МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y = \cancel{\sqrt{xy-x}} \sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+4+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена: $a = x-2$ $\quad$ $x-2y = x-2-(2y-2) = a-2b$

$b = y-1$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} a-2b \geq 0 \\ (a-2b)^2 = ab \end{cases}$

$a^2+4b^2-4ab=ab$

$a^2+4b^2-5ab=0$

I сл. $b=0$ $\quad$ $a^2=0$

$a=0$

Подставим в систему:

$\begin{cases} 0-2\cdot 0=\sqrt{0\cdot 0} \\ 0^2+9\cdot 0^2=25 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 0=0 \\ 0=25 \end{cases}$

неверно.

II сл. $b \neq 0$

$a^2+4b^2-5ab=0 \quad |:b^2 \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2+4-5\left(\frac{a}{b}\right)=0$

Замена: $t=\frac{a}{b}$

$t^2-5t+4=0$

$1-5+4=0 \Rightarrow t_1=1 \quad t_2=\frac{4}{1}=4$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{a}{b} = 1$

$a = b$

$a - 2b \geq 0$

$\cancel{a - 2a \geq 0}$ $\quad b - 2b \geq 0$

$\cancel{-a \geq 0}$ $\quad -b \geq 0$

$\cancel{a \leq 0}$ $\quad b \leq 0$, $a = b$

$\frac{a}{b} = 4$

$a = 4b$

$a - 2b \geq 0$

$4b - 2b \geq 0$

$2b \geq 0$

$b \geq 0$, $\quad a = 4b.$

2) $\quad a^2 + 9b^2 = 25$

$\begin{cases} a = b \\ b \leq 0 \end{cases}$

$b^2 + 9b^2 = 25$

$10b^2 = 25$

$b^2 = \frac{5}{2}$

$b = -\sqrt{\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, т.к. $b \leq 0 \Rightarrow a = b = -\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\begin{cases} a = 4b \\ b \geq 0 \end{cases}$

$16b^2 + 9b^2 = 25$

$25b^2 = 25$

$b^2 = 1$

$b = 1$, т.к. $b \geq 0 \Rightarrow a = 4b = 4.$

3) $\quad \cancel{a = b = x}$

$\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y - 1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$

Ответ: $\quad x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad y = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$;

$x = 6, \quad y = 2.$

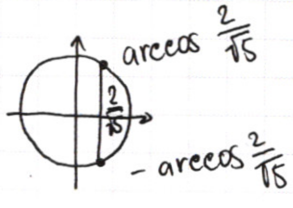
N1

$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

1) $\quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta$

$2\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

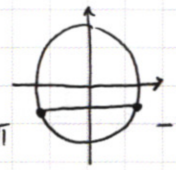
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\beta = \cancel{\pm}\ \cancel{\arccos}\ \arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi n,\ n\in Z$; $\quad -\arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi k,\ k\in Z$.

2) $2\beta = \arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi n,\quad n\in Z$.

$\sin\left(2\alpha + \arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi n\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

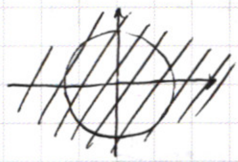
$\sin\left(2\alpha + \arccos\frac{2}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \pi$  $-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + \arccos\frac{2}{\sqrt5} \cancel{+2\pi n} = \arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \pi + 2\pi m,\ m\in Z \\ 2\alpha + \arccos\frac{2}{\sqrt5} = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi p,\ p\in Z \end{array}\right.$$

$\cancel{2\alpha = }$ $\cancel{\arccos\frac{2}{\sqrt5}}$

$$\begin{cases} \sin\left(\arccos\frac{2}{\sqrt5}\right) = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5} \\ \arccos\frac{2}{\sqrt5} \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$



$\Rightarrow \quad \arccos\frac{2}{\sqrt5} = \arcsin\frac{1}{\sqrt5}$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -\pi + 2\pi m,\ m\in Z \\ 2\alpha = -2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi p,\ p\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{2} + \pi m,\ \text{не подх., т.к. } tg\,\alpha \text{ определён.} \\ \alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + \pi p,\ p\in Z \end{array}\right.$$

3) $2\beta = -\arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi k = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k$

