МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) =$

$= 2(\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta) + \sin\beta\cos\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)) =$

$= \frac{\sin 2\alpha}{2} + \sin 2\alpha + \sin 2\beta$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\boxed{f(x) < f(y)}$

$\cos 2\beta = 1 \quad = 2\cos^2\beta - 1$

$f(y) + f(x/y) = f(x)$

$2(\cos^2\beta-1)(\cos\beta+1) = 0$

$\cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$

$\beta = \pi k + \pi$

316 −204

2016

$12^2+5^2 \geq 13^2$

$\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} = 2\,tg\,\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$-\frac{4}{4} = -1$

$5\cdot 117$

$5\cdot 9\cdot 13$

$\cos 2\alpha = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow$

$y^2 + 36x^2 - 12xy = xy - 6x - y + 6$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1\pm\frac{4}{\sqrt{17}}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin^2\alpha = \mp\frac{2}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2}$

$\frac{4}{3x-2} - 2 \geq ax+b \geq$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$tg^2\alpha = \left[\begin{array}{l} \frac{1+\frac{4}{\sqrt{17}}}{1-\frac{4}{\sqrt{17}}} = 17\cdot\left(\frac{33}{17}+\frac{8\sqrt{17}}{17}\right) = 33+8\sqrt{17} \\ \frac{1-\frac{4}{\sqrt{17}}}{1+\frac{4}{\sqrt{17}}} = 17\cdot\frac{33}{17} - \frac{8\sqrt{17}}{17}) = 33-8\sqrt{17} \end{array}\right.$

$y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6x)}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\cancel{9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 0}$

$a^{\log_b c} = b^{\log_b a\cdot\log_b c} = c^{\log_b a} = b^{\log_b c\cdot\log_b a}$

$y^{\log_5 12} + y - 13^{\log_5 y} \geq 0$

$\cancel{5^{\log_5 y\cdot(\log_5 12-1)}} \quad 13^{\log_5 y}$

$12^{\log_5 y}\cdot\frac{6}{y} \quad 5^{\log_5 y} \quad 1$

$y^{\log_5 12} + y \geq y^{\log_5 13}$

$y \geq y^{\log_5 12}\left(y^{\log_5\frac{13}{12}} - 1\right)$

3·6

4·7

$y\left(y^{\log_5\frac{13}{5}} - y^{\log_5\frac{12}{5}} - 1\right) \leq 0$

$y^{\log_5 12 - 1} + 1 \geq y^{\log_5 13 - 1}$

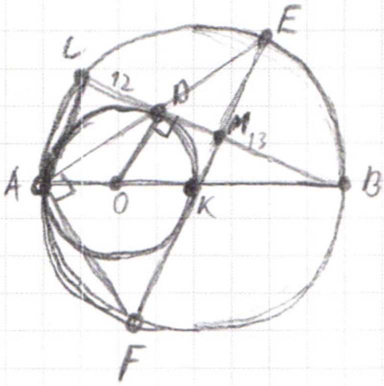
y

$y^{\log_5\frac{12}{5}} + 1 \geq y^{\log_5\frac{13}{5}}$

$y^{\log_5\frac{12}{5}}\left(y^{\log_5\frac{13}{12}} - 1\right) \leq 1$

$65 \times 25 = 325$, 130, 1625

$406{,}25$



$\frac{2R - r}{2R} = \frac{13}{25}$

$\frac{r}{2R} = \frac{12}{25}$

$AE = 12\sqrt{26} + \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{325}{\sqrt{26}} = \frac{10R}{\sqrt{26}}$

$R = \frac{25}{24} r$

$260 + 52 = 312$

$BK \cdot BA = 13^2 = \frac{1}{25} \cdot BA^2 \Rightarrow BA = 13 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{R = 32{,}5}$

$\boxed{r = \frac{24}{25} R = 24 \cdot \frac{13 \cdot 5}{2 \cdot 25} = 31{,}2}$

$13 \times 12 = 156$; $3{,}12$; 169, 25, 144

$DM = 12 \cdot \frac{DE}{DA} = 12 \cdot \frac{13}{\sqrt{26}} : 12\sqrt{26} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ M - середина СВ

