МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. ① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; ② $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

Рассмотрим ②:

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\underline{\sin 2\alpha}\cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \underline{\sin 2\alpha} = -\frac{8}{17}$$

$$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{8}{17}$$

$$\sin 2\alpha \cdot 2\underline{\cos^2 2\beta} + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta\,\underline{\cos 2\beta} = -\frac{8}{17}$$

$$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{8}{17}$$

$$2\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17}$$

Из ①: $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда

$$2\cos 2\beta\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}.$$

$$2\beta = \pm\arccos\frac{4\sqrt{17}}{17} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cancel{2\beta = \pi - \arccos 4)}$$

$$\cancel{\beta = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{4\sqrt{17}}{17} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}}.$$

~~Данная серия задаёт четыре точки на тригонометр. окружности. Пусть для удобства a = cos~~

$$2\beta = \pm\arccos\frac{4\sqrt{17}}{17} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\ (*)$$

Пусть для удобства $a = \cos 2\beta$, $b = \sin 2\beta$, так как, имея серию $(*)$, эти значения уже можно определить. $|a| \le 1$, $|b| \le 1$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Рассмотрим теперь (1):

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

Т.к. $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cos 2\beta + \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

$a=\cos 2\beta$, $b = \sin 2\beta$, пусть также $t=\operatorname{tg}\alpha$;
$|a|\le 1$, $|b|\le 1$.

$$\frac{2t}{1+t^2}a + \frac{1-t^2}{1+t^2}b = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

$$\frac{2at+b-bt^2}{1+t^2} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big| + \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{(2at+b-bt^2)\sqrt{17} + 1+t^2}{(1+t^2)\sqrt{17}} = 0$$

$$\begin{cases} 2a\sqrt{17}\,t + b\sqrt{17} - b\sqrt{17}\,t^2 + 1 + t^2 = 0 \\ (1+t^2)\sqrt{17} \ne 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2(1-b\sqrt{17}) + 2a\sqrt{17}\,t + 1 + b\sqrt{17} = 0 \ (**) \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$a=\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} \Rightarrow b = \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

При $b \ne +\frac{1}{\sqrt{17}}$ (т.е. $b=-\frac{1}{\sqrt{17}}$) $\Rightarrow 1-b\sqrt{17}\ne 0 \Rightarrow$ ур-ние $(**)$ - квадратное.
Решим его

$$(**)\ D_1 = (a\sqrt{17})^2 - (1+b\sqrt{17})(1-b\sqrt{17}) =$$
$$= 17a^2 - (1-17b^2) = 17a^2+17b^2-1.$$

Т.к. $a=\cos 2\beta$, а $b=\sin 2\beta$, то $17a^2+17b^2 = 17 \Rightarrow$
$\Rightarrow D_1 = 17-1 = 16 \Rightarrow \sqrt{D_1} = 4$

$$t = \frac{-a\sqrt{17}\pm 4}{1-b\sqrt{17}};\quad a=\frac{4\sqrt{17}}{17},\quad b = -\sqrt{\frac{1}{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$t = \frac{-\frac{4\sqrt{17}}{17}\cdot\sqrt{17}\pm 4}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\sqrt{17}} = \frac{-4\pm 4}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-4 \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $b = +\frac{1}{\sqrt{17}}$ ур-ние (**) — линейное.

$0 + 2a\sqrt{17}t + 1 + b\sqrt{17} = 0.$

$$t = -\frac{1 + b\sqrt{17}}{2a\sqrt{17}} = -\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sqrt{17}}{2\frac{4\sqrt{17}}{17}\cdot\sqrt{17}} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Имеем $t = 0$, $t = -4$, $t = -\frac{1}{4}$, то есть

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -4 \\ tg\alpha = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ответ: $0; -\frac{1}{4}; -4.$

№3. $$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}.$$

ОДЗ: $x^2 + 6x \geq 0.$

$x(x+6) \geq 0.$

$$\left[\begin{array}{l} x \leq -6 \\ x \geq 0 \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ $x^2 + 6x \geq 0 \Rightarrow |x^2+6x| = x^2 + 6x.$

Пусть $a = x^2 + 6x$, $a \geq 0.$

(*) $3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5} (\geq 0)$ ~~$\Leftrightarrow 3^{\log_4 a} \geq a^{\log_4 a} - 1$~~

~~Обе части неотрицательны, наложим применим к ним функцию $f(x) = \log_4 x$. Т.к. $f(x)$ — монотонная, это действие не повлияет~~

на) множество решений).

