МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+1} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$x-2=t$, $y-1=n$

$$\begin{cases} t-2n=\sqrt{tn} \\ t^2+9n^2=25 \end{cases}$$

$t-2n=\sqrt{tn}$

$t-2n\geq 0 \qquad t\geq 2n$

$t^2-4tn+4n^2=tn$

$t^2-5tn+4n^2=0$

$(t-4n)(t-n)=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=4n \\ t=n \end{array}\right.$$

$t=4n$:

$16n^2+9n^2=25$

$n^2=1$

$n=1$:

$t=4$

$x=t+2=6$

$n=n+1=2$

$n=-1$:

$t=-4$, но $t\geq 2n$, не подходит

$(6;2)$

$t=n$:

$n^2+9n^2=25$

$n^2=\frac{5}{2}$

$n=\sqrt{\frac{5}{2}}$:

$t=\sqrt{\frac{5}{2}}$, но $t\geq 2n$, не подходит

$n=-\sqrt{\frac{5}{2}}$:

$t=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x=t+2=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y=n+1=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}})$

Ответ: $(6;2)$ и $(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}})$.

№3

$5^{\log_{12}|x^2+18x|} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x=t$, $\log_{12}|x^2+18x|$: $x^2+18x>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$(12^{\log_{12}5})^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t = 12^a$, $t>0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}$

$5^a + 12^a \geq 13^a$

$25\cdot 5^{a-2} + 144\cdot 12^{a-2} \geq 169\cdot 13^{a-2}$

$a=2$: $25+144 = 169$

$a>2$: $13^{a-2} > 12^{a-2}$, $144\cdot 13^{a-2} > 144\cdot 12^{a-2}$,

$13^{a-2} > 5^{a-2}$, $25\cdot 13^{a-2} > 25\cdot 5^{a-2} \Rightarrow 25\cdot 5^{a-2} + 144\cdot 12^{a-2} <$

$< 169\cdot 13^{a-2}$

$a<2$: $13^{a-2} < 12^{a-2}$, $13^{a-2} < 5^{a-2} \Rightarrow 25\cdot 5^{a-2} + 144\cdot 12^{a-2} >$

$> 25\cdot 13^{a-2} + 144\cdot 13^{a-2}$, значит нам подходит

$a \leq 2$, значит $0 < t \leq 12^2$

$0 < t \leq 144$

$0 < x^2+18x \leq 144$

$x^2+18x > 0$ $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right.$

$x^2+18x \leq 144$ $\cancel{(x+24}$

$x^2+24x-6x-144 \leq 0$

$(x+24)(x-6) \leq 0$

$-24 \leq x \leq 6$, но $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right.$

$x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2a+4\beta)+\sin 2a = -\frac{4}{5}$

$\sin^2(2a+2\beta) = \frac{1}{5}$

$\frac{1-\cos(4a+4\beta)}{2} = \frac{1}{5}$

$\cos(4a+4\beta) = \frac{3}{5}$

$\sin(4a+4\beta) = \pm\sqrt{1-\cos^2(4a+4\beta)} = \pm\frac{4}{5} = k$

синус может быть равен любому из этих значений, т.к. мы не знаем знак косинуса $2a+2\beta$

$\sin(2a+4\beta)+\sin 2a = -\frac{4}{5}$

$\sin(4a+4\beta)\cos 2a - \sin 2a\cos(4a+4\beta)+\sin 2a = -\frac{4}{5}$

$k\cos 2a - \frac{3}{5}\sin 2a + \sin 2a = -\frac{4}{5}$

$5k\cos 2a + 2\sin 2a = -4$

$5\frac{k}{2}\cos 2a + \sin 2a = -2$

$5\frac{k}{2}\cos^2 a - 5\frac{k}{2}\sin^2 a + \sin 2a + 2 = 0$

$(5\frac{k}{2}+2)\cos^2 a - (5\frac{k}{2}-2)\sin^2 a + 2\sin a\cos a = 0$

$(5\frac{k}{2}-2)\,tg^2 a - 2tg\,a - (5\frac{k}{2}+2) = 0$

$k = \frac{4}{5}$:

$-2tg\,a - 4 = 0$

$tg\,a = -2$

$k = -\frac{4}{5}$:

$-4tg^2 a - 2tg\,a = 0$

$2tg^2 a + tg\,a = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\,a = 0 \\ tg\,a = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Значения $tg\,a$: $-2, -\frac{1}{2}, 0$. Этих значений не меньше трёх, мы получим как раз эти значения, что означает, что их не нужно проверять

Ответ: $-2, -\frac{1}{2}, 0$

№ 5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$

$f(1) = 0$

$f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$0 = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

Заметим, что так как $f(ab) = f(a) + f(b)$, то каждое натуральное число x, кроме 1, мы можем представить в виде $f(x) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n)$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — простые делители числа (не обязательно различные).