$\cancel{\sin(2\alpha +}$ $\quad \sin\left(2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{2\alpha}$ $\sin\left(2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} = \arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \pi + 2\pi l,\ l\in Z \\ 2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi q,\ q\in Z. \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \pi + 2\pi l \\ 2\alpha = 2\pi q \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} + \pi l \\ \alpha = \pi q \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi l \\ \alpha = \pi q \end{array}\right.$$

Значит, $\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi p,\ p \in Z;$

$-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi l,\ l \in Z.$

$\pi q,\ q \in Z.$

1) $tg\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi p\right) = tg\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = tg\left(-\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$

$= -tg\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$tg^2\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

$\cancel{tg^2\alpha = \frac{1}{4}}$

$\cancel{tg\alpha = \frac{1}{2}}$ $tg\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2}$, т.к. $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$tg\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $tg\left(-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi l\right) = tg\left(-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -tg\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$tg^2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} - 1 = 5 - 1 = 4$

$tg\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2$, т.к. $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$tg\alpha = -2$

3) $tg(\pi q) = tg\,0 = 0$

Ответ: $-\frac{1}{2};\ -2;\ 0.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

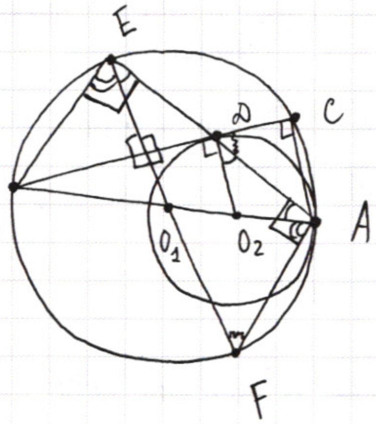
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4.

Дано:
Окр. Ω и Окр. ω касаются в т. A
AB - диаметр. Ω
BC - хорда
D - точка касания
$EF \perp BC$
$CD = 8$, $BD = 17$

Найти: R, r; $\angle AFE$; S_{AEF}



Решение:

1) $O_2D \perp BC$ как радиус, пров. в точку касания
$AC \perp BC$, т.к. $\angle ACB = 90°$ (- впис. и опр. на диаметр) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2D \parallel AC$ по теор. о 2^x $\parallel$ прямых $\perp$ третьей.

2) $\angle B$ - общий
~~$\angle BE$~~ $\angle BDO_2 = \angle BCA = 90°$ $\Big\} \Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по 2 углам $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB} = \frac{DO_2}{AC} = \frac{17}{25}$$

$$\frac{BO_2}{AB} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25}$$

$$34R = 50R - 25r$$
$$25r = 16R \Rightarrow r = \frac{16R}{25}$$

3) ~~DO_2~~ $\triangle ABC$ - п/у, т.к. $\angle ACB = 90°$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по теор. Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$
$AC^2 = (2R)^2 - 25^2$

$$\frac{DO_2}{AC} = \frac{17}{25}$$

$$\frac{r}{\sqrt{4R^2 - 625}} = \frac{17}{25}$$

$$25r = 17\sqrt{4R^2 - 625}$$
$$16R = 17\sqrt{4R^2 - 625} \quad \uparrow^2$$
$$16^2R^2 = 17^2(4R^2 - 625)$$

$16^2R^2 = 34^2R^2 - 17^2 \cdot 625$

$17^2 \cdot 625 = R^2(34^2 - 16^2)$

$R = \dfrac{17\cdot 25}{\sqrt{18\cdot 50}} = \dfrac{17\cdot 25}{\sqrt{9\cdot 2\cdot 2\cdot 25}} = \dfrac{17\cdot 25}{3\cdot 2\cdot 5} = \dfrac{17\cdot 5}{6} = \dfrac{85}{6} = 14\dfrac{1}{6}$

$r = \dfrac{16}{25}R = \dfrac{16}{25}\cdot\dfrac{85}{6} = \dfrac{8\cdot 17}{5\cdot 3} = \dfrac{136}{15} = 9\dfrac{1}{15}$.

