МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N1

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

] $2\alpha+2\beta = x$; $2\beta = y$, тогда

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin(x+y) + \sin(x-y) = -\frac{2}{17}$

Заметим, что $\sin^2 x \cdot 2 \cdot (-1) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

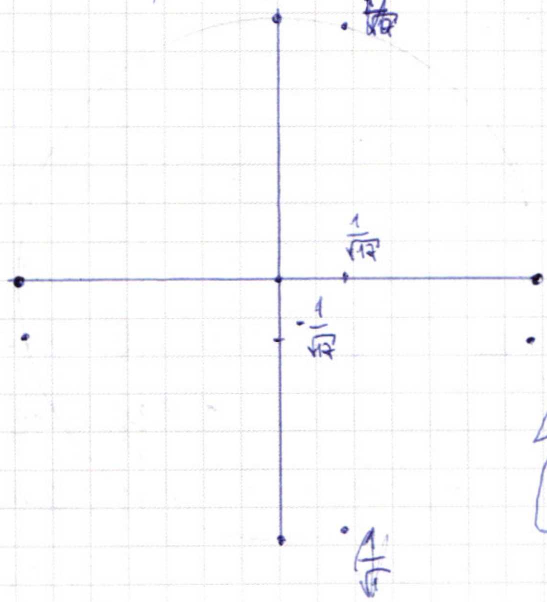
$-2\sin^2 x = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cos x + \sin x \cos y - \sin y \cos x = 2\sin x \cdot \cos y$

Сократим на $2\sin x$, т.к. $2\sin x = -\frac{2}{\sqrt{17}} \neq 0$

$\underset{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\underset{\|}{-\sin x}} = \cos y$. Нам необходимо найти $tg\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}}$



] $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -t$

Тогда

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2\beta = \frac{\pi}{2} - t + 2\pi k_1 \\ 2\beta = \frac{3\pi}{2} + t + 2\pi k_2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = -t + 2\pi k_3 \\ x = \pi + t + 2\pi k_4 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$\frac{x-y}{2}$ принимает значения $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\frac{3\pi}{4} - t + \pi k; \frac{\pi}{4} + t + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k\right\}$

Если $\frac{x-y}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, то $tg\alpha = -1$

Если $\alpha = \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi k$, то можно просто рассмотреть $\alpha = \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ т.к. период $tg = \pi$

$\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) - \sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}$

$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}$

$tg\alpha = \frac{5}{3}$

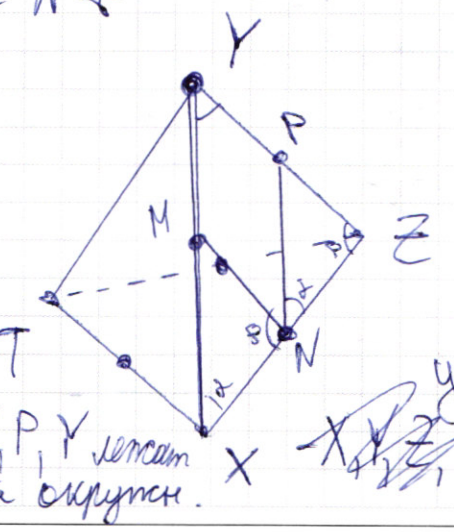
Если $\alpha = -\frac{3\pi}{4} - t - \pi k$, то можно просто рассмотреть $\alpha = -\frac{3\pi}{4} - t + \pi$ т.к. период $tg - \pi$

$||$

$\alpha = \frac{\pi}{4} - t$ Сумма $\frac{\pi}{4} - t$ и $\frac{\pi}{4} + t = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ тангенсы этих углов обратны $\Rightarrow tg\alpha = \frac{3}{5}$

Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = \frac{5}{3}$; $tg\alpha = \frac{3}{5}$

Задача №7



В $\triangle YXZ$ ~~вершина Y~~ ~~равноудалена~~ середины 3 сторон и Y равноудалены от центра сферы O $\Rightarrow$ равно удалены от проекции XYZ

Она

точки M, N, P, Y лежат на одной окружн.