То есть $f(12) = f(2) + f(2) + f(3)$, $f(21) = f(3) + f(7)$ и т.д.

$f(p) = [p/4]$

$f(2) = f(3) = 0$ $\quad f(5) = f(7) = 1$ $\quad f(11) = 2$ $\quad f(13) = 3$

$f(17) = \cancel{f(17)} = 4$ $\quad f(23) = 5$

Тогда

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
f(x)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

0	11 чисел
1	7 чисел
2	2 числа
3	1 число
4	2 числа
5	1 число

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0$ $\quad f(y) > f(x)$

~~Если $f(y) = 1$ ($y = 5$ или $y = 7$ или $y = 19$ или … или $y = 21$, при 11 значениях x $f(x) < f(y)$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $f(y)=0$ (11 натур. чисел из диапазона), ни при каком x $f(x)$ не меньше $f(y)$

Если $f(y)=1$ (7 натур. чисел), то при 11 значениях x $f(x)<f(y)$ ($f(x)=\{0\}$)

Если $f(y)=2$ (2 числа), то при $11+7=18$ значениях x $f(x)<f(y)$ ($f(x)=\{0,1\}$)

Если $f(y)=3$ (1 число), то при $11+7+2=20$ значениях x $f(x)<f(y)$ ($f(x)=\{0,1,2\}$)

Если $f(y)=4$ (2 числа), то при $11+7+2+1=21$ значениях x $f(x)<f(y)$ ($f(x)=\{0,1,2,3\}$)

Если $f(y)=5$ (1 число), то при $11+7+2+1+2=23$ значениях x $f(x)<f(y)$ ($f(x)=\{0,1,2,3,4\}$)

Итого мы имеем $7\cdot 11+2\cdot(7+11)+1\cdot(2+7+11)+$ $+2(1+2+7+11)+1(2+1+2+7+11)=77+36+20+$ $+42+23=198$ пар x и y, удовлетворяющих условию

Ответ: 198 пар

№4

Дано: Ω и ω касаются в A внутренним образом, AB – диаметр Ω, BC – хорда Ω, касается ω в D; AD повторно пересекает Ω в E; прямая, проходящая через E $\perp BC$ повторно пересекает Ω в F

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$CD = 8$, $BD = 17$

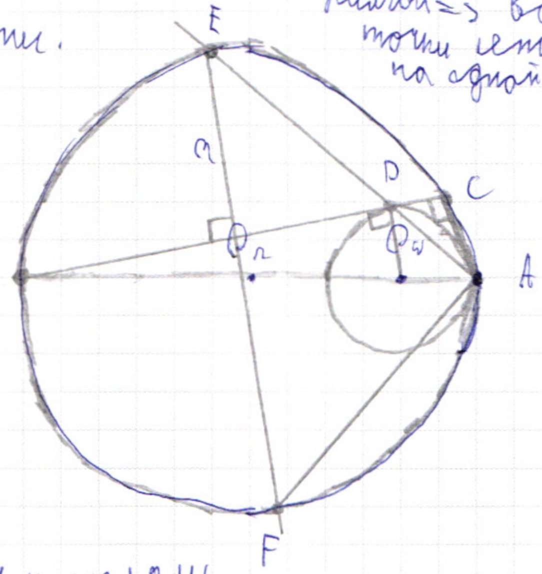
Найти: $\angle AFE = ?$ $R_w = ?$ $R_\Omega = ?$ $S_{AEF} = ?$

Решение:

$a \perp BC$ $\qquad$ O_Ω, O_w и A лежат на одной прямой (касание), но O_Ω, A и a лежат на одной прямой $\Rightarrow$ все эти точки лежат на одной прямой