4) $\left.\begin{array}{l} EF \perp BC \\ O_2D \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel O_2D$ по теор. о 2^х $\parallel$ прямых $\perp$ третьей. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADO_2 = \angle AE\cancel{O_1}M$ – соотв. при $EF \parallel O_2D$ и сек. AE $\Big\} \Rightarrow$

$\angle A$ – общий F

Пусть $EF \cap AB = M$

$\Rightarrow \triangle ADO_2 \sim \triangle AE\cancel{O_1}M$ по 2 углам $\Rightarrow$ $\cancel{\dfrac{AO_2}{DO}}$ $\dfrac{AO_2}{\cancel{AO_1}\,AM} = \dfrac{DO_2}{\cancel{EO_1}\,EM} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AO_2}{DO_2} = \cancel{\dfrac{AO_1}{EO_1}}\ \dfrac{AM}{EM} = \dfrac{r}{r} = 1 \Rightarrow \cancel{AO_1 = EO_1 = R}$

$AM = EM \Rightarrow \triangle AEM$ – р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FEA = \cancel{\angle BEA}\ BAE$

5) $\angle BEF = \angle BAF$ – впис. и опир. на $\cup BF$

$\angle EAF = \angle BAE + \angle BAF = \angle FEA + \angle BEF = \angle BEA = 90^\circ$ $\Rightarrow$

т.к. впис. и опир. на диаметр.

$\Rightarrow$ т.к. $\angle EAF$ – впис. и $\angle EAF = 90^\circ \Rightarrow EF$ – диаметр.

6) $\angle ADC = 90^\circ - \angle ADO_2 = 90^\circ - \angle AEO_1 = \angle AFE$

по сумме углов в п/у $\triangle$.

$\cancel{\sin\angle ADC} = \operatorname{tg}\angle ADC = \cancel{\dfrac{AC}{DC}}\ \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{\sqrt{4R^2 - 625}}{8} =$

$= \dfrac{\sqrt{4\cdot\frac{85^2}{6^2} - 25^2}}{8} = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{85}{3} - 25\right)\left(\frac{85}{3} + 25\right)}}{8} =$

$= \dfrac{\sqrt{\frac{10}{3}\cdot\frac{160}{3}}}{8} = \cancel{\dfrac{\frac{40}{9}}{8}} = \dfrac{\frac{40}{3}}{8} = \dfrac{5}{3}$

$\angle ADC = \angle AFE = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{3}$.

$\cancel{\sin}$ $\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{5}{3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \sqrt{\dfrac{1}{\frac{25}{9} + 1}} = \sqrt{\dfrac{9}{34}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{34}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$

$\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{5}{3}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} =$

$= \sqrt{1 - \dfrac{9}{34}} = \sqrt{\dfrac{25}{34}} = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$

7) $AF = 2R\cdot\cos\angle AFE = 28\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{34}} = \dfrac{28\cdot 3 + 1}{\sqrt{34}} = \dfrac{85}{\sqrt{34}}$

$AE = 2R\cdot\sin AFE = 28\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{34}} = \dfrac{85\cdot 5}{3\sqrt{34}}$

$S_{FAE} = \dfrac{1}{2}AE\cdot AF = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{85}{\sqrt{34}}\cdot\dfrac{85\cdot 5}{3\sqrt{34}} = \dfrac{85^2\cdot 5}{6\cdot 34} = \dfrac{85\cdot 5\cdot 5}{6\cdot 2} = \dfrac{2125}{12} = 177\dfrac{1}{12}$

Ответ: $14\dfrac{1}{6}$ и $9\dfrac{1}{15}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{3}$; $177\dfrac{1}{12}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$ $\qquad [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

1) $y = -8x^2-30x-17$

Парабола; $a=-8 \Rightarrow$ ветви вниз

$x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$y_в = -\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17 = 28\frac{1}{8} - 17 = 11\frac{1}{8}$

~~$y=0$~~

$y(-\frac{3}{4}) = -8\cdot\frac{9}{16} + \frac{90}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 = 18-17 = 1$