Пусть $q = \log_4 a$. Тогда $a = 4^{\log_4 a} = 4^q$.

Преобразуем нер-во (*):

$$3^q + 4^q \geq (4^q)^{\log_4 5}$$

$$3^q + 4^q \geq (4^{\log_4 5})^q$$

$$3^q + 4^q \geq 5^q$$

Равенство выполнятся при $q = 2$.

$y = 3^q$ — монотонная, $y = 4^q$ — монотонная и $y = 5^q$ — монотонная. Тогда $3^q + 4^q - 5^q$ — монотонная.

При $q \leq 2$ $\quad 3^q + 4^q \geq 5^q$, при $q > 2$ $\quad 3^q + 4^q < 5^q$.

$q = \log_4 a \Rightarrow \log_4 a \leq 2$

$$\log_4 a \leq \log_4 16.$$

$$(0 <) a \leq 16.$$

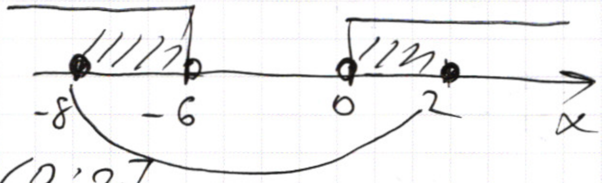
$$(0 <) x^2 + 6x \leq 16$$

$x^2 + 6x - 16 \leq 0.$

$(x + 8)(x - 2) \leq 0$

$x \in [-8; 2]$

учтём ОДЗ:



$x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x		$f(x)$
3		0
4		0
5	$\frac{5}{4}$	1
6	$2\cdot 3$	0
7	$\frac{7}{4}$	1
8	2^3	0
9	3^2	0
10	$2\cdot 5$	1
11	$\frac{11}{4}$	2
12	$3\cdot 4$	0
13		3
14	$2\cdot 7$	1
15	$3\cdot 5$	1
16	2^4	0
17	$\frac{17}{4}$	4
18	$3^2\cdot 2$	0
19	$\frac{19}{4}$	4
20	$5\cdot 2^2$	1
21	$3\cdot 7$	1
22	$2\cdot 11$	2
23	23	5 $\times 7\cdot 10$
24	$3\cdot 2^3$	0
25	5^2	2
26	$2\cdot 13$	3
27	3^3	0

10 − 0
7 − 1
3 − 2
2 − 3
2 − 4
1 − 5

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0.$

$f(x) < f(y)$

$10 \cdot \boxed{15}$

$\frac{1}{3}$

5

206 + 221 = 229

$8x^2 - 34x + 30 = 0.$

$4x^2 - 17x + 15 = 0.$

$D = 289 - 16\cdot 15 =$

$= 289 - 240 = 49.$

$x = \frac{17 \pm 7}{8} =$

$= \left[\begin{array}{l} \frac{10}{8} \\ \frac{24}{8} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \frac{5}{2} \\ 3 \end{array}$

225 + 15 = 240

1000
49
140
259

$-\frac{10}{8} \quad -\frac{34}{8}$

$ax + b \geq 0$

$\frac{5}{2}$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$2 + \frac{1}{2(x-1)} \quad \boxed{2(ax+b) \geq 8x^2 - 34x + 30}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№5. Исследуем ф-цию f. Здесь и далее p_i — простое число;

$D(f) = \mathbb{Q}$; $f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$;

1) $f(1) = f(1\cdot 1) = f(1\cdot 1\cdot 1 \cdot\ldots\cdot 1) = f(1) + f(1) + \ldots + f(1)$

т.е. $f(1) = 0$. Также $f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$.

2) Для $\forall x \in \mathbb{N}$ выполняется $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_n^{\alpha_n}$

(основная теорема арифметики)

$$f(x) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}) = f(\underbrace{p_1 \cdot p_1 \cdots p_1}_{\alpha_1}) + f(\underbrace{p_2 \cdot p_2 \cdots p_2}_{\alpha_2}) + \ldots +$$

$$+ f(\underbrace{p_n \cdot p_n \cdot \ldots \cdot p_n}_{\alpha_n}) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots + \alpha_n f(p_n)$$

$$f(x) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]$$

$\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ — степень числа p_i (здесь и далее).