$O_w D \perp BC$ (касательная)

$AC \perp BC$ ($\angle ACB = 90^\circ$, т.к. вписанный угол опирается на диаметр AB)



$\angle ACB = \angle O_w DB = 90^\circ$,

~~CBA – общий для~~

$\angle ABC$ – общий для

$\triangle ABC$ и $\triangle O_w DA \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle O_w DA$ (по двум углам)

$$\frac{BO_w}{AB} = \frac{BD}{BC} = k$$

$$\frac{2R_{O\Omega} - R_{Ow}}{2R_{O\Omega}} = \frac{BD}{BD+CD} \qquad 1 - \frac{R_{Ow}}{2R_{O\Omega}} = \frac{17}{25} \qquad \frac{R_{Ow}}{2R_{O\Omega}} = \frac{8}{25}$$

$$\frac{R_{Ow}}{R_{O\Omega}} = \frac{16}{25} \qquad k = \frac{17}{25}$$

$O_w D^2 + \cancel{BO_w^2 =} BD^2 = BO_w^2$ (Th Пифагора)

$$R_{Ow}^2 + \cancel{(2R_{O\Omega} - R_{Ow})^2}\ 17^2 = (2R_{O\Omega} - R_{Ow})^2$$

$$R_{Ow}^2 + 17^2 = \left(\left(\frac{50}{16} - 1\right) R_{Ow}\right)^2$$

$$R_{Ow}^2 + 17^2 = \left(\frac{17}{8}\right)^2 R_{Ow}^2$$

$$R_{Ow}^2 \left(\left(\frac{17}{8}\right)^2 - 1\right) = 17^2$$

$$R_{Ow}^2 \left(\frac{289-64}{64}\right) = 17^2$$

$$R_{Ow}^2 \cdot \left(\frac{15}{8}\right)^2 = 17^2$$

$$R_{Ow} = \frac{17 \cdot 8}{15} \qquad R_{O\Omega} = \frac{25}{16} R_{Ow} = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{17 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{17 \cdot 5}{3 \cdot 2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R_{O_\omega} = \frac{136}{15}$ $\quad R_{O_\Omega} = \frac{85}{6}$

$AC = \frac{DO_\omega}{k} = \frac{RO_\omega}{k} = \frac{\frac{136}{15}}{\frac{17}{25}} = \frac{25}{15} \cdot \frac{136}{17} = 8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3}$

$\alpha = \angle DAC$

$tg\,\alpha = \frac{DC}{AC} = \frac{8}{\frac{40}{3}} = \frac{3}{5}$

$\beta = \angle CBA$

$tg\,\beta$

$AC = \frac{DO_\omega}{k} = \frac{RO_\omega}{k} = \frac{\frac{136}{15}}{\frac{17}{25}} = \frac{40}{3}$

$\alpha = \angle DAC$, $\alpha < 90^\circ$ (в прямоуг. треуг.)

$tg\,\alpha = \frac{DC}{AC} = \frac{8}{\frac{40}{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$ $\quad \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\beta = \angle CBA$, $\beta < 90^\circ$ (в прямоуг. треуг.)

$\sin\beta = \frac{8}{17}$ $\quad \cos\beta = \frac{15}{17}$

$tg\,\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{40}{3}}{25} = \frac{8}{15} \Rightarrow$ ~~$\cos\beta = \frac{\sqrt{161}}{15}$~~

$\angle DAC = \frac{1}{2} \cup EC$ $\quad \angle CBA = \frac{1}{2} \cup CA$, $\angle AFE = \frac{1}{2} \cup EA =$

$= \angle DAC + \angle CBA$

$\sin \angle AFE = \sin\angle DAC \cos\angle CBA + \sin\angle CBA \cos\angle DAC =$

~~$= \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{\sqrt{161}}{15} + \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{161} + 40}{15\sqrt{34}}$~~

$= \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{15}{17} + \frac{8}{17} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{85}{17\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\angle AFE = \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}}$, но если $\sin\angle AFE = \cos\angle DAC$, то

$\angle AFE + \angle DAC = 90^\circ$

$\frac{1}{2}\smile EC + \frac{1}{2}\smile EA = 90°$

$\smile EC + \smile EA = 180°$, но $\smile EA + \smile BE = 180°$ (AB — диаметр) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \smile EC = \smile BE \Rightarrow \angle EBC = \angle ECB \Rightarrow \triangle BCE$ — р.б.,

