МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

#1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta+\sin 2\alpha \qquad \cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$\sin 4\beta = 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta \Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta)=\sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta + \sin 2\alpha =$

$= 2\cos^2 2\beta\cdot\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta = 2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \qquad \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 & \Big|\times\frac{1}{\cos\alpha^2} \\ 2\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 & \Big|\times\frac{1}{\cos\alpha^2} \end{cases} \quad (\cos\alpha\neq 0) \quad \begin{cases} 2+4\operatorname{tg}\alpha = 0 \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \\ 2\operatorname{tg}^2\alpha + 4\operatorname{tg}\alpha = 0 \quad \operatorname{tg}\alpha = 0 \quad \operatorname{tg}\alpha = -2 \end{cases}$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 0,\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2},\ \operatorname{tg}\alpha = -2$

#2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x-2y &= \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2 &= 21 \end{aligned}$$

пусть $x-2=a \quad y-1=b$

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=21 \end{cases} \qquad ОДЗ: \ ab\geq 0 \quad a\geq 2b$$

$$\begin{cases} a^2+4b^2-4ab-ab=0 \qquad a^2+4b^2-5ab=0 \quad \Big|\times\frac{1}{b^2} \\ a^2+9b^2=21 \end{cases}$$

($b\neq 0$, т.к. если $b=0$, то $a=0$, но $0\neq 21$)

$$\begin{cases} \frac{a^2}{b^2} - 5\frac{a}{b}+4=0 \Rightarrow \frac{a}{b}=4 \quad \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=4b \quad a=b \\ a^2+9b^2=21 \end{cases}$$

∘ $a=4b \qquad 4b\geq 2b \Rightarrow b>0 \Rightarrow a>0$

$16b^2+9b^2=21 \quad b^2=\frac{21}{25} \quad b=\frac{\sqrt{21}}{5} \quad a=\frac{4\sqrt{21}}{5}$

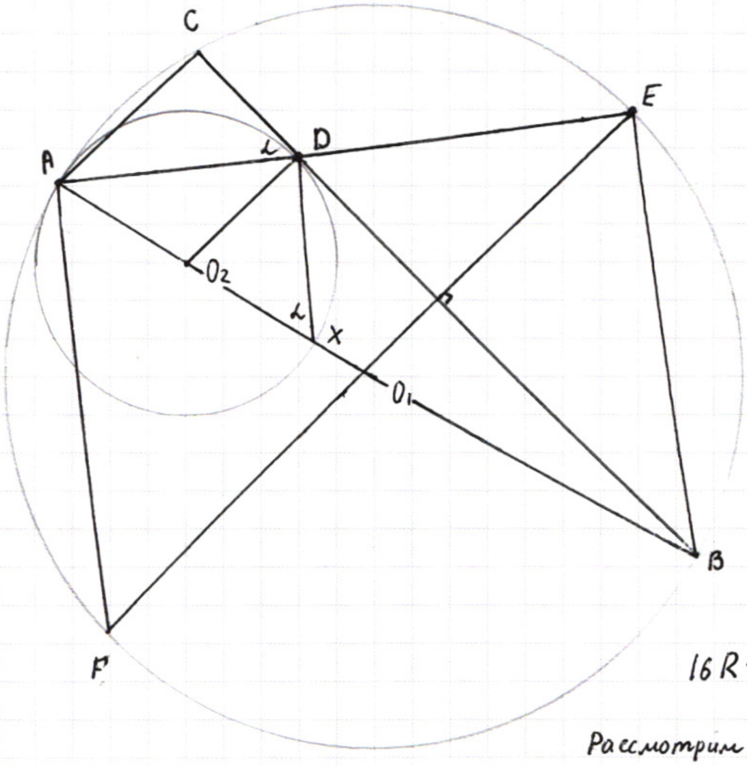
○ $a=b$ $\quad b \geq 2b \Rightarrow b<0 \Rightarrow a<0$

$$10b^2=21 \quad b=-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}} \quad a=-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} y-1=\frac{\sqrt{21}}{5} & x-2=\frac{4}{5}\sqrt{21} \\ y-1=-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}} & x-2=-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y=\frac{\sqrt{21}+5}{5} & x=\frac{4\sqrt{21}+10}{5} \\ y=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}} & x=\frac{2\sqrt{10}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$$