3) $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$$f(p) = f\left(\frac{1}{p}\cdot p^2\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p^2) = f\left(\frac{1}{p}\right) + 2f(p) = f\left(\frac{1}{p}\right) + 2\left[\frac{p}{4}\right]$$

$$\left[\frac{p}{4}\right] = f\left(\frac{1}{p}\right) + 2\left[\frac{p}{4}\right] \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = -\left[\frac{p}{4}\right]$$

4) ~~$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) =$~~ $x \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}}\right) = f\left(\left(\frac{1}{p_1}\right)^{\alpha_1}\right) + f\left(\left(\frac{1}{p_2}\right)^{\alpha_2}\right) +$$

$$+ \ldots + f\left(\left(\frac{1}{p_n}\right)^{\alpha_n}\right) = \alpha_1 f\left(\frac{1}{p_1}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{1}{p_2}\right) + \ldots + \alpha_n f\left(\frac{1}{p_n}\right)$$

$$= -\alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] - \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right] - \ldots - \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right] =$$

$$= -\left(\alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]\right) =$$

$$= -f(x) \text{ (из 2)}.$$

5) $a, b \in \mathbb{N}$.

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b) \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) < 0 \Leftrightarrow f(a) - f(b) < 0$$

$$f(a) < f(b)$$

Вычислим значения $f(x)$ для $x \in [3; 23]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x	Разложение x на прост. мн.	f(x)
3	3	0
4	2·2	0
5	5	1
6	2·3	0
7	7	1
8	2·2·2	0
9	3·3	0
10	2·5	1
11	11	2
12	2·2·3	0
13	13	3
14	2·7	1
15	3·5	1
16	2·2·2·2	0
17	17	4
18	2·~~3~~·3	0
19	19	4
20	2·2·5	1
21	3·7	1
22	2·11	2
23	23	5
24	2·2·2·3	0
25	5·5	2
26	2·13	3
27	3·3·3	0

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

На $[3; 27]$ все мн-ве значений $f(x)$ $(x \in \mathbb{N})$

10 значений равных „0",

7 — „1",

3 — „2",

2 — „3",

2 — „4",

1 — „5".

б) $f\left(\frac{a}{b}\right) < 0$

$f(a) - f(b) < 0.$

$f(a) < f(b).$

Тогда на этом промежутке:

1) $f(a) = 0$, $f(b) \neq 0$

$10 \cdot 15 = 150$ — пар. a и b

2) $f(a) = 1$, $f(b) \in \{2; 3; 4; 5\}$

$7 \cdot 8 = 56$ — пар a и b

3) $f(a) = 2$, $f(b) \in \{3; 4; 5\}$

$3 \cdot 5 = 15$ — пар a и b

4) $f(a) = 3$, $f(b) \in \{4; 5\}$

$2 \cdot 3 = 6$ — пар a и b.

5) $f(a) = 4$, $f(b) = 5$.

$2 \cdot 1 = 2$ — пары a и b.

Итого

$150 + 56 + 15 + 6 + 2 = 229$ пар.

x и y: $x, y \in [3; 27]$, $x, y \in \mathbb{N}$ и $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