тогда a — не просто $\perp$ для BC, это серед. $\perp$, а значит a проходит через O_2 ($\perp$ от O_2 к BC — тоже серед. $\perp$), тогда EF — диаметр

$EF = AB = 2R_{O_2} = \frac{85}{3}$, тогда $EAF = 90°$;

$$S_{AEF} = \frac{EA \cdot AF}{2} = \frac{EF^2 \cdot \sin\angle AFE \cdot \cos\angle AFE}{2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{85}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}}}{2} = \frac{5^2 \cdot 17^2 \cdot 5 \cdot 3}{3^2 \cdot 2 \cdot 34} = \frac{5^3 \cdot 17^2 \cdot 3}{17 \cdot 2^2 \cdot 3^2} =$$

$$= \frac{5^3 \cdot 17}{2^2 \cdot 3} = \frac{125 \cdot 17}{12} = \frac{2125}{12}$$

Ответ: $R_{O_1} = \frac{136}{15}$; $R_{O_2} = \frac{85}{6}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

№6

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 38x - 12$ на $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax + b$

$3 + \frac{2}{4x+3} \downarrow$ на $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, тогда если $a \ge 0$, то $3 + \frac{2}{-\frac{11}{4}\cdot 4+3} \le -\frac{11}{4}a + b$

$2\frac{3}{4} \le -\frac{11}{4}a + b$ (на этом промежутке $ax+b \uparrow$, $3 + \frac{2}{4x+3} \downarrow$, значит условие выполнено на промежутке, если оно выполнено в точке $-\frac{11}{4}$)

~~Из~~ $a < 0$:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3+\frac{2}{4x+3}\le ax+b$

$-\frac{11}{4}\le x<-\frac{3}{4}\Rightarrow 4x+3<0$

$12x+11\ge(4x+3)(ax+b)$

$12x+11\ge 4ax^2+(3a+4b)x+3b$

$4ax^2+(3a+4b)x+3b\le 12x+11$

$4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11\le 0$

~~$x_0=$~~ $a<0\Rightarrow$ это парабола, у которой ветви направлены вниз

$3+\frac{2}{4\cdot(-\frac{11}{4})+3}\le -\frac{11}{4}a+b$

$2\frac{3}{4}\le -\frac{11}{4}a+b$

~~$-\frac{3}{4}a+b\le \cancel{-8+30-17}$ $-8\cdot(-\frac{3}{4})^2-30\cdot(-\frac{3}{4})-17=1$~~

~~$-\frac{3}{4}a+b\le 1$ ($-\frac{3}{4}$ не входит в наш промежуток, но где функц~~

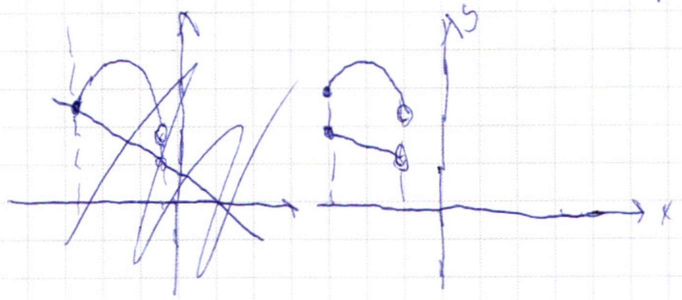
$c\to 0$: $\cancel{-\frac{3}{4}a+ca+}$ $(-\frac{3}{4}+c)a\le(-\frac{3}{4}+c)^2\cdot(-8)-30(-\frac{3}{4}+c)-17=1+12c-8c^2-30c=1-8c^2-18c$

$1<2\frac{3}{4}$, а значит $a<0$

$f(x)=-8x^2-30x-17$ – парабола с ветвями, направленными вверх, а на $x\in[-\frac{11}{4},-\frac{3}{4})$ это – её кусок, при чём её вершина принадлежит промежутку $x_0=-\frac{-30}{-8\cdot 2}=-\frac{15}{8}$, $\cancel{-\frac{3}{4}<}$ $-\frac{11}{4}<-\frac{15}{8}<-\frac{3}{4}$,