~~$X_1Y_1Z_1$~~ $\Rightarrow \angle MYP + \angle MNP = 2\angle MYP = 180^\circ \Rightarrow$

$\angle XYZ = 90^\circ$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (y-6)^2+9(x-1)^2=45+9+36 \end{cases}$$

$\}$ $x-1=a$ $\quad y-6=b$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ b^2+9a^2=90 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} b^2+36a^2=13ab \\ b\geq 6a \\ b^2+9a^2=90 \end{cases} \qquad b=\pm 3\sqrt{10-a^2}$$

1) $b=3\sqrt{10-a^2}$

$90-9a^2+36a^2=13\cdot 3\cdot a\cdot\sqrt{10-a^2}$

$90+27a^2=13\cdot 3\cdot a\sqrt{10-a^2}$

$30+9a^2=13a\sqrt{10-a^2}$ возведем в квадр.

$900+540a^2+81a^2=169a^2\cdot 10-169a^2\cdot a^2$

решая биквадратное найдем $|a|$, затем найдем $|b|$

причем $a\cdot b\geq 0$

2) случай рассматривается аналогично

Задача №3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

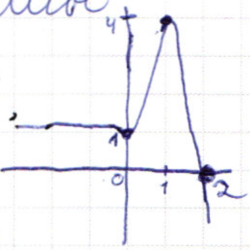
в $\log_5 26x-x^2$ $\quad 26x-x^2>0 \quad$ Пусть $26x-x^2=a>0$

$a^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$ т.к. $a^{\log_5 12}=12^{\log_5 a}$:

$12^{\log_5 a}+a \geq 13^{\cancel{\log}\log_5 a}$ Пусть $\log_5 a=t$, тогда $5^t=a$

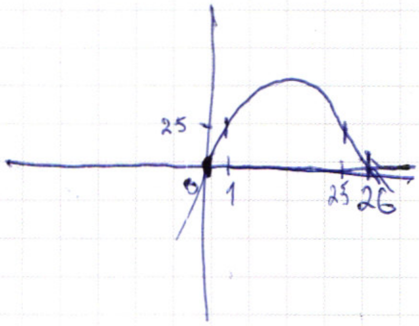
$12^t+5^t \geq 13^t$ если $t \leq 0$, то $5^t \geq 13^t$, а $12^t > 0 \Rightarrow$
неравенство справедливо.

Функция $12^t+5^t-13^t$:
неотрицательна, при $t \in (-\infty;2]$



Итак $t \in (-\infty;2]$, тогда $a \in (0;25]$, т.к. $\log_5 a=t$

Если $a \in (0;25]$ т.к. $26x-x^2$ при $x=1$ и $x=25$
дает 25, делаем вывод, что
$a \in (0;25]$ при $x \in (0;1] \cup [25;26)$



Ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$

Задача №5

Дано:

$f(ab)=f(a)+f(b)$ при $a,b=1$ получим:

$f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

Возьмем a - положит. рацион. число, тогда

$f(1)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0 \Rightarrow f(a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)$

Тогда среди $f\left(\frac{x}{y}\right)$ и $f\left(\frac{y}{x}\right)$ ровно 1 отриц. либо оба нули.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда поищем среди $f(x/y)$ такие, которые равны 0

Если $f(x/y)=0$, то $f(x)=f(x/y)+f(y) \Rightarrow$ $f(x)=f(y)$, и

$x, y \in \{4,5,6\ldots 28\}$

Итак, знаем, что

$f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=f(2)+f(2)=0$. Понимаем, что если число k делиться только на 2 и на 3, то $f(k)=0$

Значит $f(2^n \cdot 3^s)=0$

Итак $f(5)=1$ $f(7)=1$; $f(10)=f(2)+f(5)=1$; $f(11)=2$

$f(13)=3$ $f(14)=f(2)+f(7)=1$ $f(15)=0+f(5)=1$; $f(17)=4$;

$f(19)=4$; $f(20)=0+f(5)=1$; $f(21)=0+f(7)=1$ $f(22)=0+2=2$

$f(23)=5$ $f(25)=1+1=2$ $f(26)=0+3=3$ $f(28)=f(7)+0=1$

Итак всего:

1:	2:	3:	4:	5:	0:
8 штук	3 штуки	2 штуки	2 штуки	1 штука	9 штук

Пары x и y могут быть, где $f(x)=a\neq 0$
$f(y)=b\neq 0$; $b\neq a$

только в такой паре будет среди $f\left(\frac{x}{y}\right)$ и $f\left(\frac{y}{x}\right)$ ровно

