge 0$. $\begin{cases} a+b\ge 4\\ 3a+b\ge 0\\ 12a+4b-9\le 0\end{cases}$





Таких (a,b) нет

2 случай) $a<0$ $\begin{cases} a+b\ge 4\\ 3a+b\ge 0\\ \left[\begin{array}{l} a+b\le 2\\ 5a+b\ge 2\end{array}\right.\\ 12a+4b-9\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 4\\ 3a+b\ge 0\\ 5a+b\ge 2\\ 12a+4b-9\le 0\end{cases}$

это заштрих. обл.

правее этой линии

это подмн-во у (1)

$\Rightarrow$ таких (a,b) нет

Пересечение этих обл. $\varnothing$

Ответ: $\varnothing$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

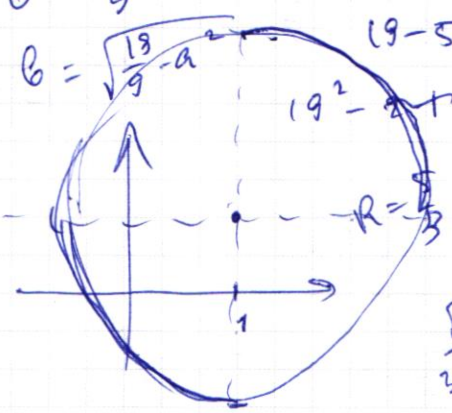
$b^2 = \frac{19}{9} - a^2$

$4a^2 - 15a\sqrt{\frac{19}{9}-a^2} + 19 - 9a^2 = 0$

1) $b = \sqrt{\frac{18}{9} - a^2}$

$19 - 5a^2 = 15a\sqrt{\frac{19}{9} - a^2}$

$19^2 + 190a^2 + 25a^4 = 225a^2\left(\frac{19}{9} - a^2\right)$



$\frac{50-45}{18} = \frac{5}{18}$

$\frac{\sqrt5}{3\sqrt2} \vee \frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt5}{\sqrt2} + 2 - 2 - 2\frac{\sqrt5}{\sqrt2} = -\frac{\sqrt5}{\sqrt2}$

$\frac{5}{18} \vee \frac{4}{9}$

$5 \vee 8$

$\frac{5}{2} + \frac{5}{18} = \frac{50}{18} = \frac{25}{9}$

$\frac{\sqrt5}{3\sqrt2} + \frac{2}{3} \vee \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt5}{\sqrt2}$

$2 = \sqrt{2 - 4 - 6 + 2}$

$24 - 12 - 8 = 4$

$\left(1 - \frac{\sqrt5}{\sqrt2}, \frac{2}{3} - \frac{\sqrt5}{3\sqrt2}\right)$

$64 + 27 = 91$

$125 - 91 = 34$

$2 - 4$

$2 - \frac{\sqrt5}{\sqrt2} - 2 + \frac{2\sqrt5}{\sqrt2} = \frac{\sqrt5}{\sqrt2} = \sqrt{\cancel{2} - \cancel{\frac{\sqrt5}{\sqrt2}} - \cancel{\frac{2\sqrt5}{\sqrt2}} + \frac{5}{2} - \cancel{2} + \cancel{\frac{2\sqrt5}{\sqrt2}} - \cancel{2} + \cancel{\frac{\sqrt5}{\sqrt2}} + \cancel{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

ОДЗ
$x^2 + 6x > 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

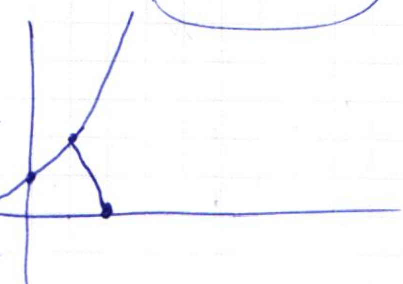
$x^2 + 6x = t$

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

1) $t = 4$ $\quad 3 + 4 \geq 5$

2) $t > 4$

> 7



$9\ln 3 + 16\ln 4 - 25\ln 5$

~~$3\ln 3 + 4\ln 4 ...$~~

1) $3\ln 3 + 4\ln 4 - 5\ln 5 > 0$

$\ln 3 \cdot 3^x + \ln 4 \cdot 4^x - \ln 5 \cdot 5^x = 0$

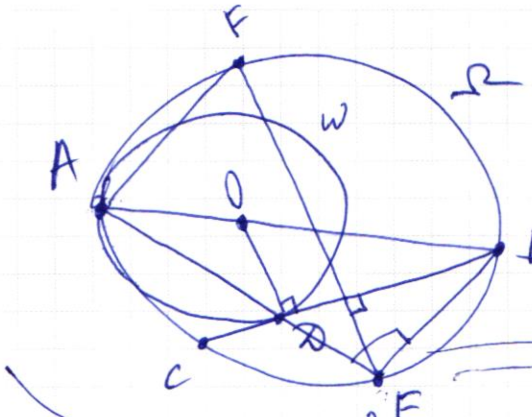
$3\sqrt3 + 4\sqrt4 \vee 5\sqrt5$

$27 + 64 + 24\sqrt{12} \vee 125$

$24\sqrt{12} \vee 34$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$\ln 3 \cdot 3^x + \ln 4 \cdot 4^x - \ln 5 \cdot 5^x$

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$r, R, \angle AFE, S_{AFE} - ?$

$\frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{9 \cdot 16} \vee \frac{1}{25}$