Ответ: $(x;y)=\left(\frac{4\sqrt{21}+10}{5};\frac{\sqrt{21}+5}{5}\right)$, $(x;y)=\left(\frac{2\sqrt{10}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}};\frac{\sqrt{10}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}}\right)$

№4



Пусть O_2 - центр w, O_1 - центр Ω

○ точки A, O_2, O_1 лежат на одной прямой. $O_2D \perp CB$, $EF \perp CB \Rightarrow$

$O_2D \parallel EF \Rightarrow \angle O_2DB = 90°$

$\angle ACB = 90°$, т.к опирается на диаметр

$\Rightarrow AC \parallel O_2D \parallel EF \Rightarrow$

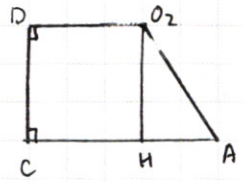
$\triangle ACB \sim \triangle O_2DB \Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{BO_2}{BA}$

Пусть R - радиус Ω, r - радиус w

$$\frac{17}{25}=\frac{2R-r}{2R} \qquad 50R-25r=34R$$

$$16R=25r$$

Рассмотрим трапецию $ACDO_2$:



$DC=8 \quad DO_2=O_2A=r$

$O_2H \perp AC \qquad O_2H=DC=8$

По т. Пифагора $\triangle HO_2A$: $AH^2=AO_2^2-HO_2^2=r^2-64$

$\triangle BO_2D \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{O_2D}{AC}=\frac{17}{25} \qquad AC=\frac{25}{17}r \qquad HC=DO_2=r$

$$AC=\frac{25}{17}r=HC+HA=r+\sqrt{r^2-64} \qquad \frac{8}{17}r=\sqrt{r^2-64} \qquad \frac{64r^2}{289}=r^2-64 \qquad \frac{225}{289}r^2=64 \qquad \frac{15}{17}r=8$$

$$r=\frac{8\cdot17}{15} \qquad R=\frac{25}{16}r=\frac{25\cdot8\cdot17}{15\cdot16}=\frac{5\cdot17}{6} \qquad r=\frac{136}{15} \qquad R=\frac{85}{6}$$

○ Пусть $\angle CDA=\alpha$, т.$X=AB\cap w$. $\angle ADX=90°$, $\angle AEB=90° \Rightarrow \triangle ADX \sim \triangle AEB$

по свойству касательной $\angle DXA=\alpha \Rightarrow \angle EBA=\alpha \Rightarrow \angle AFE=\alpha$ ($\angle EBA$ и $\angle EFA$ опир. на одну хорду)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение #4

$\sin\alpha = \frac{AC}{AD}$

$AC = \frac{25}{17}r = \frac{40}{3}$ $\quad AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{2176}{9}}$ $\quad \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\angle ADO_2 = 90^\circ - \alpha = \angle DAO_2$ ($\triangle AO_2D$ равнобедр.) $\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow \angle FEB = 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$

$\angle FEB = \angle BAF = \alpha \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$

по т. синусов $\frac{AE}{\sin\alpha} = 2R$ $\quad AE = 2R \cdot \sin\alpha = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

$EF = 2R = \frac{10 \cdot 17}{6}$ $\quad$ по т. Пифагора $AF^2 = EF^2 - AE^2 = \frac{25}{4} \cdot 34$ $\quad AF = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{34}$

$S_{\triangle AFE} = \frac{AE \cdot AF}{2} = \frac{5 \cdot 25 \cdot 34}{24} = \frac{5 \cdot 25 \cdot 17}{12} = \frac{2225}{12}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$, $r = \frac{136}{15}$, $\alpha = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = \angle AFE$, $S_{\triangle AEP} = \frac{2225}{12}$

#3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$ $\quad$ Пусть $x^2+18x = a$ $\quad$ ОДЗ: $a > 0$

$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} a} = 5^{\frac{\log_5 a}{\log_5 12}} = a \cdot \left(5^{\log_5 12}\right)^{-1} = \frac{a}{12}$

$a^{\log_{12} 13} = a^{\frac{\log_a 13}{\log_a 12}} = 13 \cdot \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$ $\quad$ (здесь $a \neq 1$, но если $a = 1$, то неравенство вып.)

