# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина $Y$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $TY$. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра $XZ$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№ 1

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = \frac{-2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta =$

$= \frac{-2}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm \cancel{\sqrt{\tfrac{16}{17}}}\ \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

1) I-й случай

$\cos(2\alpha+2\beta)$ и $\sin 2\beta$ одного знака; тогда $\sin(2\alpha+4\beta)+$

$+\sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha =$

$= \frac{-1}{17} + \frac{16}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = -1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k;\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\cos\alpha;\ \operatorname{tg}\alpha = \pm 1$

2) 2-й случай $\cos(2\alpha+2\beta)$ и $\sin 2\beta$ разных знаков, тогда

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{1}{17} - \frac{16}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \pm\frac{15}{8} \Rightarrow \pm\frac{15}{8}\cdot\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha \mp \frac{15}{8} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{225}{64}}}{\pm\frac{15}{8}} = \frac{-8\pm 17}{\pm 15} = \left[\begin{array}{l} \pm\frac{5}{3} \\ \pm\frac{3}{5} \end{array}\right.$

~~Ответ: $\pm 1, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{3}{5}$~~

I если $\operatorname{tg}\alpha = 1$, то $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \cos$

$\cos\left(2\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(2\beta) \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1$ — подх

если $\operatorname{tg} = -1$, то $2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \cos\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\beta \Rightarrow$

продолжение на стр 5

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -6x+y=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $x-1=a$ ; $y-6=b$ , тогда

исх система $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

, заметим, что числа $a$ и $b$ одного знака ($\sqrt{\ } \geq 0$)

I й случай $a>0$ $b>0$ , тогда

$b-6a=\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{b}-3\cdot\sqrt{a})(\sqrt{b}+2\sqrt{a})=0 \Leftrightarrow \sqrt{b}=3\sqrt{a} \Leftrightarrow b^2=81a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9a^2+81a^2=90 \Rightarrow a=1$ ; $b=9 \Rightarrow x=2$ ; $y=15$

II й случай $a<0$; $b<0$

пусть $t=-a;>0$ $p=-b;>0$ , тогда $b-6a=\sqrt{ab} \Leftrightarrow 6t-p=\sqrt{tp} \Leftrightarrow$

$(\sqrt{p}-2\sqrt{t})(\sqrt{p}+3\sqrt{t}) \Leftrightarrow \sqrt{p}=2\sqrt{t} \Rightarrow b^2=16a^2 \Rightarrow 9a^2+16a^2=90 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=-\sqrt{\frac{18}{5}}$ , $b=-4\cdot\sqrt{\frac{18}{5}} \Rightarrow x=1+a=1-\sqrt{\frac{18}{5}}$ ; $y=6+b=6-4\sqrt{\frac{18}{5}}$

Ответ: $(2;15)$; $\left(1-\sqrt{\frac{18}{5}}; 6-4\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \ge x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

пусть $t=26x-x^2$; $t>0$, т.к он в $\log_5$, тогда

$t+|-t|^{\log_5 12} \ge 13^{\log_5 t}$

$y=\log_5 t \Rightarrow t=5^y$

$|-t|=|t|=t$; т.к $t>0$

$t+t^{\log_5 12} \ge 13^{\log_5 t}$

$5^y+5^{y\cdot\log_5 12} \ge 13^y$

$5^y+12^y \ge 13^y$

$13^y>0 \Rightarrow$ поделим

$\underbrace{\left(\frac{5}{13}\right)^y+\left(\frac{12}{13}\right)^y}_{f(y)} \ge 1$

$f(y) \ge 1$

но $f(y)$ убыв $\Rightarrow$ есть ~~корень~~ не более 1 корня

подберем этот корень $y=2 \Rightarrow y \le 2$ удовл

неравенству $\log_5 t \le 2 \Rightarrow t \in [0;25] \Rightarrow$

$\begin{cases} -26x+x^2<0 \ (1) \\ -26x+x^2+25 \ge 0 \ (2) \end{cases}$

(1) $x = \left[\begin{matrix}0\\26\end{matrix}\right.$

(2) $x = \left[\begin{matrix}1\\25\end{matrix}\right.$

продолжение на 4) странице

$$\begin{cases} x \in (0; 26) \\ x \in (-\infty; 1] \vee [25; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 1] \vee [\cancel{26}\,25; 26)$$

Ответ: $x \in (0; 1] \vee [25; 26)$

№ 6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2 - 5\cancel{1}x + 28 \qquad x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$$