~~так и~~ а значит чтобы ~~кр~~ кусок прямой на отрезке лежал полностью под куском параболы, необходимо, чтобы под крайними точка параболы на отрезке находились крайние точки прямой на отрезке, если что-то из это не выполнено, то либо прямая пересекает параболу, либо находится выше неё

Иллюстрация:



Тогда

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b \le -8(-\frac{11}{4})^2-30(-\frac{11}{4})-17 \\ -\frac{3}{4}a+b \le -8(-\frac{3}{4})^2-30(-\frac{3}{4})-17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b \le 5 \\ -\frac{3}{4}a+b \le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b \le 5+\frac{11}{4}a \\ b \le 1+\frac{3}{4}a \end{cases}$$

$$3+\frac{2}{4x+3} = ax+b$$

↑ гипербола ↑ прямая

Найдём точки касания гиперболы и прямой

$$(3+\frac{2}{4x+3})' = -\frac{8}{(4x+3)^2} \qquad (ax+b)'$$

$$-\frac{8}{(4x+3)^2} = a \qquad (3+\frac{2}{4x+3})' \downarrow$$

$$(4x+3)^2 = -\frac{8}{a}$$

$$4x+3 = -\sqrt{-\frac{8}{a}}$$ ← нас интересует только часть $4x+3<0$

$$x = \frac{-\sqrt{-\frac{8}{a}}-3}{4}$$

$$-\frac{11}{4}a+b \ge 2\frac{3}{4} \qquad -\frac{3}{4}a+b \le 1$$

$$-\frac{3}{4}a+b-(-\frac{11}{4}a+b) \le 1-2\frac{3}{4}$$

$$2a \le -1\frac{3}{4} \qquad a \le -\frac{7}{8} \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}-3}{4} \le x < -\frac{3}{4}$$

$-\frac{\sqrt{7}-3}{4} > -\frac{11}{4}$, значит прямая, полная прямая, лежит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

касаться участка гиперболы $x \in (-\infty; -\frac{3}{4})$ только на нашем отрезке

$4x+3 = -\sqrt{-\frac{8}{a}}$:

$$3 + \frac{2}{-4\frac{-\sqrt{-\frac{8}{a}}-3}{4}+3} = 3 - \frac{2}{\sqrt{-\frac{8}{a}}} = 3 - \sqrt{-\frac{a}{2}}$$

учет знака a

$$a \cdot \frac{-\sqrt{-\frac{8}{a}}-3}{4} + b = \frac{+\sqrt{-8a}-3a}{4} + b$$

$$3 - \sqrt{-\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{-8a}}{4} - \frac{3a}{4} + b \qquad 3 - \sqrt{-\frac{a}{2}} = \sqrt{-\frac{a}{2}} - \frac{3a}{4} + b$$

$3 - 2\sqrt{-\frac{a}{2}} = -\frac{3a}{4} + b$ — прямые, касающиеся параболы

Тогда параболы, подходящие нам, отвечают условию ~~$3 \le -\frac{3a}{4} + b$~~ $3 - 2\sqrt{-\frac{a}{2}} \le -\frac{3a}{4} + b$

$$\begin{cases} b \le 5 + \frac{11}{4}a \\ b \le 1 + \frac{3}{4}a \end{cases}, \text{ на } \cancel{a \le -\frac{7}{8}}$$