одно отрицательное. Всего таких пар

$8(3+2+2+1)+3(2+2+1)+2(2+1)+2\cdot 1=$

$=8\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 3+2=64+15+6+2=87$

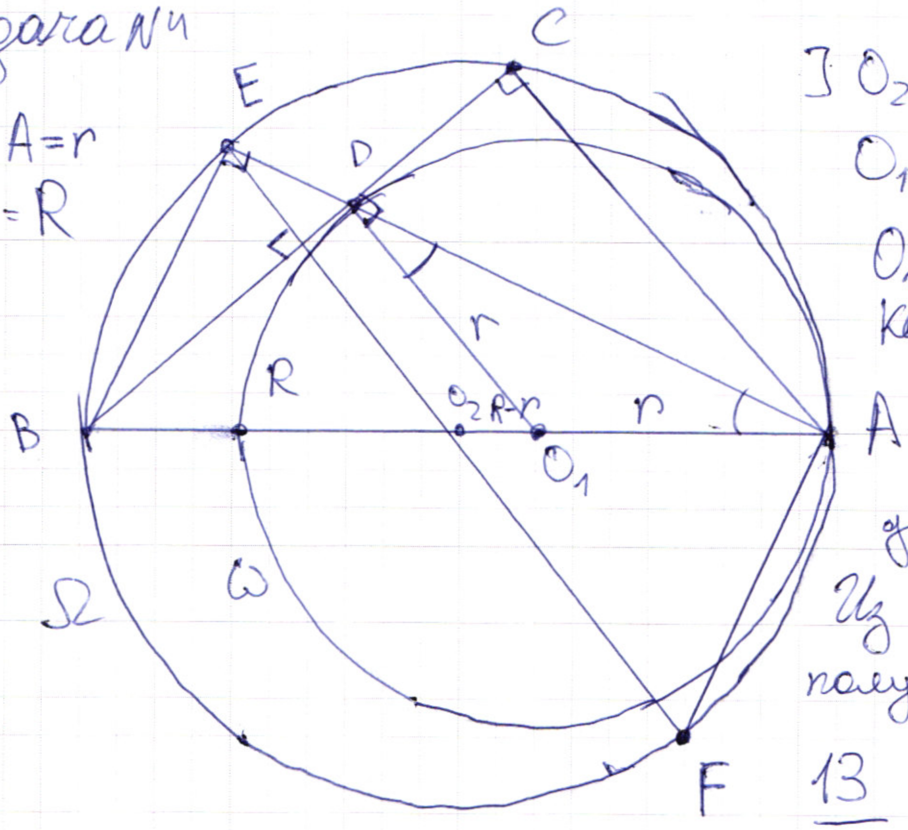
в остальных парах либо $f(x)=0$ или $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$

Ответ: 87

Задача №4

$\exists O_1A = r$

$O_2A = R$



$\exists O_2$ - центр Ω

O_1 - центр ω

$O_1D \perp BC$ - радиус $\perp$ касательной.

$\angle BCA = 90°$, т.к опирается на диаметр.

Из т. Фалеса получаем: $\frac{BD}{BO_1} = \frac{CD}{O_1A}$

$$\frac{13}{2R-r} = \frac{12}{r}$$

$13r = 24R - 12r \quad 25r = 24R \Rightarrow r = \frac{24}{25}R$

в прямоугольном $\triangle BDO_1$: $\underset{\shortparallel}{BO_1}^2 = O_1D^2 + BD^2$

$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 13^2$

$4R^2 - \frac{24 \cdot 4}{25}R^2 = 13^2 \quad \frac{4}{25}R^2 = 13^2 \quad \frac{2}{5}R = 13 \quad R = \frac{65}{2}$

$r = \frac{24}{25} \cdot \frac{65}{2} = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$