$f(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = 0$

$g(x) = 18x^2 - 57x + 28$

$g(2) = -2$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = 2$

тогда:

$$\begin{cases} a \cdot \frac{4}{3} + b \geq f\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}a - b \leq 0^{*} & (1) \\ 2a + b \leq g(2) = -2 & (2) \\ \frac{2}{3}a + b \leq g\left(\frac{2}{3}\right) = 2 & (3) \end{cases}$$

$^{*}$ по условию верное $a \cdot \frac{2}{3} \leq -2$; $* + (2) \Rightarrow a \leq -3$

$-a \cdot \frac{2}{3} \leq 2$, ~~тогда~~ $* + (3)$, тогда $a > -3 \Rightarrow a = -3$; $-4 + b \geq 0 \Rightarrow$

$b \geq 4$; $-6 + b \leq -2 \Rightarrow b \leq 4 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow (a; b) = (-3; 4)$

Ответ: $a = -3$
$b = 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow tg = -1$ удовл

II если $\cos 2x = \pm\frac{8}{17}$, $\cos(2x+2\beta) = \pm\frac{8}{17}\cos 2\beta - \frac{15}{17}\sin 2\beta =$

$= \frac{1}{17}\cdot\left(\pm\frac{8}{\sqrt{17}} - 15\cdot\sin 2\beta\right) > 0$ при $\sin 2\beta = \frac{-4}{\sqrt{17}}$ и $< 0$ при $\sin 2\beta =$

$= \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$ все 4 решение из 2го случая подходят

Ответ: $\pm\frac{3}{5}$; $1$; $\pm\frac{5}{3}$

N5

По усл-ию $f(ab) = f(a) + f(b)$ для любых $a$ и $b$ из полож. рац.

будем считать, что подставлен полож. рац. числа.

$a = n$, $b = n$ $\Rightarrow f(n^2) = 2f(n)$; $a = n^2$, $b = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow f(n) = f(n^2) + f(\frac{1}{n}) =$

$= 2f(n) + f(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = -f(n)$, для любого $n$ из полож $R$.

С другой стороны известно, что $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ для любого простого $p$; тогда $f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(5) = 1$; $f(7) = 1$

$f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17) = 4$; $f(19) = 4$; $f(23) = 5$ получим все значения при $x \geq 4$, $x \leq 28$ $\quad f(4) = f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 0$

далее будем считать очевидным так раскладывать на произв. числа; напр $f(15) = f(3\cdot 5) = f(3) + f(5) = 1$

тогда $f(6) = 0$ $\quad f(8) = 0$ $\quad f(9) = 0$ $\quad f(10) = 1$

$f(12) = 0$ $\quad f(14) = 1$ $\quad f(15) = 1$ $\quad f(16) = 0$ $\quad f(18) = 0$ $\quad f(20) = 1$

$f(21) = 2$ $\quad f(22) = 2$ $\quad f(24) = 0$ $\quad f(25) = 2$ $\quad f(26) = 3$ $\quad f(27) = 0$

$f(28) = 1$ ; Теперь заметим, что $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

при $a = x$; $b = \frac{1}{y}$; значит $f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$; значит нужно

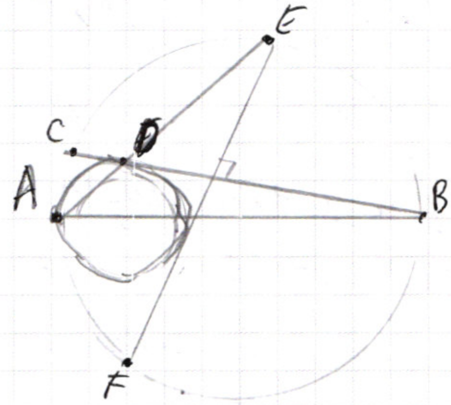
продолж стр 6

выбирать $f(y) > f(x)$, тогда получим пару $(x;y)$. кол-во способов выбрать $f(y) > f(x) = \{9$ зн $f(n)=0$; $n \in [4;28]$; 8 зн $f(n)=1$; $n\in[4;28]$; 3зн $f(n)=2$; $n\in[4;28]$; 2зн $f(n)=4$; $n[4;28]$; 1зн $f(n)=5$; $n=23\}$, тогда $f(x)=f(23)$ нельзя брать, т.к $f(23) \geq f(y)$ при $y\in[4;28]$