Ответ: 229 пар.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

$4x^2-15xy+9y^2+2x+3y=2$

$3\alpha=4\beta$

$3\alpha=9\beta$

$\alpha=\frac{1}{3}\beta.$

$3\cdot\frac{4}{3}\beta=9\beta.$

$4\beta=9\beta.$

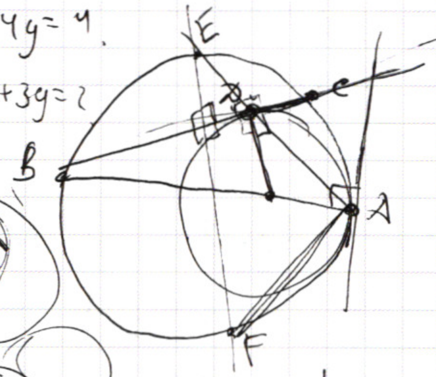
$R=?$

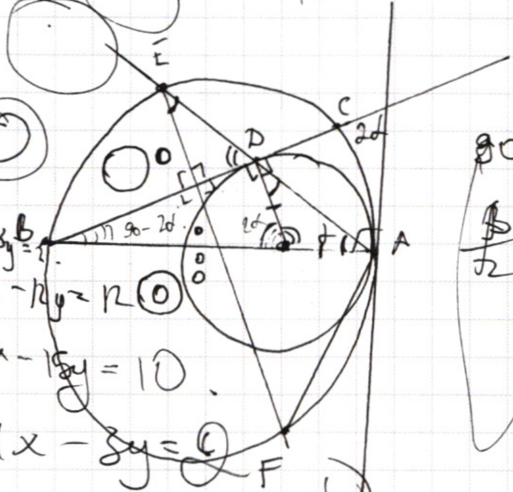
$\angle AFE$

$S_{\triangle DEF}$

$CD=$ ___ $BD=$ ___

$\boxed{13}$





$$\begin{cases} 4x^2-15xy+9y^2+2x+3y=2 \\ 9x^2-0+9y^2-18x-12y=12 \end{cases}$$

$5x^2+15xy-20x-15y=10.$

$x^2+3xy-4x-3y=2$

$x^2+(3y-4)x-3y-2=0$

$D=9y^2-24y+16+12y+8=$

$=9y^2-12y+16+8=$

$=(3y+4)^2+8$

$\frac{3}{7}$

$=9y^2-12y+24=$

$=3(3y^2-4y+8)=$

$=$

$90°=\alpha+\frac{\beta}{2}$

$\frac{\beta}{2}=90°-\alpha.$ $180°-2\alpha.$

$90-180°+\beta=$

$=90-180+90-\alpha=$

$=\alpha$

$180-(90-\alpha)$

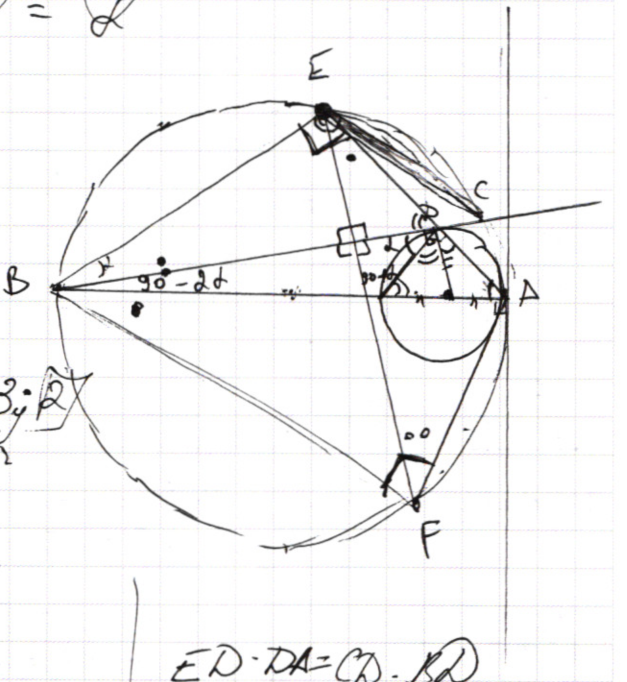
$90+\alpha$

$180-2\alpha-90$

$90-2\alpha$

$12=2\cdot3\sqrt{2}$

$(2\sqrt{2})$



$ED\cdot DA=CD\cdot BD.$

$\cancel{12y^2-12xy+4x^2-24x-y=8}$

$18y^2-30xy+8x^2+4x+6y=4$

$3y^2+0+3x^2-6x-4y=4.$

$15y^2-30xy+5x^2+10x+10y=0$

$3y^2-6xy+x^2+2x+2y=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

~~ОДЗ~~: $\begin{cases} 3y - 2x \geq 0. \\ 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \quad / \cdot 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y - 2x \geq 0. \\ 9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y = 2 \quad (1) \\ 9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y = 12. \quad (2) \end{cases}$