$65^2 - 25^2 = 5^2 \cdot (13^2 - 5^2) = 5^2 \cdot 18 \cdot 8 = 5^2 \cdot 12^2$

2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2
26	3
27	0
28	1

$\boxed{AC = 60}$

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$N_0 = 9$

$N_1 = 8$

$N_2 = 3$

$N_3 = 2$

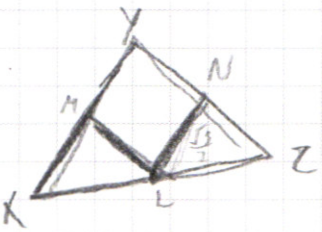
$N_4 = 2$

$N_5 = 1$

$\frac{10R^2}{26} = \frac{10 \cdot 65^2}{4 \cdot 26}$

$(x-5)(x+3)$

$9 \cdot 16 + 8 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 144 + 64 + 15 + 6 + 2 = 150 + 64 + 17 = \boxed{231}$



$12^2 + 5^2 - 13^2 \geq 0$

$z \leq 2$

$\log_5(26x - x^2) \leq 2 \Rightarrow 26x - x^2 \leq 25$

$\Rightarrow (x-25)(x-1) \geq 0$

$x(x-26) < 0 \Rightarrow x \in (0; 26)$

Ответ: $\boxed{x \in (0;1] \cup [25;26)}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) =$

$= -\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(2\beta)=1 \Rightarrow 2\beta = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos(2\alpha)=\frac{4}{\sqrt{17}} = 2\cos^2\alpha-1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow \\ \cos(2\alpha) = -\frac{4}{17} = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow\end{array}\right.$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4} = 33+8\sqrt{17} \Rightarrow tg\alpha = \pm\sqrt{33+8\sqrt{17}} \Rightarrow tg\alpha = \pm(\sqrt{17}+4)$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4} = 33-8\sqrt{17} \Rightarrow tg\alpha = \pm\sqrt{33-8\sqrt{17}} \Rightarrow tg\alpha = \pm(\sqrt{17}-4)$

Ответ: $tg\alpha \in \{\sqrt{17}+4;\ \sqrt{17}-4;\ -\sqrt{17}+4;\ -\sqrt{17}-4\}$.

3. $\log_5(26x-x^2)$ определён $\Rightarrow 26x-x^2>0 \Rightarrow |x^2-26x| = 26x-x^2$

$\Rightarrow x(x-26)<0 \Rightarrow x\in(0;26)$

$y := \log_5(26x-x^2)$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x = 12^{\log_5(26x-x^2)}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12^{y}+26x-x^2-13^y = 12^y-13^y+5^{\log_5(26x-x^2)} = 12^y+5^y-13^y \geq 0$

При $y=2$, $12^y+5^y-13^y=0$, т.к. $144+25-169=0$

При ~~изменении~~ увеличении y на Δy 13^y ~~изменяется~~ возрастает в $13^{\Delta y}$ раз, а 12^y+5^y в менее чем $13^{\Delta y}$ раз. (т.к. $12^{y+\Delta y}+5^{y+\Delta y} < 12^{\Delta y}(12^y+5^y) < 13^{\Delta y}(12^y+5^y)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ функция $12^y+5^y-13^y$ строго убывает по y $\Rightarrow 12^y+5^y-13^y\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y\leq 2 \Rightarrow \log_5(26x-x^2)\leq 2 \Rightarrow 26x-x^2\leq 25 \Rightarrow (x-25)(x-1)\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 25 \\ x\leq 1\end{array}\right.$

Итого: $\begin{cases} x\in(0;26) \\ \left[\begin{array}{l} x\geq 25 \\ x\leq 1\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

4. Пусть R и r – радиусы Ω и ω соответственно.