$$\frac{3}{4}a + 3 - 2\sqrt{-\frac{a}{2}} \le b \le \frac{3}{4}a + 1$$

$$2 - 2\sqrt{-\frac{a}{2}} \le 0$$

$$\sqrt{-\frac{a}{2}} \ge 1$$

$a \le -2$, но если $a = -2$, то условие

$4 + 2a + 1 + \frac{3}{4}a \ge b$ приоритетнее условия

$$1 + \frac{3}{4}a \ge b$$

$$\frac{3}{4}a + 3 - 2\sqrt{-\frac{a}{2}} \le b \le \frac{11}{4}a + 5$$

$$\frac{3}{4}a + 3 - 2\sqrt{-\frac{a}{2}} \le \frac{11}{4}a + 5$$

$$-2\sqrt{-\frac{a}{2}} \le 2a + 2$$

$$-\sqrt{-\frac{a}{2}} \le a + 1 \qquad a \le -2 \Rightarrow a+1 \le -1$$

$-a-1=\sqrt{-\frac{a}{2}}$

$a^2+2a+1=-\frac{a}{2}$

$2a^2+5a+2=0$

$2a^2+4a+a+2=0$

$(2a+1)(a+2)=0$

$-2=a=-0,5$, но $a=-2$

Значит $a=-2$ — единственный возможный коэффициент наклона прямой

$\frac{3}{4}a+3-2\sqrt{-\frac{a}{2}}\leq b\leq\frac{11}{4}a+5$

$\frac{11}{4}a+5=-\frac{1}{2}$ $\qquad a=-2$

$\frac{3}{4}a+3-2\sqrt{-\frac{a}{2}}=\frac{3}{4}\cdot(-2)+1=-\frac{1}{2}$

$b=-\frac{1}{2}$

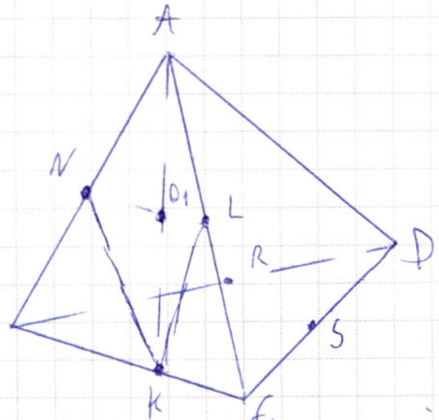
Ответ: $(-2;-\frac{1}{2})$

№ 7

Дано: ~~$AB=1, BD=2, CD=3$~~ $ABCD$ — пирамида, A лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме AD

$AB=1$, $BD=2$, $CD=3$

Найти: $BC=?$ $R_{min}=?$



Решение: N, K, L, R, S — середины сторон пирамиды. A, N, L, K лежат в одной плоскости, но в том же время лежат на одной сфере, значит они лежат на одной окружности, тогда сумма противоположных углов $ANKL$ равно $180°$, но это параллелограмм ($NK \parallel AL$ и

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$LK \parallel AN$, т.к. средн. линии, значит перед нами прямоугольник, $\angle BAC = 90^\circ$

O_1 – центр прямоугольника и центр окружности, описанной около $ANKL$

O_1 – середина NL

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2a+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2a+4\beta)+\sin 2a=-\frac{4}{5}$

$\sin^2(2a+2\beta)-\sin(2a+4\beta)\cancel{+}\sin 2a=1$

$\sin(2a+4\beta)+\sin 2a=-\cos^2(2a+2\beta)$

$\sin(2a+4\beta)+\sin 2a=-\frac{1+\cos(4a+4\beta)}{2}$

$2\sin(2a+4\beta)+2\sin 2a=-1-\cos 2a\cos(2a+4\beta)+\sin 2a\cdot$
$\cdot\sin(2a+4\beta)$

$\sin(2a+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(4a+4\beta)\cos 2a-\sin 2a\cos(4a+4\beta)+\sin 2a=-\frac{4}{5}$

$\sin^2(2a+2\beta)=\frac{1}{5}$

$\frac{1-\cos(4a+4\beta)}{2}=\frac{1}{5}$ $\cos(4a+4\beta)=\frac{3}{5}$

$\sin(4a+4\beta)=\pm\frac{4}{5}=k$

$k\cos 2a-\frac{3}{5}\sin 2a+\sin 2a=-\frac{4}{5}$

$k\cos 2a+\frac{2}{5}\sin 2a=-\frac{4}{5}$

$5k\cos 2a+2\sin 2a=-4$

$5\frac{k}{2}\cos 2a+\sin 2a=-2$

$5\frac{k}{2}\cos^2 a-5\frac{k}{2}\sin^2 a+2\sin a\cos a+2=0$

$(5\frac{k}{2}+2)\cos^2 a-(5\frac{k}{2}-2)\sin^2 a+2\sin a\cos a=0$

$-(5\frac{k}{2}-2)tg^2 a+2tg a+(5\frac{k}{2}+2)=0$

$(5\frac{k}{2}-2)tg^2 a-2tg a-(5\frac{k}{2}+2)=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$$\begin{cases} (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \\ x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \end{cases}$$