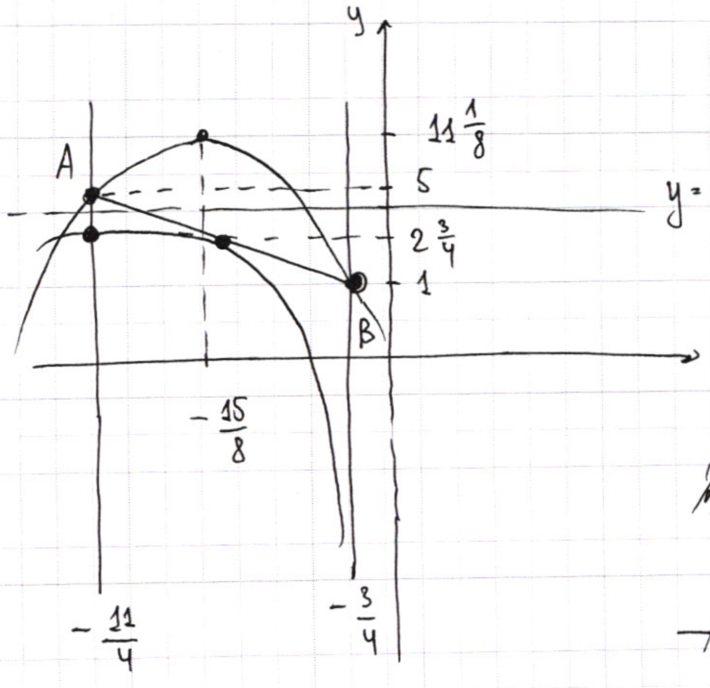
$y(-\frac{11}{4}) = -8\cdot\frac{121}{16} + \frac{330}{4} - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17 =$

$= \frac{44}{2} - 17 = 5$

2) $y = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

Гипербола $\qquad x = -\frac{3}{4}$

~~$y(-\frac{3}{4})$~~ $\qquad y(-\frac{11}{4}) = 3 + \frac{2}{-8} = 2\frac{3}{4}$



~~3) $y = ax+b$ $\quad a<0$~~

~~$2\frac{3}{4} \le y(-\frac{11}{4}) \le 5$~~

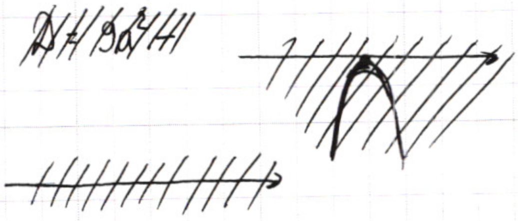
~~$y($~~

~~$ax+b = 3+\frac{2}{4x+3} \;\Big|\cdot 4x+3 \ne 0$~~

~~$4ax^2+3ax+4bx+3b = 12x+11$~~

~~$4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11=0$~~

~~$D = 9a^2$~~



$\cancel{f\left(-\frac{3}{4}\right) < 0}$

$\cancel{f\left(-\frac{11}{4}\right) < 0}$

$\cancel{D < 0}$

Проведем прямую через точки ~~A и B~~ $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}a + b = 1 \\ -\frac{11}{4}a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2a = -4 \\ a = -2 \end{matrix}$$

$b = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -2x - \frac{1}{2}$

Докажем, что $y = -2x - \frac{1}{2}$ касается $y = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$-2x - \frac{1}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3} \quad \Big| \cdot 2(4x+3) \neq 0$

$-16x^2 - 12x - 4x - 3 = (12x + 11) \cdot 2$

$-16x^2 - 16x - 3 = 24x + 22$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$(4x+5)^2 = 0$

$x = -\frac{5}{4}$ – 1 реш. $\Rightarrow D = 0$

$D = 0 \Rightarrow$ графики касаются

Пусть точки A и B – точки пересечения с $x = -\frac{11}{4}$ и $x = -\frac{3}{4}$

Значит если B будет ниже прямая пересечет $y = 3 + \frac{2}{4x+3}$ и не будет удовлетв. условию.

т.к. в какой-то точке на промежутке будет ниже графика $y = 3 + \frac{2}{4x+3}$

~~если A будет ниже.~~

Аналогично, если A будет ниже.

Следовательно $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$ единственное решение.