$(2) - (1): \; 5x^2 + 15xy - 20x - 15y = 10 \quad /:5$

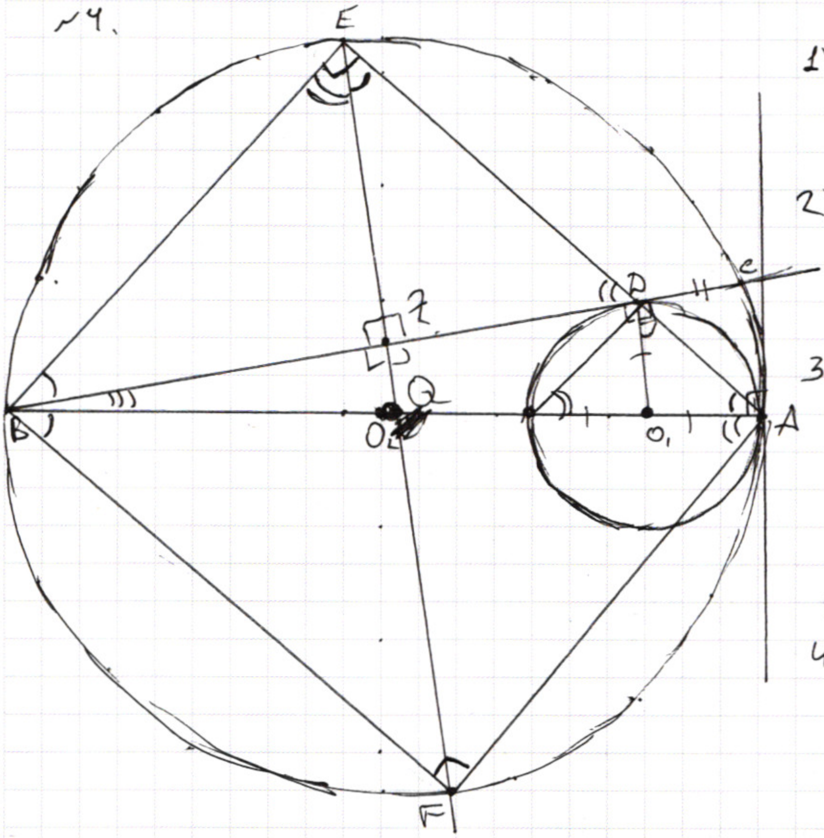
$x^2 + 3xy - 4x - 3y = 2$

$x^2 + (3y - 4)x - 3y - 2 = 0.$

$D = (3y-4)^2 + 4(3y+2) = 9y^2 - 24y + 16 + 12y + 8 =$

$= 9y^2 - 12y + 24 = 3(3y^2 - 4y + 8) > 0$ при $\forall y \in \mathbb{R}$.

№4.



1) Пусть $\omega(O_1; r)$, $\Omega(O_2; R)$

2) Пусть $\angle O_1AD = \alpha$.
$\triangle AO_1D$ – р/б $\Rightarrow \angle O_1DA = \alpha$.

3) $O_1D \perp BC$ (BC – касат.)
$EF \perp BC \Rightarrow O_1D \parallel EF \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle FEA = \angle O_1DA$
(секущая AE)

4) $\angle DO_1B$ – внешний для р/б $\triangle DO_1A \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DO_1B = 2\alpha$.
Тогда $\angle DBO_1 = 90° - 2\alpha$
(из $\triangle DO_1B$)

5) CB и EA – хорды, $CB \cap EA = D$.
$CD \cdot DB = ED \cdot DA$.

6) $DO_1 \parallel EO_2 \Rightarrow \triangle EO_2A \sim \triangle DO_1A$.
$\frac{AD}{AE} = \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{DO_1}{EO_2}$, где $Q = EF \cap AB$.

7) $\angle AFB$ и $\angle BEF$ – вписанные, опираются на $\cup BF$. При этом $\angle BEA = 90°$ (BA – диаметр),
$\angle BDE = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$ (две дуги на чертеже) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EBD = \alpha \Rightarrow$ в $\triangle BZE$ (прямоуг.) $\angle BEZ = 90° - \alpha$.
($Z = EF \cap BC$) $\angle FAB = \angle BEF = 90° - \alpha$.

Тогда $\angle EAF = 90° - \alpha + \alpha = 90° \Rightarrow EF$ – диаметр.
$Q = O_2 \Rightarrow \alpha = 45°$.

8) $\angle EFA = \angle ABE$ (на $\cup EA$) $\Rightarrow \boxed{\angle EFA = \alpha + 90° - 2\alpha = 45°}$.