$>$

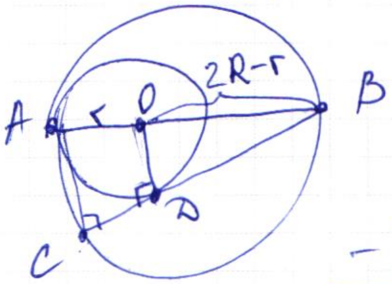
$\frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k}$

$(3^k + 4^k) 5^k > 3^k \cdot 4^k$

$\frac{r}{R} = \frac{\cancel{65} \cdot A}{\cancel{24} \cdot 39_3} = \frac{5}{9}$

$a^x = \ln a \cdot a^x$

$3^2 + 4^2 =$



$\begin{array}{r} 39 \\ \cdot 39 \\ \hline 351 \\ 117 \\ \hline 1521 \\ -1296 \\ \hline 225 \end{array}$

$\begin{array}{r} 36 \\ \cdot 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$

$\begin{array}{r} 25 \\ \cdot 13 \\ \hline 75 \\ 25 \\ \hline 325 \end{array}$

$\frac{7}{12} \quad \frac{1}{5}$

$\begin{array}{r} 13 \\ \cdot 9 \\ \hline 117 \end{array}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \vee \frac{1}{5}$

$\begin{array}{r} 27 \\ \cdot 13 \\ \hline 81 \\ 27 \\ \hline 351 \end{array}$

$\begin{array}{r} + 206 \\ 23 \\ \hline 229 \end{array}$

$35 > 12$

$(3^x + 4^x)' = \ln 3 \cdot 3^x + \ln 4 \cdot 4^x$

$-6 \quad 0$

$f(x) \quad \mathbb{Q}_+$

$x, y \in \mathbb{N}$

$\forall a, b \in \mathbb{Q}_+ \quad f(ab) = f(a) + f(b)$

$3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \quad \forall p \in \mathbb{P}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(2) =$

$3^k + 4^k \geq 5^k$

$a = e^{\ln a}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$(3^k)' = \ln$

$f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

$\lim \frac{a^{x+\varepsilon} - a^x}{\varepsilon}$

$(a^x)' = (\ln e^a)^x)' =$

$a^x = e^{\ln a x} =$

$= \ln a\, e^{x \ln a}$

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad tg\alpha - ?$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos^2 - \sin^2 = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\sin^2$

$\sin 2\alpha\cos^2 2\beta + \cancel{\sin}\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta = -\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta(\underbrace{\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}) = -\frac{4}{17}$ $\quad 7+\frac{4}{3} = \frac{25}{3}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$2\cos\alpha(4\sin\alpha +$

$\sin\alpha = -4\cos\alpha$

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$-\frac{4}{3}$

$3y-2x = \sqrt{3y(x-1)-2(x-1)} = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$ $\quad 5+\frac{4}{3} = \frac{19}{3}$

$4x^2-15xy+9y^2+2x+3y-2=0$

$a = x-1 \quad x = a+1$

$b = y-\frac{2}{3} \quad y = b+\frac{2}{3}$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2-1-\frac{4}{3} \cancel{=4} = 4$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2 = \frac{19}{9}$

$4a^2+8a+4-15ab-10a-15b-10+9b^2+12b+4+2a+2+3b+2-2=0$

$4a^2-15ab+9b^2+\cancel{2-2a} = 0$

$(2a-3b)^2 = 3ab$

$$\begin{cases} 4a^2-15ab+9b^2=0 \\ a^2+b^2 = \frac{19}{9} \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$ $|t| = t$ $(a+b+1)(a+b+2)$

$\cancel{t=4}$ $t = 4^k$ $\log_4 t = k$ 4^k

$3^k + 4^k \geq 4^{k \cdot \log_4 5} = 5^k$ $(a^b)^c = a^{bc}$

a^b

$aaaaa$

$0 \leq x < 2$

$3^x + 4^x >$

$27 + 64 \cancel{<} 125$

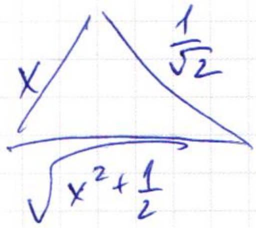
$3^x + 4^x - 5^x = 3^x + 4^x - \sqrt{3^2+4^2}^{\,x}$ $(3^2+4^2)^{\frac{x}{2}}$

$(a+b)^n = a^n + b^n$ $(3^2+4^2)^{\frac{x}{2}} \geq 3^x +$

3^x $(a+b)^n \vee \frac{a^n+b^n}{2}$

$(a+b)^n \vee a^n + b^n$

$= a^n + b^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + \ldots$



$0 \leq x < 2$

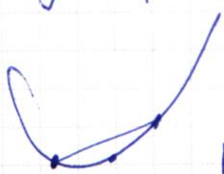
$3^x + 4^x - (3^2+4^2)^{\frac{x}{2}} \geq$

$3^2 = a$ $\frac{x}{2} = y$

$9^y + 16^y - (9+16)^y \geq 0$

B $a^2 + b^2 < (a+b)^2$

$f = 3^x + 4^x$



Йенсена

$f(k\alpha + (1-k)\beta) < kf(\alpha) + (1-k)f(\beta)$

$\cancel{f(x)} =$ фикс. x: $f(a) = a^x$

$f(9+16) \vee f(9) + f(16)$

$(9+16)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)