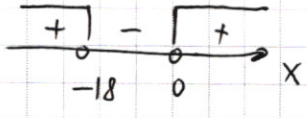
Ответ: $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

~~N2.~~ N3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$x^2 + 18x > 0$

$x(x+18) > 0$



$(x^2+18x)^{\log_{12} 5} + x^2 + 18x - (x^2+18x)^{\log_{12} 13} \geq 0$

Замена: $t = x^2 + 18x$

$t^{\log_{12} 5} + t - t^{\log_{12} 13} \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=12+4+9=25$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$a=x-2$

$b=y-1$

$a^2+9b^2=25$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$a-2b\geq 0$

$a^2+4b^2-4ab=ab$

$a^2+4b^2-5ab=0$

$t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{12}13}-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y'=t^{\log_{12}13}\ln\log_{12}13 \ldots$

4 и 1

$-t^{\log_{12}13}+t^{\log_{12}5}-t$

$\log_{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$t^{\log_{12}13-1}=$

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}}=$

$x^2+18x>0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\geq(x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5}-(x^2+18x)^{\log_{12}13}+x^2+18x\geq 0$

$\log_{12}\frac{13}{5}=\log_{13}5$

$t^{\log_{12}13-\log_{12}5}\log_5 13=1$

$t=x^2+18x$

$t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}+t\geq 0$

$t^{\log_{12}5}\geq t^{\log_{12}13}-t$

$x_B=\frac{30}{-16}=-\frac{15}{8}$

$-8x^2-30x-17=0$

$y'=t^{\log_{12}13-1}\log_{12}13-t^{\log_{12}5-1}\log_{12}5=0$

$t^{\log_{12}13}\ln\log_{12}13=t^{\log_{12}5}\ln\log_{12}5$

$t^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

$\log_{\log_{12}5}\log_{12}13=1$

$y=t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$-2x - \frac{1}{2} = 3 + \frac{2}{}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$(4x+5)^2 = 0$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$-8x^2 + 20x - 12\frac{1}{2} = 0$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$-\frac{3}{4}a + b = 1$

$2\cos 2\beta \, \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4}{5}$

$-\frac{11}{4}a + b = 5$

$2\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$2\beta = \pm \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi n$

$b = -\frac{1}{2}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$2a = -4$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$a = -2$

~~$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$~~

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-6 - 2 - 12$

11 : 12

15 : 12

1, 2.

~~$2\alpha + 2\beta = \arccos$~~

$17^2 (4R^2 - 625) = 16^2 R^2$

$17^2 \sqrt{4R^2 - 625} = 16R$

$17^2 R^2 - 25^2 = 16^2 R^2$

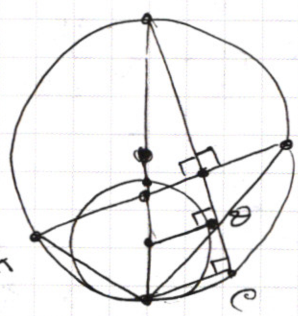
$21 \cdot 53 R^2 = 25^2$

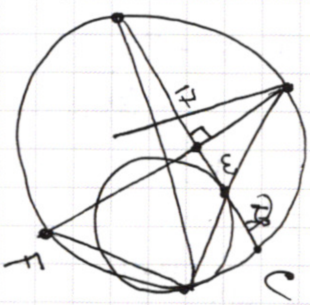
$R^2 = \frac{25^2}{21 \cdot 53}$

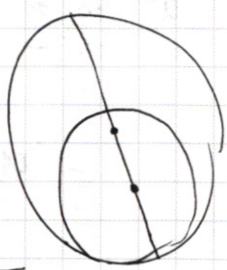
$r =$

$\begin{array}{r} 85 \\ +\,85 \\ \hline 425 \\ 170 \\ \hline 2125 \end{array}$

$\begin{array}{r} 177 \\ \times\,12 \\ \hline 354 \\ 177 \\ \hline 2124 \end{array}$







$\frac{17}{8} = \frac{r}{\sqrt{4R^2 - 25^2}}$

$= \frac{16R}{25^2}$

$\frac{17}{8} = \frac{2R - r}{r}$

$16R - 8r = 17r$

$16R = 25r$

$r = \frac{16R}{25}$

Радиусы

$\angle AFE$

S_{AEF}

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

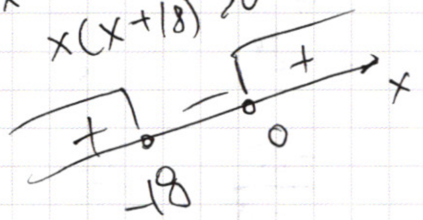
(заполняется секретарём)

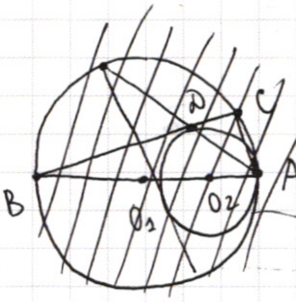
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4.