9) Из подобия $\triangle EO_2A$ и $\triangle DO_1A$ получим $\frac{R}{r} =$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{R}{r} = \frac{DA}{AE} = \frac{R}{r}; \quad DA = r\sqrt{2}. \quad AE = r\sqrt{2} + AD.$$

$$AD \cdot DA = CD \cdot DB.$$

$$AD \cdot r\sqrt{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{13}{2} = \frac{65}{4}.$$

$$AD = \frac{65}{4r\sqrt{2}}.$$

$$\frac{R}{r} = \frac{r\sqrt{2}}{\frac{65}{4r\sqrt{2}} + r\sqrt{2}} \Rightarrow R\left(\frac{65+8r}{4r\sqrt{2}}\right) = r^2\sqrt{2}.$$

$$R(65+8r) = 8r^3$$

$$AE = R\sqrt{2} \qquad R\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2} = CD \cdot DB = \frac{65}{4}$$

$$AD = r\sqrt{2} \qquad R \cdot r = \frac{65}{8}. \Rightarrow R = \frac{65}{8r}$$

$$\frac{65}{8r}(65+8r) = 8r^3$$

$$\frac{65^2}{8r} \cdot 65 = 8r^3$$

$$65^3 = 64r^3$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$4x^2-12xy+9y^2+2x+3y=2$.

$3x^2-0+3y^2-6x-4y=4$

$$\begin{cases} 8x^2-30xy+18y^2+4x+6y=4 \\ 3x^2-0xy+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

$21=3\cdot 7$

$\sqrt{21\cdot 11}$

$5x^2-30xy+15y^2+10x+10y=0.$

$x^2-6xy+3y^2+2x+2y=0.$

$x^2+2(1-3y)x+3y^2+2y=0.$

$D_1=1-6y+9y^2-3y^2-2y=$

$=6y^2-8y+1$

$8x+6y\le 8x^2-34x+30.$

$f(3)=f(\frac{1}{3})+2f(3)=0=)$

Для $\forall p$ $\quad f(p)=[\frac{p}{4}]$

и $f(p)=f(\frac{1}{p}\cdot p^2)=f(\frac{1}{p})+2[\frac{p}{4}]$

$f(\frac{1}{p})+2[\frac{p}{4}]=[\frac{p}{4}]$

$f(\frac{1}{p})=-[\frac{p}{4}]\quad=-f(p)$

$D(f) = \mathbb{Q}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, p — простое число.

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

$\boxed{f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0}$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(abc) = f(a) + f(bc) = \boxed{f(a) + f(b) + f(c)}$

$f(2p) = f(p) + f(2) = \left[\frac{p}{4}\right] + 0$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$\forall x \in \mathbb{Z}: x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots$

$f(x) = \alpha_1 \cdot \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots$

$f(x) \geq 0$ для $\forall x \in \mathbb{Z}$.

$f\left(\frac{a}{b}\right) = \underset{\geq 0}{f(a)} + \underset{< 0}{f\left(\frac{1}{b}\right)}$

$f\left(\frac{1}{b}\right) = f\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{1}{p_2^{\alpha_2}} \cdot \ldots\right) = f\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\right) + f\left(\frac{1}{p_2^{\alpha_2}}\right) + \ldots =$

$= \alpha_1 \cdot \boxed{f\left(\frac{1}{p}\right)} + \alpha_2 \cdot f\left(\frac{1}{p_2}\right) + \ldots =$

$=$

$f(4) = f(2^2) = 2f(2) = 0$

$f(4) = f\left(\frac{1}{2} \cdot 8\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(8) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f(6) = f(3 \cdot 2) = f(3) + f(2) = 0$

$f(6) = f\left(\frac{1}{3} \cdot 18\right) =$

$f(a) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots$

$f(a) = \alpha_1 [p_1] + \alpha_2 [p_2] + \ldots$

$f(a) = f\left(\frac{1}{a} \cdot a^2\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) + \boxed{2f(a)}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4 a} \cancel{+} a \geq \boxed{a^{\log_4 5}}$