$\frac{13a}{12} \geq \frac{13}{12}$ $\quad a \geq 1$

$x^2 + 18x \geq 1$ $\quad x^2 + 18x - 1 \geq 0$ $\quad D = 18^2 + 4 = 324 + 4 = 328 = 8 \cdot 41 = 4 \cdot 82$

$x = \frac{-18 \pm 2\sqrt{82}}{2} = -9 \pm \sqrt{82}$

$+ \quad -9-\sqrt{82} \quad - \quad -9+\sqrt{82} \quad +$

$\Rightarrow x \in [-\infty; -9-\sqrt{82}] \cup [-9+\sqrt{82}; +\infty]$

Ответ: $x \in [-\infty; -9-\sqrt{82}] \cup [-9+\sqrt{82}; +\infty]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

#5

- если $\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$, то $\frac{x}{y}$ можно разложить как произведение простых чисел ~~множителей~~.

Тогда, если $\frac{x}{y} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$, то $f(\frac{x}{y}) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n)$

если простое число < 4, то f от этого простого числа $= 0$, если простое число > 4, то

f от этого простого числа > 0 (т.к. $[\frac{p}{4}] \geq 1$, где $p > 4$) $\Rightarrow$ если $\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$, то $f(\frac{x}{y}) > 0$

- $\frac{x}{y} \notin \mathbb{Z}$

$f(\frac{x}{y} \cdot y) = f(\frac{x}{y}) + f(y) \qquad f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(1) = 0 \quad f(2) = 0 \quad f(3) = 0 \quad f(4) = f(2) + f(2) = 0 \quad f(5) = 1 \quad f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1 \quad f(8) = 0 \quad f(9) = 0 \quad f(10) = f(2) + f(5) = 1 \quad f(11) = 2 \quad f(12) = 0$

$f(13) = 3 \quad f(14) = 1 \quad f(15) = 1 \quad f(16) = 0 \quad f(17) = 4 \quad f(18) = 0 \quad f(19) = 4 \quad f(20) = 1$

$f(21) = 1 \quad f(22) = 2 \quad f(23) = 5 \quad f(24) = 0$

- если $f(x) = 0$, то x можно выбрать 11 способами; $f(y) > 0 \Rightarrow$ ~~f(y)~~ можно выбрать 13 способами

$\Rightarrow 11 \cdot 13$ способов

- если $f(x) = 1$, то x можно выбрать 7 способами, $f(y) > 1 \Rightarrow y$ можно выбрать 6 способами

$\Rightarrow 7 \cdot 6$ способов

- если $f(x) = 2$, то x можно выбрать 2 способами; $f(y) > 2 \Rightarrow y$ можно выбрать 4 способами

$\Rightarrow 2 \cdot 4$ способа

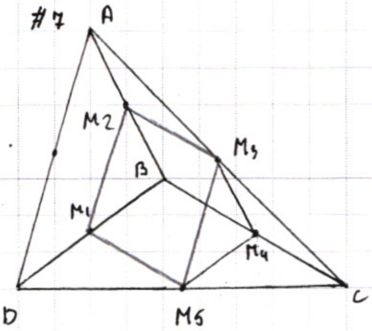
- $f(x) = 3$, x -//- 1 способ, y -//- 3 способа $\Rightarrow$ 3 способа
- $f(x) = 4$, x -//- 2 способа, y -//- 1 способ $\Rightarrow$ 2 способа

Всего: $11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 + 2 = 143 + 42 + 8 + 5 = 148 + 50 = 198$

Ответ: 198

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

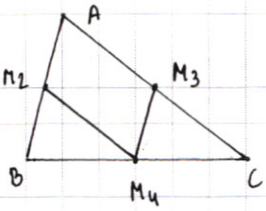
#7



Пусть M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 - середины сторон BD, AB, AC, BC, DC соответственно.