$x^2+18x>0$

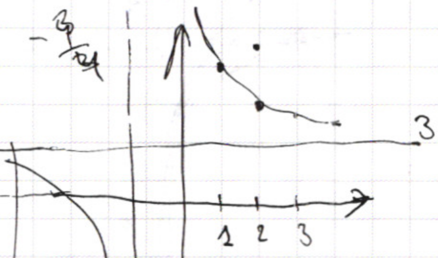
$x(x+18)>0$





$3+\frac{12}{4x+3}$

$-\frac{3}{4}$



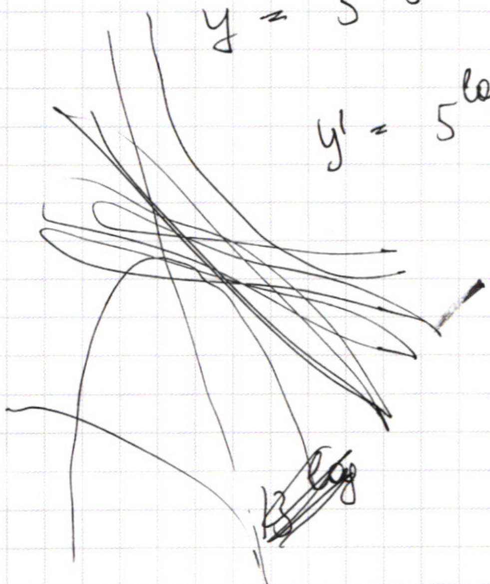
$5^{\log_{12}(x^2+18x)}-13^{\log_{12}(x^2+18x)}-x^2-18x$

$y=5^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t}$

$y'=5^{\log_{12}t}\cdot\ln 5=13^{\log_{12}t}\cdot\ln 13$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t}=\log_5 13$

$\log_{12}t=\log_{\frac{5}{13}}\log_5 13$



$\frac{12x+11}{4x+3}=-8x^2-30x-17$

$13^{\log_{12}t}-t$

$-\frac{15}{8}$

$13^{\log_{12}t}\ln 13=1$

$13^{\log_{12}t}=\log_{13}10$

$\log_{12}t=\log_{13}\log_{13}10$

$t=$

$-\frac{225}{8}+\frac{45}{8}-17=$

$-\frac{180}{8}-17=$

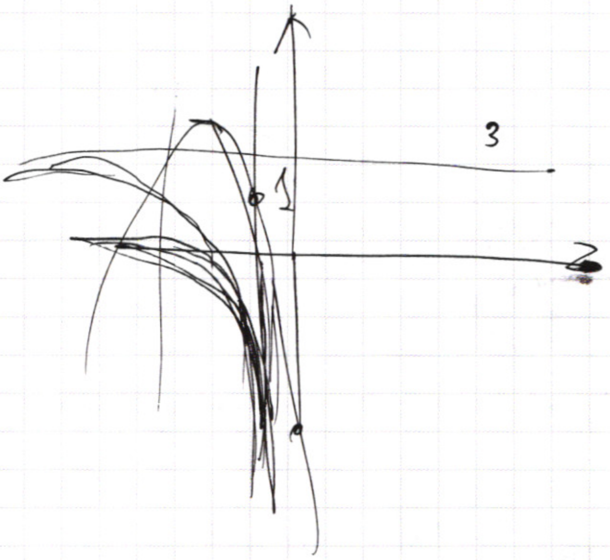
$=-\frac{45}{2}-17=$

$-39,5$

$\cancel{12x+11=24x+3}$

$x_в. = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$-\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17 = 28\frac{1}{8} - 17 = 11\frac{1}{8}$



$-\frac{18}{2} + \frac{90}{4} - 17 = \frac{72}{4} - 17 =$

$= 1$

$-\frac{242}{4} + \frac{330}{4} - 17 =$

$= 88$ $\quad = 5$

$\frac{-22}{-8} = \frac{22}{5}.$

$\frac{22}{8} = \frac{11}{4} =$