$\angle AFE = \angle EBA = 180° - \angle BEA - \angle EAB = 90 - \angle EAB$

найдем $\angle EAB = \angle O_1DA = \frac{DO_1B}{2}$

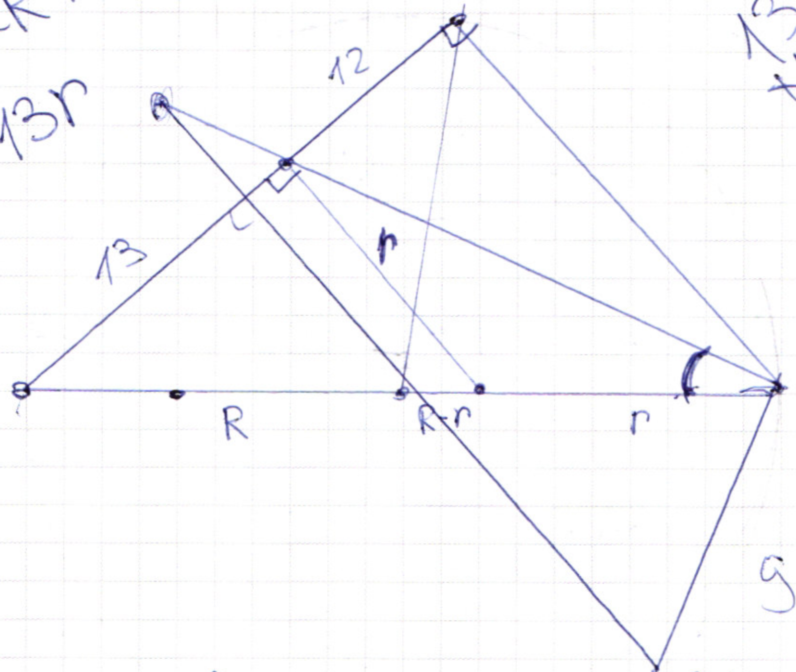
$\angle DO_1B = \arc\overset{ctg}{\cancel{\cos}}\left(\frac{O_1D}{DB}\right) = \arc\overset{ctg}{\cancel{\cos}}\left(\frac{12 \cdot 13}{5 \cdot 13}\right) = \arc\overset{ctg}{\cancel{\cos}}\left(\frac{12}{5}\right)$

$\angle EAB = 2\,\mathrm{arcctg}\left(\frac{12}{5}\right) \Rightarrow \angle EFA = 90° - 2\,\mathrm{arcctg}\left(\frac{12}{5}\right)$

$$\frac{12}{13}=\frac{r}{2R-r}$$

$$24R-12r=13r$$

$$24R=25r$$



$$\frac{13}{+12} \quad 26$$

$$\frac{13}{156}$$

$$r=\frac{24}{25}R$$

$$b=\sqrt{90-9a^2}$$

$$13^2+r^2=(2R-r)^2=4R^2+r^2-4Rr$$

$$4(R-r)\cdot R=13^2$$

$$4R^2-4rR=13^2$$

$$3\sqrt{10-a^2}$$

$6a$

$12a$

$$R=\frac{65}{2}$$

$$r=\frac{24}{25}\cdot\frac{65}{2}=$$

$$13^2=4R^2-4rR$$

$$(b-6a)^2=ab$$

$$13=\frac{2}{5}R$$

$$13^2=4R^2-\frac{96}{25}R^2=\frac{4}{25}R^2$$

$$=\frac{12\cdot13}{5}$$

$$(b+3a)^2=90+6ab$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y-6)^2+(3x-3)^2$

$\frac{1}{5^t}+\frac{7}{13^t}$

$(y-6)^2+9(x-1)^2=45+36+9=90$

$(26-x)\cdot x$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$b^2+36a^2\geq 2\cdot b\cdot a\cdot 6=$
$=12ab$

$\underset{a}{(x-1)}\underset{b}{(y-6)}$

$270a^2+90=130b$

$b^2-12ab+36a^2=ab$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$\cancel{b-6a=y-6-6x+6}$

$x^2+y^2\geq 2xy$

$b\geq 6a$

$b-6a\geq 0$

$b\geq 6a$

$2b^2\geq 13ab$

$$\begin{cases} b^2+9a^2=90 \\ b-6a=\sqrt{ab}=b^2+36a^2=13ab \end{cases}$$

$b^2+9a^2\geq 2\sqrt{3ba}$

$90\geq b^2+9a^2\geq 6ab$

$90\geq 6ab$

$t\cdot 12^{t-1}+t\cdot 13^{t-1}$
$t(12^{t-1}+5^{t-1})$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 4\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta$