K – вторая точка пересечения отрезка AB с ω

O – центр ω

M – точка пересечения отрезков EF и CB

AB – диаметр Ω => $\angle ACB = 90^\circ$; D – точка кас. с ω => $OD \perp CB$ => $OD \parallel AC$ =>

=> $\triangle ACB \sim \triangle ODB$ => $\frac{AO}{OB} = \frac{r}{2R-r} = \frac{CD}{DB} = \frac{12}{13}$ => $25r = 24R$

BD – кас. к ω => $BD^2 = 169 = BK \cdot AB = (2R-2r) \cdot 2R = \frac{2}{25}R \cdot 2R$ => $R = 32,5$ =>

=> $r = \frac{24}{25}R = 31,2$

$AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = 12\sqrt{26}$

AE и CB – хорды Ω => $AD \cdot DE = CD \cdot DB$ => $DE = \frac{CD \cdot DB}{AD} = \frac{13}{\sqrt{26}}$

$EM \perp CB$ => $EM \parallel AC$ => $\triangle ACD \sim \triangle EMD$ => $DM = CD \cdot \frac{DE}{DA} = 12 \cdot \frac{13}{\sqrt{26}} \cdot \frac{1}{12\sqrt{26}} = \frac{1}{2}$ =>

=> $CM = 12,5 = \frac{1}{2}CB$ => EF – сер. пер. к CB => EF – диаметр Ω => $\angle EAF = 90^\circ$ =>

=> $\angle AFE = 90^\circ - \angle AEF = 90^\circ - \angle CAE = \angle CDA = \arccos\frac{CD}{AD} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

$\angle AFE = \angle ADC$ и $\angle EAF = \angle DCA$ => $\triangle ACD \sim \triangle EAF$ => $S_{AEF} = S_{ACD} \cdot \left(\frac{EF}{AD}\right)^2 =$

$= \frac{CD \cdot AC}{2} \cdot \left(\frac{EF}{AD}\right)^2 = \frac{12 \cdot 60}{2} \cdot \left(\frac{2R}{12\sqrt{26}}\right)^2 = \frac{\cancel{12} \cdot \cancel{60}^{5}}{\cancel{2}} \cdot \frac{65 \cdot \cancel{65}^{25}}{2 \cdot \cancel{12^2}^{2} \cdot \cancel{26}_{2}} = 65 \cdot \frac{25}{4} = 406,25$

Ответ: $R = 32,5$; $r = 31,2$; $\angle AFE = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$; $S_{AEF} = 406,25$

5. $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ (т.к. $f(x) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$ => $f(x) < f(y) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$)

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$; $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$; $f(4) = f(2) + f(2) = 0$; $f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$; $f(6) = f(2) + f(3) = 0$; $f(7) =$

$= \left[\frac{7}{3}\right] = 1$; $f(8) = f(4) + f(2) = 0$; $f(9) = f(3) + f(3) = 0$; $f(10) = f(2) + f(5) = 1$;

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$; $f(12) = f(6) + f(2) = 0$; $f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$; $f(14) = f(2) + f(7) = 1$; $f(15) =$

$= f(3) + f(5) = 1$; $f(16) = f(8) + f(2) = 0$; $f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$; $f(18) = f(9) + f(2) = 0$; $f(19) =$

$= \left[\frac{19}{4}\right] = 4$; $f(20) = f(4) + f(5) = 1$; $f(21) = f(3) + f(7) = 1$; $f(22) = f(2) + f(11) = 2$;

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$; $f(24) = f(4) + f(6) = 0$; $f(25) = f(5) + f(5) = 0$; $f(26) = f(2) + f(13) = 3$;

$f(27) = f(9) + f(3) = 0$; $f(28) = f(7) + f(4) = 1$

N_i – количество таких натуральных x, что $x \in [4, 28]$ и $f(x) = i$ => $N_0 = 9$; $N_1 = 8$; $N_2 = 3$; $N_3 = 2$; $N_4 = 2$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\cancel{\begin{cases} y+6x = \sqrt{(y+6)(x+1)} \\ (9x^2-18x-9)+4y^2-12y-36) = 0 \end{cases}}$

$N_5 = 1$; N_i (при $i>5$) $= 0$

Тогда искомое количество пар равно $N_0(N_1+N_2+N_3+N_4+N_5)+N_1(N_2+N_3+N_4+N_5)+N_2(N_3+N_4+N_5)+$ $+N_3(N_4+N_5)+N_4\cdot N_5 =$ (при таком подсчёте для каждой искомой пары $(x;y)$ фиксируем x и перебираем все подходящие y) $= 9\cdot16+8\cdot8+3\cdot5+2\cdot3+2\cdot1 =$

$= 144+64+15+6+2 = 231$

Ответ: 231.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА