МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

Заметим, что $xy-6x-y+6 \geq 0$ иначе выражение $\sqrt{xy-6x-y+6}$ - не имеет смысла, тогда:

$xy-6x-y+6 = (x-1)(y-6) \geq 0 \Rightarrow$ либо $x \leq 1$ и $y \leq 6$ либо ~~x≥y~~ $x>1$ и $y>6$.

Теперь решим первое уравнение системы:

$y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}$

$y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6$ решим его относительно y

$y^2-(13x-1)\cdot y+36x^2+6x-6=0$

$D=(13x-1)^2-4(36x^2+6x-6) = 25x^2-50x+25 = 25(x-1)^2$

$\sqrt{D} = 5|x-1|$

$y_{1;2} = \frac{(13x-1) \pm 5|x-1|}{2}$ т.к. перед модулем стоит $\pm$ и в модуле есть знак "−", то решений (y) этого уравнения всего 2 разновидности: $y_1 = 4x+2$ $y_2 = 9x-3$.

Легко заметить, что эти y решения удовлетворяют изначальному условию если $x \leq 1$, то $y \leq 6$, если $x>1$, то $y>6$ ($4x+2$ и $9x-3<6$ если $x<1$, $4x+2=9x-3=6$ если $x=1$

$4x+2$ и $9x-3>6$ если $x>1$). Однако появились посторонние корни.

Теперь подставим y_1 и y_2 во второе уравнение и решим его:

$9x^2+y^2-18x-12y=45$.

$3^2(x-1)^2+(y-6)^2=90$

1) $3(x-1)^2+(4x+2-6)^2=90$ 2) $3(x-1)^2+(9x-3-6)^2=90$

$3(x-1)^2+4(x-1)^2=90$ $3(x-1)^2+$

$7(x-1)^2=90.$

$(x-1)^2=\frac{90}{7}$

$x-1=\pm\sqrt{\frac{90}{7}}$

$x=\pm3\sqrt{\frac{10}{7}}+1$

1) $3^2\cdot(x-1)^2+(4x+2-6)^2=90.$

$9(x-1)^2+16(x-1)^2=90.$

$(x-1)^2=\frac{90}{25}$

$x-1=\pm\frac{3}{5}\cdot\sqrt{10}$

$x=\pm\frac{3}{5}\sqrt{10}+1$

$x_1=\frac{3}{5}\sqrt{10}+1$ $x_2=-\frac{3}{5}\sqrt{10}+1$

$y_1=4\cdot\frac{3}{5}\sqrt{10}+6$ $y_2=-4\frac{3}{5}\sqrt{10}+6$

2) $9(x-1)^2+(9x-3-6)^2=90.$

$9(x-1)^2+81(x-1)^2=90.$

$(x-1)^2=1.$

$x-1=\pm1$

$x_3=0$ $x_4=2.$

$y_3=-3$ $y_4=15.$

Однако, т. к. при решении первого уравнения мы возвели в квадрат, то могли появиться лишние корни. Подставив 4 пары чисел $(x;y)$ в перве уравнение мы выяснили, что пары чисел $(x_1;y_1)$ и $(x_3;y_3)$ - не являются решением этого равенства. Т. к. корни в процесса не "исчезали", то есть изначальные корни сохранились, то все решения данной системы - это пары чисел:

$\left(-\frac{3}{5}\sqrt{10}+1; -4\frac{3}{5}\sqrt{10}+6\right)$ и $(2;15)$

Ответ: $(2;15)$ и $\left(-\frac{3}{5}\sqrt{10}+1; -4\frac{3}{5}\sqrt{10}+6\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

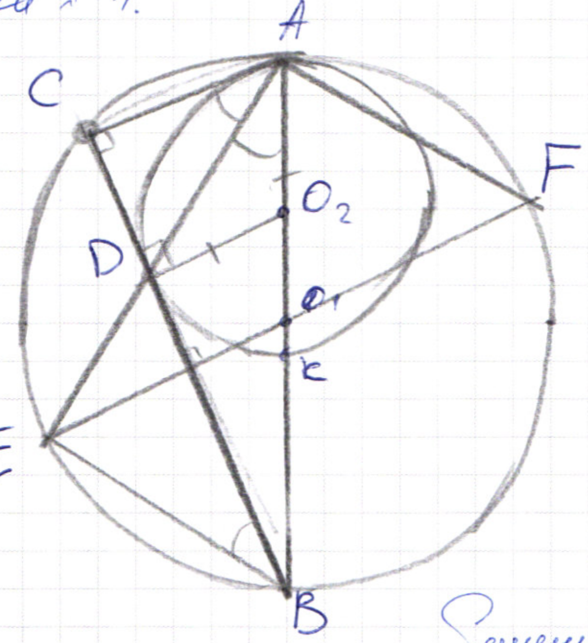
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4.



Дано: окружности Ω и ω касаются в A. AB - диаметр Ω. $CD = 12$, $BD = 13$

Найти: 1) R, r 2) $\angle AFE$ 3) S_{AEF}

Решение:

1) Пусть R и r - радиусы Ω и ω соответственно, а O_1 и O_2 - их центры. Тогда заметим, что $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$. В самом деле: $\angle BDO_2 = 90°$ (BC-кас) и $\angle BCA = 90°$ (AB-диаметр), а $\angle ABC$ - общий $\Rightarrow$ по 2-м углам треугольники подобны. Значит: $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB}$. Выразим BO_2 и AB через R и r: $AB = 2R$ $BO_2 = AB - AO_2 = 2R - r$ (прим: точки $A\,O_2\,O_1$ лежат на одной прямой, т.к. это свойство касающихся окружностей, точки AO_1B лежат на одной прямой т.к. AB - диаметр, а O_1-центр $\Rightarrow$ $A\,O_2\,O_1\,B$ - одна прямая). Тогда: $\frac{13}{12+13} = \frac{2R-r}{2R}$

$26R = 50R - 25r \Rightarrow 25r = 24R$.

Так же известно, что $\frac{DO_2}{AC} = \frac{BD}{BC}$ ($\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$)

$\Rightarrow \frac{r}{AC} = \frac{13}{25} \Rightarrow AC = \frac{25}{13}r = \frac{24}{13}R$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\triangle ABC$ - прямоугольный, и по теореме Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$(2R)^2 = 25^2 + \left(\frac{24R}{13}\right)^2$

$4 \cdot 169 \cdot R^2 = 25^2 \cdot 169 + 24^2 R.$

$(4 \cdot 169 - 24^2) R^2 = 25^2 \cdot 169.$

$4 \cdot 25 \cdot R^2 = 25^2 \cdot 169.$

$R^2 = \frac{25 \cdot 169}{4}$

$R = \frac{5 \cdot 13}{2}$ Тогда $r = \frac{24}{25} R = \frac{13 \cdot 12}{5}$

2) $\triangle AO_2D$ - равнобедр. $(AO_2 = DO_2 = r) \Rightarrow \angle O_2AD = \angle O_2DA$.
Так же, $\angle O_2DA = \angle CAD$ ($DO_2 \perp BC$ и $AC \perp BC$)
$\Rightarrow AE$ - биссектриса $\angle CAB$. Тогда E - середина дуги
$\Rightarrow BE = EC$ и EF - это серединный перпендикуляр к BC
а раз $CO_1 = BO_1 = R$, то $O_1 \in EF$ или же EF проходит
через O_1. Тогда $\angle AFE = \angle ABE$. а $\angle ABE = \arccos\left(\frac{BE}{AB}\right)$
$\triangle BDE \sim \triangle ABE$ ($\angle AEB$ - общий $\angle CBE = \angle CAE = \angle BAE$)
$\Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{AE}$, Так же подобны $\triangle CDE$ и $\triangle ADB$ ($CABE$ - вписанный) $\Rightarrow \frac{CE}{AB} = \frac{CD}{AD} = \frac{BE}{AB}$ $(CE = BE)$
Тогда: $BD \cdot AE = BE \cdot AB$ и $BE \cdot AD = CD \cdot AB$.
$BD \cdot AE \cdot CD \cdot AB = BE^2 \cdot AB \cdot AD$
$BE = \sqrt{\frac{BD \cdot CD \cdot AE}{AD}}$. $\triangle ADK \sim \triangle AEB$ (K - точка пересечения ω и AB тогда $\angle ADK = \angle AEB = 90^\circ$ и $\angle BAE$ - общий) $\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AK} = \frac{2R}{2r} = \frac{R}{r} = \frac{25}{24}$
$\Rightarrow BE = \sqrt{\frac{13 \cdot 12 \cdot 25}{24}} = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$ $AB = 2R = 13 \cdot 5$.
$\angle ABE = \arccos\left(\frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2} \cdot 13 \cdot 5}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{26}}\right)$

3) $S_{AEF} = S_{EAB} =$ ($\triangle AEF = \triangle EAB$ т.к. $EF = AB$, AE - общая и $\angle EAF = \angle AEB = 90$). $= \frac{AE \cdot EB}{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4 (продолжение)

Т.к. $\triangle EAB$ прямоугольный, то по теореме Пифагора:

$AE^2 + BE^2 = AB^2$

$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{13^2 \cdot 25 - \frac{25 \cdot 13}{2}} = 5\sqrt{13^2 - \frac{13}{2}} = 5\sqrt{\frac{13 \cdot 25}{2}}$

$= 25 \cdot \sqrt{\frac{13}{2}}$

Тогда $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle EAB} = \frac{AE \cdot BE}{2} = \frac{25\sqrt{13} \cdot 5\sqrt{13}}{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{125 \cdot 13}{4} = 406{,}25$

Ответ: 1) $R = \frac{13 \cdot 5}{2}$ $r = \frac{13 \cdot 12}{5}$ 2) $\arccos\sqrt{\frac{1}{26}}$ 3) $406{,}25$

Задача №5.

Рассмотрим функцию f от рационального числа $\frac{k}{p}$ и сведём её к сумме функций от целых ~~ч~~ чисел:

Заметим что: $f(1) = f(\frac{1}{a}) + f(a)$ (если $a \neq 0$)

Причём по условию $f(1) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$. Тогда:

$f(\frac{k}{p}) = f(k) + f(\frac{1}{p}) = f(k) - f(p)$

Так же: $f(\frac{k}{p}) + f(\frac{p}{k}) = f(1) = 0$

$\Rightarrow f(\frac{p}{k}) = -f(\frac{k}{p}) \Rightarrow$ если $f(\frac{k}{p}) \neq 0$, то либо $f(\frac{k}{p}) < 1$, либо $f(\frac{p}{k}) < 1$

Значит надо найти ~~наибольшее число~~ количество таких пар k p (наши x и y) что $f(k) \neq f(p)$ причём k и p — целые.

На промежутке от 4 до 28 включительно $f(z)$ принимает значения: 0 — 9 раз; 1 — 8 раз; 2 — 3 раза; 3 — 2 раза; 4 — 2 раза; 5 — 1 раз. (когда $z \in \mathbb{N}$ и $z \in [4; 28]$).

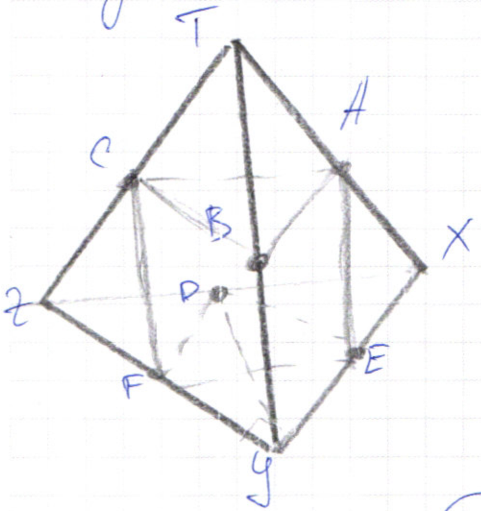
Осталось посчитать количество таких пар x и y, что $f(x) \neq f(y)$ и $f(\frac{x}{y}) < 0$. Таких пар: $9 \cdot (8+3+2+2+1) + 8 \cdot (3+2+2+1) + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2$

Задача 5 (продолжение)

$=9\cdot16+8\cdot8+3\cdot5+2\cdot3+2=231$ (при подсчёте мы выбирали "x" и "y" так, что $f(x)<f(y)$, однако точно так же можно взять так, чтобы $f(y)<f(x)$, но мы так же не учитывали, что $f(\frac{x}{y})$ может быть >0. То есть на самом деле способов выбора x и y так, чтобы ~~$f(\frac{x}{y})$~~ $f(x)\neq f(y)$ равно 462, но т.к. ровно половина из них больше нуля, то 231 – это кол-во тех $f(\frac{x}{y})$, которые <0)

Ответ: 231.

Задача №7



Дано: $TXYZ$ – пирамида

A, B, C, D, E, F – середины рёбер TX, TY, TZ, XZ, XY, YZ соответственно. Точки A, C, D, E, F и Y лежат на сфере.

$XY=\sqrt{3}$ $TX=\sqrt{2}$ $TZ=2$

Найти: 1) XZ, 2) R_m

Решение:

1) Заметим, что $DEYF$ – вписанный четырёхугольник (действительно, плоскость, являющаяся сечением сферы через точки D, E и F – образует круговое сечение, и точки D, E, Y, F лежат на окружности). ~~А~~ так как $DE \parallel FY$ и $DF \parallel YE$ (DF и FE – средние линии в $\triangle XYZ$), то: $\angle EDY=\angle DYF$ и $\angle YDF=\angle DYE \Rightarrow \angle FDE=\angle FYE$ и $\angle FDE+\angle FYE=180°$ $\Rightarrow DEYF$ – прямоугольник. Аналогично и $AEFC$ – прямоугольник. Заметим, что $AEYB$ и $CFYB$ – не прямоугольники, иначе $B\in$ сфере (но они являются параллелограммами)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7 (продолжение)

Так же $CDEB$ – прямоугольник $\Rightarrow BE \perp DE \Rightarrow$
$\Rightarrow TX \perp ZY$. Аналогично: $TZ \perp XY$ и $TY \perp XZ$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28.$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot 8 \\ \hline 96 \end{array}$$

$8-6x \geq (ax+b)(3x-2)$

$4x+2.$

$8-6x \geq 3ax^2+(3b-2a)x-2b$

$0 \geq 3ax^2+(3b-2a+6)x-(2b+8)$

$D = b^2-4ac = (3b-2a+6)^2+4\cdot 3a(2b+8) =$

$= 9b^2-12ab+6b^2+4a^2-4ab+b^2+24ab+96.$

$y = 4x+2.$

$15^{x} - 12^{x}_{4x+2} = 1 \cdot 9^{x}$

$\frac{3}{5}\sqrt{10}$, $y-6x.$ $= 2x+2$

$\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$y-6x = 4x+2-6x = 2-2x.$

$\sqrt{(x-1)(y-6)} = \sqrt{4\cdot \cancel{x}\left(\frac{3}{5}\sqrt{10}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\sqrt{10}\right)}$

$\sqrt{4\left(\frac{3}{5}\sqrt{10}\right)\left(\frac{5}{5}\sqrt{10}\right)}$

$2 \cdot x \cdot$

$2\,\frac{3}{5}\sqrt{10}.$

$2-\left(2\cdot\frac{3}{5}\sqrt{10}+2\right).$

$2-2x$

$2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{10}$

$2(x-1)$

$2\cdot\frac{3}{5}\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик

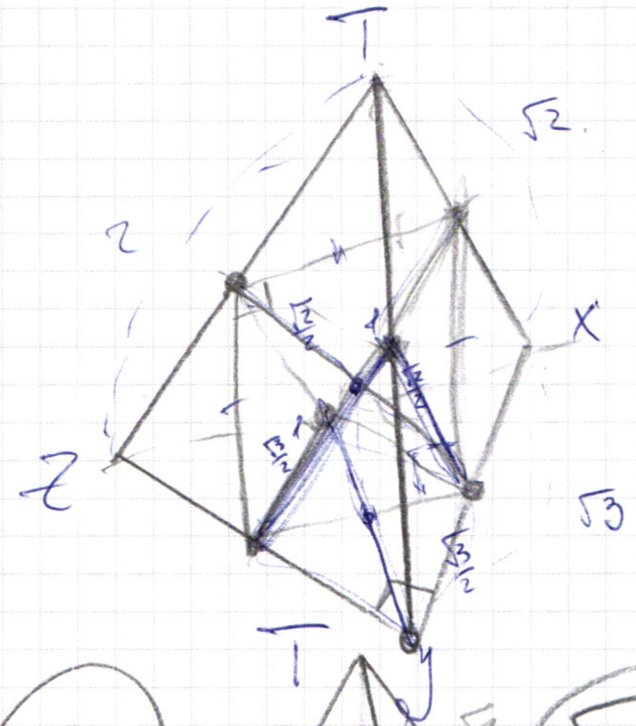
(Поставьте галочку в нужном поле)

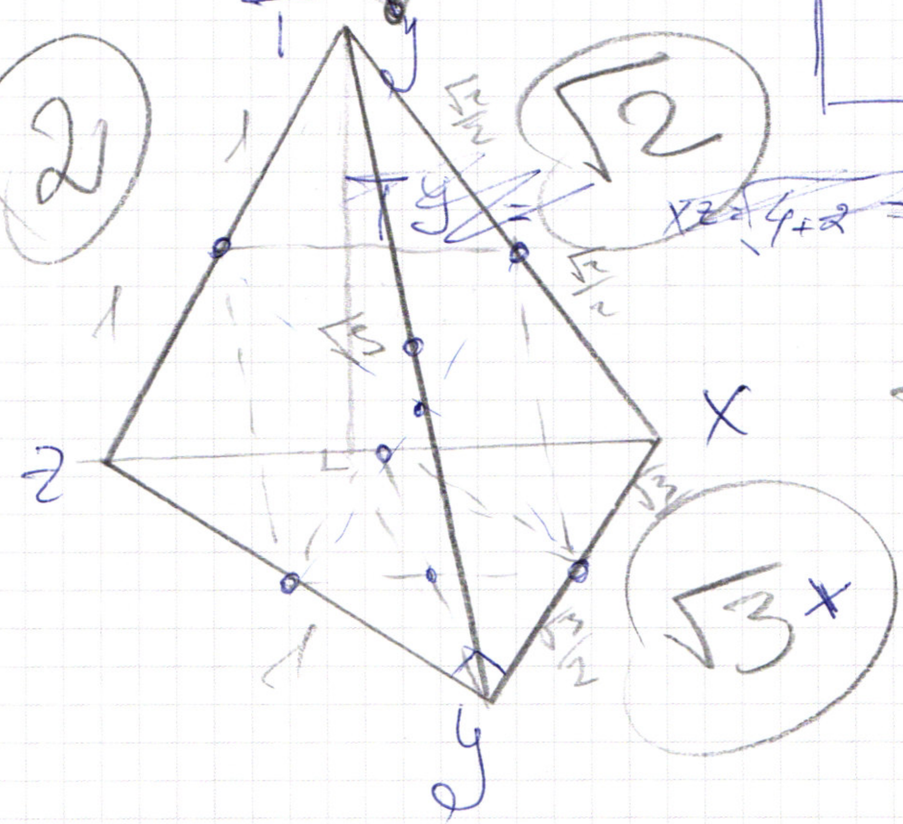
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$XZ - ?$