$3^{\log_4 a} - a^{\log_4 5} \geq 0 - \boxed{a}$

$\cancel{3^{\log_4 a} - a^{\log_4 5}}$

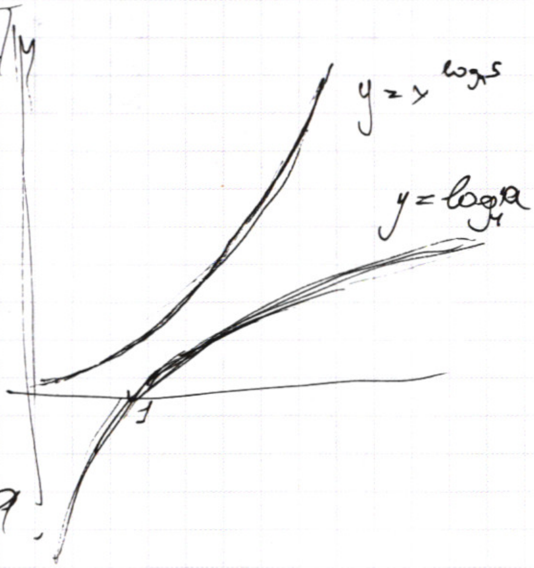
$3^{\log_4 a} \geq (a^{\log_4 5 - 1} - 1)\cancel{\log_4} a$

$3^{\log_4 a} \geq (a^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1)\, a$

$\log_4 a \log_4 3 \geq \log_4 a + \log_4(a^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1)$

$\cancel{\log_4 a(\log_4 3 - 1) \geq \log_4(a^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1)}$

$3^{\boxed{\log_4 a}} + a \geq a^{\log_4 5}$



$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$

$\cancel{3^{\log_4 a} + a - a^{\log_4 5} = 0}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$a(e^x)' =$

$3^{\log_4 a}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$

$\log_4 a = \cancel{q}$

$4^q = a$

$3^q + 4^q \geq (4^q)^{\log_4 5}$

$\boxed{3^q} + \boxed{4^q} \geq \boxed{5^q}$

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$3^3 + 4^3 < 6^3$

$\sqrt{x} - \cancel{x}^2 = 0.$

$\frac{1}{x} - x$

$\frac{1 - x^2}{x}$

$(3^q + 4^q)' = \boxed{3^q \ln 3 + 4^q \ln 4 - 5^q \ln 5}$

-16

-6

$-8 \quad 2$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y < \cancel{q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = \cancel{q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y = 2 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

$(\sqrt{3}x)^2$

$6x = 2 \cdot \sqrt{3} (\sqrt{3}x) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$4y = 2 \cdot (\sqrt{3}y) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$(x^2 - 2x + 1)$

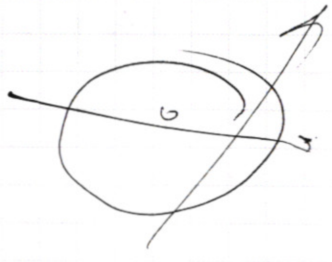
$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4.$

$3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y + \frac{4}{3} - 3 - \frac{1}{3} = 4.$

$3(x - 1)^2 + (y\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = 7\frac{1}{3}$

$3(x-1)^2 + 3(y - \frac{2}{3})^2 = \frac{22}{3}$

$(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{22}{9}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha = tg\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)$$

$$\sin\alpha = \boxed{\frac{1-\cos\alpha}{tg\frac{\alpha}{2}}}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha) = 1-\cos\alpha$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2} - 1 = -\cos\alpha\,(tg^2\frac{\alpha}{2}+1)$$

$$\cos\alpha = \frac{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1+tg^2\frac{\pi}{6}}{1-tg^2\frac{\pi}{6}} = 1\cdot\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1\cdot\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} =$$

№2. $$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

$$3x^2+3y^2-6x-4y=4.$$

$$\boxed{3(x^2-2x)+(3y^2-4y)=4}$$

$$\boxed{3y-2x\geq 0}.$$

$$9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2.$$

$$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2.$$

$$\begin{cases} 18y^2-30xy+8x^2+4x+6y=4. \\ 3x^2+ \quad +3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

$$18y^2-30xy+8x^2+4x+6y = 3x^2+3y^2-6x-4y.$$

$$15y^2-30xy+5x^2+10(x+y) = 0.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5x^2-30xy+15y^2+10(x+y)=0.$

$x^2-6xy+3y^2+2x+2y=0.$

$x^2+(2-6y)x+3y^2+2y=0.$

$D_1=(1-3y)^2-3y^2-2y=$

$=1-6y+9y^2-3y^2-2y=$

$=6y^2-8y+1$

$3y^2+(2-6x)y+x^2+2x=0.$

$D_1=1-6x+9x^2-3x^2-6x=$

$=9x^2-12x+1$

$(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2+1$

$+3 \quad -3.$

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x \geq 0$ $\qquad 3^{\log_4 a} \geq (a^{\log_4 a-1}-1)a$