сечение сферы плоскостью ABC - окружность =>

A, M_2, M_3, M_4 лежат на одной окружности



M_2M_4, M_3M_4 - средние линии в $\triangle ABC$ => $M_3M_4 \parallel AB$,

$M_2M_4 \parallel AC$ => $AM_2M_3M_4$ параллелограмм, вписанный в окружность => $AM_2M_3M_4$ - прямоугольник => $\angle BAC = 90°$

$M_1M_2M_3M_5$ тоже вписанный прямоугольник (т.к. M_1, M_2, M_3, M_5 лежат на одной окр. и $M_1M_2 \parallel M_3M_5$, $M_2M_3 \parallel M_1M_5$)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

#1

$\sin(2\alpha+2\beta) = 2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cancel{\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos\alpha}$

$\cancel{\cos(\alpha+2\beta) = \cos\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin\alpha\cdot\sin 2\beta}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha(\cos 4\beta+1) + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

$\sin 2\alpha + \sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1 \qquad \sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta\cdot 2 - 1) + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot 2\cdot\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$2\cos 2\beta\left(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha\right) = 2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\cdot\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta = \frac{\sqrt5\cdot 4}{5} \qquad \cos 2\beta = \frac{\sqrt5\cdot 4}{2\cdot 5} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5} \qquad \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\begin{cases} 2\sin 2\alpha + 1\cos 2\alpha = -1 \\ 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \end{cases}$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(3y-3)^2 = 9y^2 - 18y + 9$

#2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

ОДЗ: $x-2y \geq 0$ $xy-x-2y+2 \geq 0$

$$\begin{cases} x^2+4y^2-4xy = xy-x-2y+2 \\ x^2-4x+4+9y^2-18y-12=0 \end{cases}$$

$x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=21$

$4y(y-x+\frac{1}{2}) - x(y-x+1)-2=0$

$4y(y-x)-x(y-x)+x+2y-2=0$

$(y-x)(4y-x)+x+2y-2=0$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$\cancel{x-2=2y+2}$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=21 \end{cases}$$

пусть $x-2=a$ $y-1=b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=21 \end{cases}$$

$a^2+4b^2-4ab=ab$ $a^2-5ab+4b^2=0$

$a^2+9b^2=21$

$\frac{a^2}{b^2} - \frac{5a}{b}+4=0$

$D=25-16=9$

$\frac{a}{b} = \frac{5+3}{2}=4$ $\frac{a}{b}=\frac{5-3}{2}=1$

$a=4b$ $a=b$ $b \neq 0$

∘ $a=4b$ $16b^2+9b^2=21$ $25b^2=21$ $b^2=\frac{21}{25}$

∘ $a=b$ $10b^2=21$ $b^2=\frac{21}{10}$

$$\begin{cases} b=\pm\frac{\sqrt{21}}{5} & a=\pm\frac{4}{5}\sqrt{21} \\ b=-\sqrt{\frac{21}{10}} & a=-\sqrt{\frac{21}{10}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-1=\frac{\sqrt{21}}{5} & x-2=\frac{4}{5}\sqrt{21} \\ y-1=-\sqrt{\frac{21}{10}} & x-2=-\sqrt{\frac{21}{10}} \end{cases}$$

$ab \geq 0$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$a-2b \geq 0$ $a \geq 2b$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle AFE \quad S\ AEF$

$\angle AFE$

$\angle AFE = \angle ABE = \alpha$

$\sin\angle\alpha = \frac{AC}{AD}$

$AC = \frac{25}{17} \cdot \frac{8 \cdot 17}{15} = \frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3}$

$AD = \sqrt{\frac{1600}{9} + 64} = \sqrt{\frac{2176}{9}}$

$\sin\alpha = \frac{40}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2176}} = \sqrt{\frac{1600}{2176}} = \sqrt{\frac{400}{544}} = \sqrt{\frac{100}{136}} = \sqrt{\frac{25}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$2176 \,|\, 4$, 544; 20, 17, 16

3, 64, 9, 576

$544 \,|\, 4$, 136; 4, 14, 12, 264

3, 46; 1, 46, 276; 184, 2116

$\frac{AE}{\sin\alpha} = 2R$

$AE = 2R \cdot \sin\alpha = \frac{10 \cdot 17}{6} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{50\sqrt{17}}{6\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

$EF = 2R = \frac{10 \cdot 17}{6}$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$

$AF^2 = EF^2 - AE^2 = \frac{(10 \cdot 17)^2}{36} - \frac{25^2 \cdot 34}{36} = \frac{100 \cdot 17^2 - 25 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 2}{36}$

$= \frac{25 \cdot 17 \cdot 2\,(2 \cdot 17 - 25)}{36} = \frac{25 \cdot 34 \cdot 9}{36} = \frac{25}{4} \cdot 34$

$AF = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{34}$

$S_\Delta = \frac{AE \cdot AF}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{25 \cdot \sqrt{34}}{6} = \frac{5 \cdot 25 \cdot 34}{24} =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$ p-простое

$(x;y)$ $1 \leq x \leq 24$

$1 \leq y \leq 24$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$x = 3$ $y = 1$ $f(3) + f(1)$

$f(24) = f(2 \cdot 12) = f(2) + f(12) = f(2) + f(2) + f(2) + f(3)$

$f(21) = f(7 \cdot 3) = f(7) + f(3) = 1$

∘ $y = 1$ $x = 1$ $f(1) = [\frac{1}{4}] = -1$ $f(4) = [1] = 1$

$x = 2$ $f(2) = [\frac{1}{2}] = -1$ $f(5) = 1$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = -1$ $f(6) = f(2) + f(3) = -2$

7 +
8 –
9 –
10 0
11 +
12 –

13 +
14 –
15 0

$\cancel{f(2\frac{1}{3})}$

$f(\frac{1}{8} \cdot 8) = f(\frac{1}{8}) + f(8)$

$f(\frac{1}{17} \cdot 17) = f(\frac{1}{17}) + f(17)$

$f(\frac{1}{17}) = f(1) - f(17)$

$f(\frac{2}{3} \cdot 3) = f(\frac{2}{3}) + f(3)$

$f(\frac{2}{3}) = f(2) - f(3)$

---

① если $\frac{x}{y}$ = не дробь

$f(\frac{2}{4} \cdot 4) = f(\frac{2}{4}) + f(4)$

$f(\frac{2}{4}) = f(2) - f(4)$

$y = 1$

$f(\frac{1}{2} \cdot 2)$

$f(\frac{x}{y} \cdot y) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

1	1	13	13
2	2	14	$7 \cdot 2$
3	3	15	$5 \cdot 3$
4	2×2	16	$2 \times 2 \times 2 \cdot 2$
5	5	17	17
6	2×3	18	$2 \cdot 3 \cdot 3$
7	7	19	19
8	$2 \times 2 \times 2$	20	$2 \cdot 5 \cdot 2$
9	3×3	21	$7 \cdot 3$
10	$5 \cdot 2$	22	$11 \cdot 2$
11	11	23	23
12	$2 \cdot 2 \cdot 3$	24	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 11 \\ \hline 13 \\ 13\ \\ \hline 143 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 & (1) \\ 2\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $2\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0$ $\qquad \cos\alpha \neq 0$

$2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 4\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0 \quad 2tg^2\alpha + 4tg\alpha = 0 \quad tg^2\alpha + 2tg\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0$

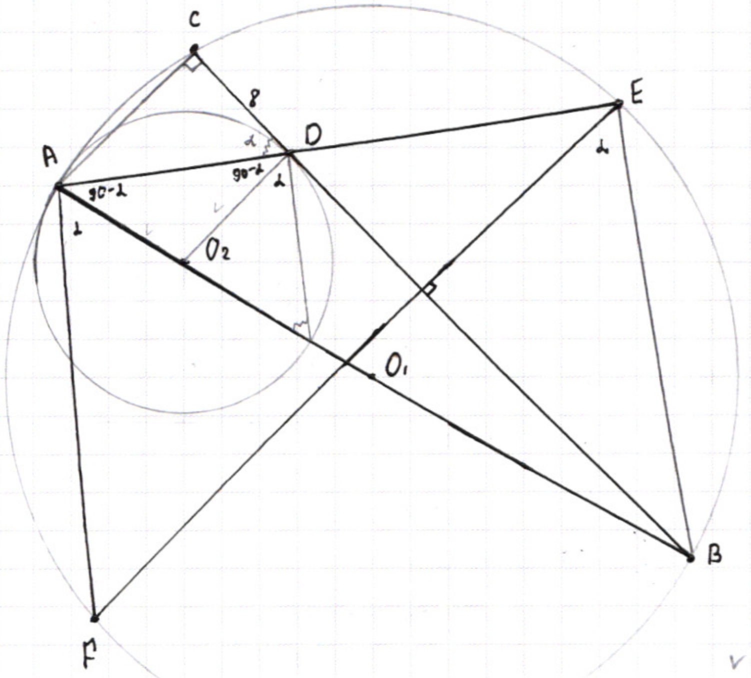
$tg\alpha = -2$

(1) $2 + 4tg\alpha = 0 \quad 4tg\alpha = -2 \quad tg\alpha = -\frac{1}{2}$

Если $\cos\alpha = 0$, то. $\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad (2\cos^2\alpha - 1)\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\angle AFE \quad S_{AEF}$

$CD = 8 \quad BD = 17$



$\frac{BD}{CD} = \frac{BO_2}{}$

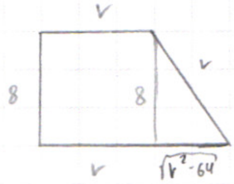
$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA}$

$\frac{17}{17+8} = \frac{2R-r}{2R}$

$\frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R}$

$34R = 50R - 25r$

$25r = 16R$



$r^2 - 64$

$\frac{BD}{BC} = \frac{O_2D}{AC} = \frac{17}{25}$

$17AC = 25O_2D$

$AC = \frac{25}{17}r$

$r + \sqrt{r^2-64} = \frac{25}{17}r$

$\sqrt{r^2-64} = \frac{8}{17}r \qquad r^2 - 64 = \frac{64}{289}r^2$

$\frac{289-64}{289}r^2 = 64$

$\frac{225}{289}r^2 = 64$

$\frac{15}{17}r = 8 \quad r = \frac{8\cdot17}{15}$

$R = \frac{25}{16}r = \frac{25}{16}\cdot\frac{8\cdot17}{15} = \frac{5\cdot17}{6}$

$3 \cdot 17 \cdot 25 = 425$; $225 \cdot 5 = 2225$; $15 \cdot 15 = 225$; $17 \cdot 17 = 289$; $17 \cdot 8 = 136$; $17 \cdot 5 = 85$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

ОДЗ $\quad x^2+18x > 0$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

пусть $x^2+18x = a$

$$5^{\log_{12}a} + a \geq |a|^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$$

$$\log_{12}a = \frac{\log_5 a}{\log_5 12}$$

$$5^{\frac{\log_5 a}{\log_5 12}} = a^{\frac{1}{\log_5 12}}$$

$$a^{\frac{1}{\log_5 12}} + a \geq a^{\log_{12}13}$$

$$a^{\frac{1}{\log_5 12}} + a \geq a^{\frac{\log_5 13}{\log_5 12}}$$

$$a^{\frac{1}{\log_5 12}} + a^{\frac{\log_5 12}{\log_5 12}} \geq a^{\frac{\log_5 13}{\log_5 12}}$$

$$a^{\frac{1}{\log_5 12}}\left(1 + a^{\log_5 12} - a^{\log_5 13}\right) \geq 0$$

$$1 + a^{\log_5 12} - a^{\log_5 13} \geq 0$$

$$1 + a^{\frac{\log_a 12}{\log_a 5}} - a^{\frac{\log_a 13}{\log_a 5}} \geq 0$$

a

$$5^{\log_5 a} \cdot 5^{\frac{1}{\log_5 12}} + a \geq a^{\log_{12}13}$$

$$a \cdot \left(5^{\log_5 12}\right)^{-1} + a \geq a^{\log_{12}13}$$

$$\frac{a}{12} + a \geq a^{\log_{12}13}$$

$$\frac{13}{12}a \geq a^{\log_{12}13}$$

$$a^{\frac{\log_a 13}{\log_a 12}} = 13 \cdot a^{\frac{1}{\log_a 12}} = \frac{13}{12}$$

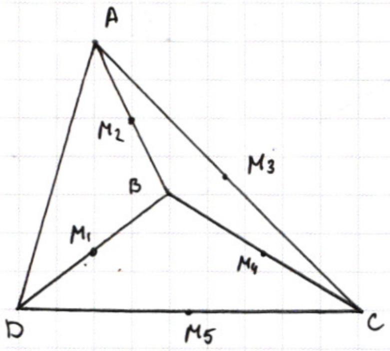
$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$BC = ?$

$AB = 1$

$BD = 2$

$CD = 3$



$\square^2$ $324 - 4 = 320$