$x \geqslant 2y$

$x-2-2y+2=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$t=x-2,\ n=y-1$

$$\begin{cases} t^2+9n^2=25 \\ t-2n=\sqrt{tn} \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \\ (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-2)} \end{cases}$$

$t-2n$

$t^2-4tn+4n^2=tn$

$t^2-5tn+4n^2=0$

$(t-4n)(t-n)=0$

$\left[\begin{array}{l} t=4n \\ t=n \end{array}\right.$ $\quad t=4n:\ 16n^2+9n^2=25$

$n^2=1$

$n=\pm 1$

$n=1:\ t=4$ $\quad n=-1:\ t=-4$

$y=2 \quad x=6$ $\quad y=0 \quad x=-2$

$t=n:$

$n^2+9n^2=25$

$n^2=2,5$

$n=\sqrt{\frac{5}{2}}:\ t=\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\quad n=-\sqrt{\frac{5}{2}}:\ t=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y=1+\sqrt{\frac{5}{2}} \quad x=2+\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\quad y=1-\sqrt{\frac{5}{2}};\ y=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$, но $t-2n \geqslant 0$

$\Rightarrow n \neq -1,$

$n \neq \sqrt{\frac{5}{2}},$

тогда решениями являются только пары $(6;2)$ и

~~$(2+\sqrt{\frac{5}{2}};1+\sqrt{\frac{5}{2}})$~~ $(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}})$

(.

☑ черновик ☐ чистовик Страница № ~~4~~

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [p/4]$

$1 \le x \le 24$ $\quad 1 \le y \le 24$ $\quad f(x/y) < 0$

$f(a) = f(a) + f(1)$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a^2}\right)$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

V

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b = -8x^2 - 30x + 17$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax + b$

$-\frac{11}{4} \le x < -\frac{3}{4} \Rightarrow 4x + 3 < 0$

$(4x+3) \cdot 3 + 2 \ge (4x+3)(ax+b)$

$12x + 11 \ge 4ax^2 + 3ax + b$

$4ax^2 + (3a - 12)x + b - 11 \le 0$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax + b$

$4x + 3 = -\sqrt{-\frac{8}{a}}$

$x = \frac{-\sqrt{-\frac{8}{a}} - 3}{4}$

$3 - \sqrt{-\frac{a}{2}} \le -\sqrt{-\frac{a}{2}} - \frac{3}{4}a + b$

$-\frac{3}{4}a + b \ge 3$

$3 + \frac{2}{4x+3} = 3 - \frac{2}{\sqrt{-\frac{8}{a}}} = 3 - \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{-\frac{2}{a}}} = 3 - \sqrt{-\frac{a}{2}}$

$ax + b = \frac{-\sqrt{-8a} - 3a}{4} + b = -\sqrt{-\frac{a}{2}} - \frac{3}{4}a + b$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2 + 18x = t$

$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$\log_{12}(x^2+18x)$: $x^2+18x>0 \Rightarrow |t| = t$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$\cancel{\log}\ \log_{12}(5^{\log_{12}t} + t) \geq \log_{12}(t^{\log_{12}13})$

$5^{\log_{12}t} = (12^{\log_{12}5})^{\log_{12}t} = 12^{\log_{12}t \cdot \log_{12}5} = (12^{\log_{12}t})^{\log_{12}5} =$

$= t^{\log_{12}5}$

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$(t^{\log_{12}5} + t)' = \cancel{\log_{12}5 \cdot t^{\log_{12}5}}\ \log_{12}5\ t^{\log_{12}5-1} + 1$

$(t^{\log_{12}13})' = \log_{12}13\ t^{\log_{12}13-1}$

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t = 12^a$

$\cancel{a}\quad 5^a + 12^a \geq 13^a$

$(5^a + 12^a)' = \dfrac{5^a}{\ln 5}$

$25 \cdot 5^{a-2} + 144 \cdot 12^{a-2} \geq 169 \cdot 13^{a-2}$

$\dfrac{5^{a+da} - 5^a}{da} =$

$5^{a+da} = \dfrac{5^{da}-1}{da} 5^a$

$(\frac{5}{e} \cdot e^a)' =$

$= (\frac{5}{e})^a \cdot e^a =$

$= 5^a$