$(2\cos^2 2\alpha - 1)$

$2\sin(2\alpha+2\beta)^2$

$\frac{\sin 2t}{\cos 2t} = \frac{2\sin t\cos t}{\cos^2 t - \sin^2 t} =$

$= \frac{2tg\,t}{...}$

$12^t + 5^t \geq 13^t$

$4 = \log_5 a$

$5^4 = a$

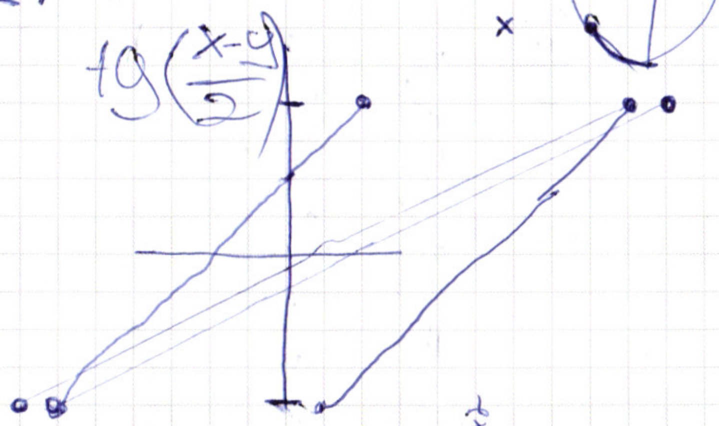
$\log_5(a \cdot 3) = 6$

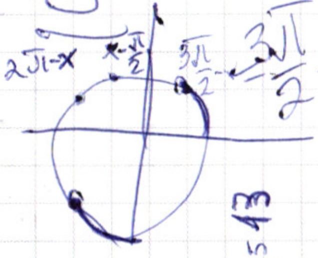
$a^{\log_5 12} \geq a + 13^{\log_5 a}$

$a^{\log_5 12} \geq a + a^{\log}$

$-\sin x = \cos y$

$tg\left(\frac{x-y}{2}\right)$





$2\pi - x$ $\quad x - \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{3\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{2} - x$

$\pi - x + \frac{\pi}{2} = $

$\pi - a > 0$

$\frac{3\pi}{2} - 2\pi + x$

$x - \frac{\pi}{2}$

$a = 26x - x^2$

$2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta$

$tg\left(\frac{x}{2}\right) =$

$-2\sin^2 x = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

$-2\sin^2 x = 2\sin x \cdot \cos y$

$a^{1.45} + a \geq a^{1.5}$

$a^t + a \geq a^{t+2}$

$a^{\log_5 12} + a^1 \geq a^{\log_5 13}$

$12^2 + 25 \geq 13^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

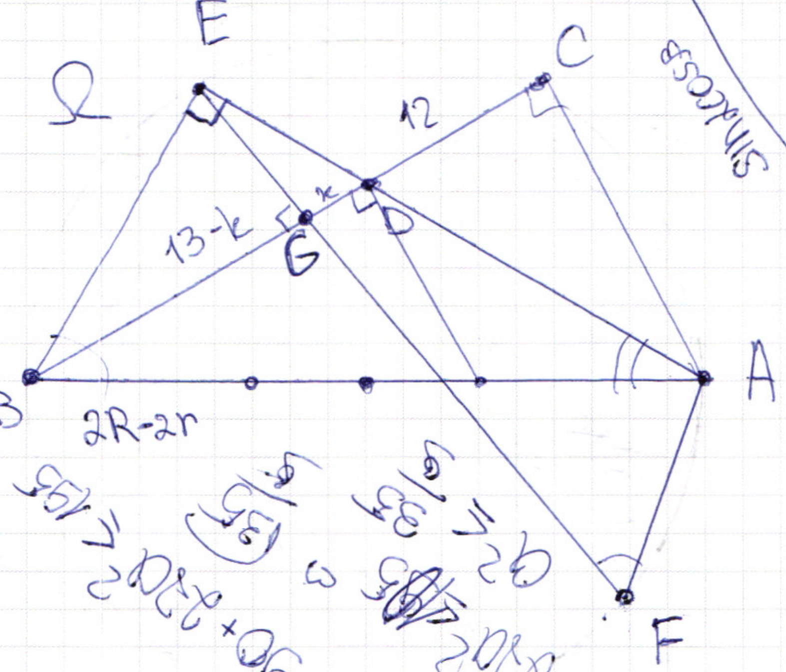
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