$x(x+6) \geq 0.$

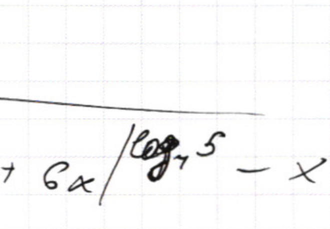
ОДЗ. $\left[\begin{array}{l} x \leq -6 \\ x \geq 0 \end{array}\right.$

$3^{\log_4 a}+a \geq |a|^{\log_4 5}$

$\underbrace{\log_4 a}\cdot\log_4 3+\underbrace{\log_4 a} \geq \log_4 5\,\underbrace{\log_4 a}_{t}.$

$t\log_4 3+t \geq t\log_4 5.$

$\log_4 3+1 \geq \log_4 5$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

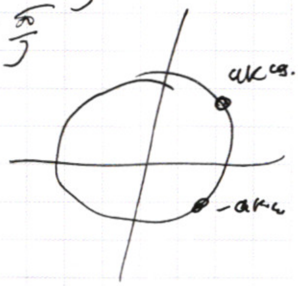
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\boxed{\sin(\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}}$. $\frac{13}{17}$ $\frac{16}{17}$ $\frac{\pi}{3}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$. $\alpha-\frac{\pi}{3}$

$\operatorname{tg}\alpha-?$ $\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)=\frac{16}{17}$



$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~4 sin α cos β sin β cos α +~~

$2\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\beta-1)+2(2\cos^2\alpha-1)\sin\beta\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\beta-1)+(2\cos^2\alpha-1)\sin\beta\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$.

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$.

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta=-\frac{8}{17}$.

$\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta+2\cos 2\alpha\cos 2\beta\sin 2\beta=-\frac{8}{17}$.

$(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta)\cos 2\beta=-\frac{4}{17}$.

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{17}$.

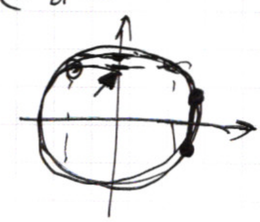
$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{17}$.

$\cos 2\beta=\frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{4}{17}}=\pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{17}}$ $\frac{4}{\sqrt{17}}\approx 0{,}9$

$\left[\begin{array}{l}2\beta=\arccos\frac{4\sqrt{17}}{17}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\\ 2\beta=-\arccos\frac{4\sqrt{17}}{17}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\beta=$

$6=\frac{1}{\sqrt{17}}$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{\sin 2\alpha =}$ $\quad \tg 2\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha} = \cancel{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$

$= \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha} = \sin 4\alpha$

$\tg \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} =$

$= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ $\quad \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{1-\cos}{}$

$\sin\alpha = \boxed{\tg 2\alpha}(1+\cos\alpha)$ $\quad 1 - \sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha \underbrace{\cos 2\beta}_{a} + \cos 2\alpha \underbrace{\sin 2\beta}_{b} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$a \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\cancel{a(\tg 2\alpha(1+\cos\alpha)) + b(2\cos^2\alpha - 1) = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$.

$\boxed{\tg 2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ $\quad \cancel{\cos\alpha = \frac{\tg 2\alpha}{\sin\alpha} - 1}$

$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tg 2\alpha} - 1$

$\tg 2\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$. $\quad \cos\alpha = 1 - \tg 2\alpha \sin\alpha$

$2\alpha = \frac{\alpha}{2}$

$1 - \tg 2\alpha \sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tg 2\alpha} - 1$

$2 = \frac{\sin\alpha}{\tg 2\alpha} + \tg 2\alpha \sin\alpha$.

$2 = \left(\frac{1}{\tg 2\alpha} + \tg 2\alpha\right) \sin\alpha$.

$\sin\alpha = \frac{2 \tg \frac{\alpha}{2}}{1 + \tg^2 \frac{\alpha}{2}}$

$\cancel{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{2 \tg \frac{\pi}{3}}{1 + \tg^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{1+3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cancel{\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3}} \quad \cancel{\sin\frac{\pi}{6}}$

$\cancel{\tg 2\alpha =}$ $\quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{2 \tg \frac{\pi}{6}}{1 + \tg^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 4} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)