для остальных случаев кол-во вариантов выбрать $f(x)<f(y)$ будет $9\cdot(25-9)+8\cdot(25-9-8)+3\cdot(25-9-8-3)+2\cdot(25-9-8-3-2)+2\cdot(25-9-8-3-2-2) = 9\cdot16+8\cdot8+3\cdot5+2\cdot3+2\cdot1 = 208+21+2=231$; при $f(x)=0$ или $x\in[4;28]$ нужно брать ей $f(y)=[1;5]$, аналогично для $f(x)$ просто выбираем $f(y)>f(x)$, соответственно получаем пару $(x;y)$

Ответ: 231

№4




Дано: $CD=12$; $BD=13$

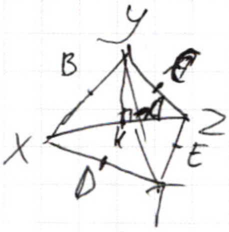
$\omega\cap\Omega=A$; $AB$ – диаметр $\Omega$; $EF\perp BC$

Найти: $\angle AFE$; $S_{\triangle AEF}$;

Решение:

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 7




$XY=\sqrt{3}$

$TX=\sqrt{2}$

$TZ=2$

(Проведём YK - высота)

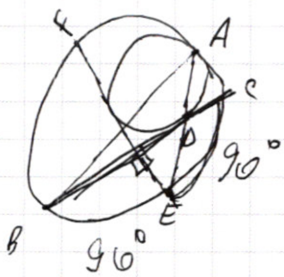
ABDY - лежат на сфере и плоскости => на одной окр =>

=> $\angle BYC + \angle BAC = 180^\circ$ (*)

BA ‖ YC ; CA ‖ YD т.к BCA - сред. стор ; тогда ABCY - пар-мм => прямоугольник т.к (*).

BD ‖ YD ‖ DE => BCED - пар-мм => аналогично это прямоугольник => XZ ‖ BC ⊥ BD ‖ YT => XZ ⊥ YD

пусть YK - высота △XYZ => (HYD) ⊥ XZ





$CD=12$

$BD=13$

$BC=25$

$BC=25$

$$\begin{array}{r} 144 \\ +\ 64 \\ +\ 15 \\ +\ 8 \\ \hline 231 \end{array}$$

$\boxed{5\cdot 4+7+6=33\text{ макс}}$ 33 максимум

1; 2; 3; 6

3 4 5 5 (17)

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=5$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | | 5 | 5 | + — |

5 5 6

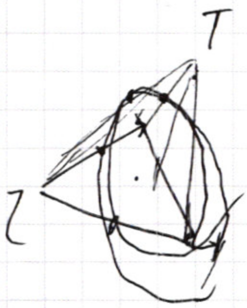
~~$f(n)=\ldots 33$~~

22 23±

~~пара~~.

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ для любого простого $p$.







введем систему координат

$XY=\sqrt{3}$

$TX=\sqrt{2}$

$TZ=2$ векторно $TY\ldots$ уравнение,

$XZ-?$ откуда длину…

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

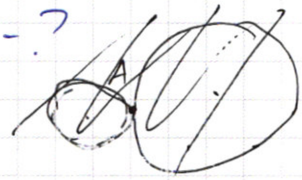
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg\alpha - ?$

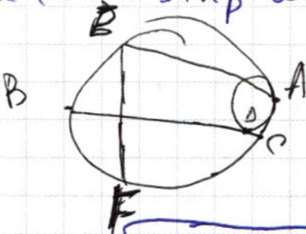



$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{17}$


$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) =$

$= 2(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta)\cdot(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$




$\angle AFE = ?$ $S_{AEF}$

$CD = 12$,

$BD = 13$.

N2

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$ $\wedge 2$

$\begin{cases} y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6 \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0 \\ 9x \end{cases}$

$y-6x$

$xy-6x-y+6$

$x(y-6)-(y-6) = (x-1)(y-6)$

$\cancel{9x^2-18x \ldots = 3(x-1)^2 \ldots}$

$2\cdot3\cdot3$

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ \cancel{9x}\, 9(x-1)^2 - 9 + (y-6)^2 - 36 = 45 \end{cases}$

$9(\underset{a}{x-1})^2 + (\underset{b}{y-6})^2 = 90$

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2 = 90 \end{cases}$ $\wedge 2$ $\Rightarrow y^2-12xy+36x^2 = ab$

$(3x-3+y-6)^2$

$\cancel{3ab}\,(3a)^2+b^2+3\cdot2\cdot ab$

$(3a+b)^2 - 6ab = 90$