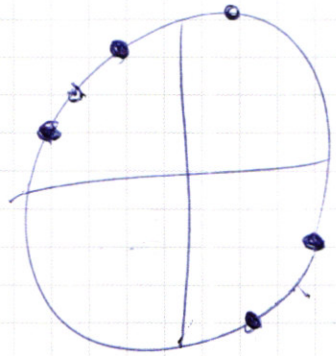
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



r R



$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$

$(2R-2r)\cdot 2R = 13^2$

$4(R-r)\cdot R = 13^2$

$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$

$1-2\sin^2 x = \cos 2x$

$2\cos^2 x - 1$

$EG \cdot GF = (13-k)(12+k)$

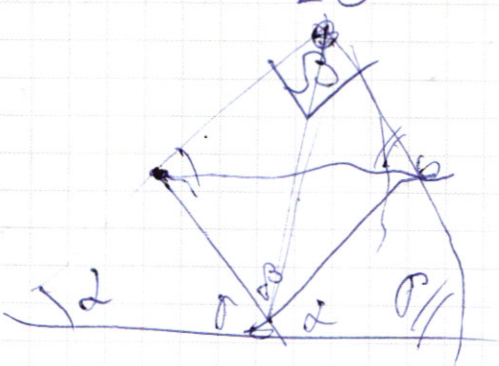
$AD \cdot ED = 12 \cdot 13$

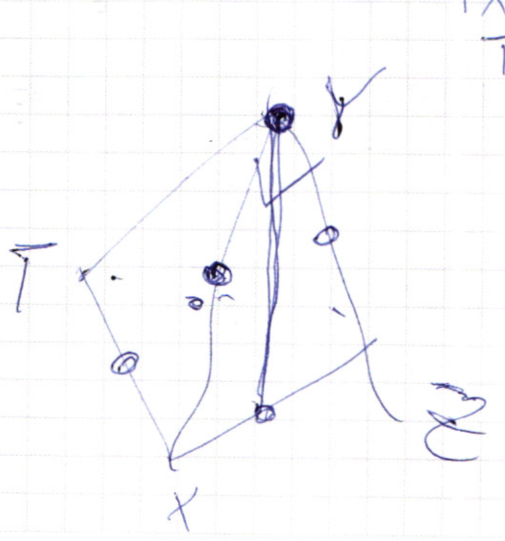
$ED^2 + EG^2 = k^2$

$XY = \sqrt{3}$

$TX = \sqrt{2}$

$TZ = 2$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$

$f(1)+f(1)=f(1)$

$f(1)=0$

$f(3)=0$

$f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=f(5)+f\left(\frac{7}{5}\right)$

1 1 0

$f(7)=1$

$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)$

$f(11)=2$

$f(k)=-f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(8)=f(2)+f(2)+f(2)$

$f(19)=4$

$f(6)=f(3)+f(2)$

$f(23)=5$

$\frac{6}{27}$ $\frac{27}{6}$ $f(6)$

$f(25)=2$

$f(1)+f(1)=f(1)$

$f(1)=0$

$f(18)=f(9)+f(2)=$

$=f(6)+f(3)$

$f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0$

$f(a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)$

$\frac{28}{4}$ $\frac{4}{28}$

$\frac{4}{4}$ $\frac{5}{5}$

$f\left(\frac{a}{b}\right)=0$

4 6 8 9 12 16 18 24 27

$f(a)=f(b)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{8-6x}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2}$$

$18x^2-51x+28 = 2\cancel{(2)}\cancel{8^2}$ $\quad 18\left(x^2-\frac{51}{18}x+\frac{28}{18}\right)$

$$-2+\frac{4}{3x-2} \geq ax+b$$

$$-1 = 2 \geq a+b \geq -5 = -2$$

$$\frac{8\overset{-4}{-6x}}{\underset{\overset{\shortparallel}{4}}{3x-2}} = 18x^2-51x+28$$

$\overset{\shortparallel}{-2}$ $\quad 4 \geq a$

$18\cdot 4 \quad -102 \quad +28$

$72+28-102$

$-1 \geq 2a+b$

$5 \geq -a-b$

$$-2 \quad -1 \geq 2a+b \geq -2$$

$$2 \geq a+b \geq -5 \qquad a \geq -4$$

a $\quad 2a+b \geq -2$

$-a-b \geq -2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)