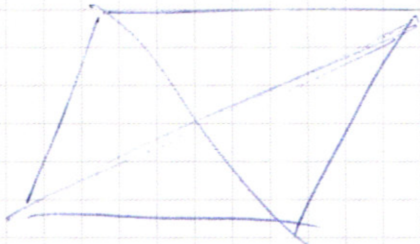
$r_{оп} - ?$

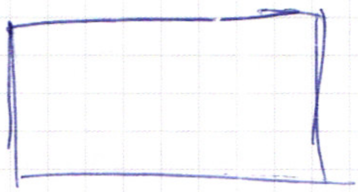




~~$TY = $~~

$XZ = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$





$TY \perp ZX$.

$TY \perp XY$

и $TY \perp ZY$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5 (продолжение)

$= 9\cdot16+8\cdot8+3\cdot5+2\cdot3+2 = 231$ (при подсчёте мы брали "x" из одного множества и "y" из другого, однако точно так же можно взять так, чтобы $f(y) < f(x)$, но мы так же не учитывали, что $f(\frac{x}{y}) \geq 0$. То есть на самом деле способов выбора $f(x) \neq f(y)$ равно 462, но т.к. ровно половина из них больше нуля, то 231 - это кол-во тех $f(\frac{x}{y})$, что <0).

Ответ: 231.

$8-6x \geq (3x-2)(ax+6)$

$(ax+6) \geq 18x^2-51x+28.$

$8-6x \geq (18x^2-51x+28)(3x-2).$

$D = 51^2 - 4\cdot28\cdot18$

$51\cdot51$: 51, 255, 2601.

$28\cdot18$: 224, 28, 504.

$504\cdot4 = 2016.$

$2601-2016 = 585$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

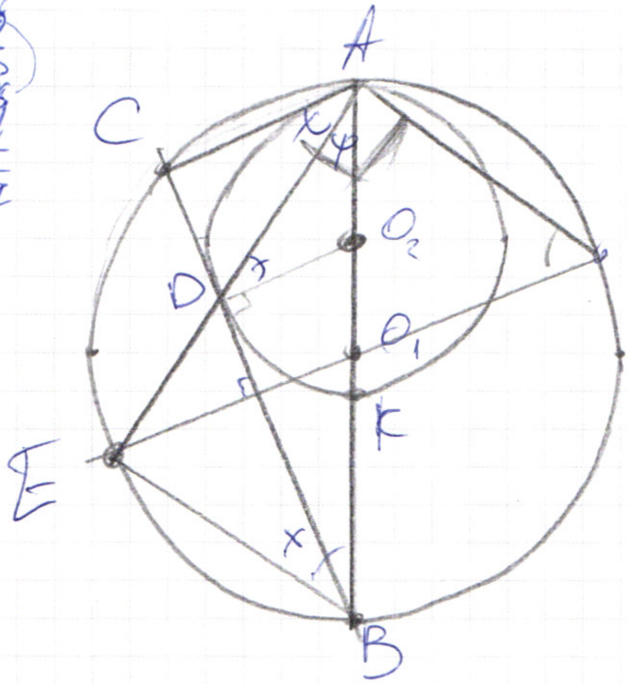
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$60+15+29+2 = 87$$

$$5\cdot 16 \cdot 9 = 144$$

$$144+87 = 231$$



$\angle AFE - ?$

$\arccos(EB : AB)$ $\overset{\shortparallel}{(EC : AB)}$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{AE}$$

$$\frac{BE}{AB} = \frac{CD}{AD}$$

$EC = EB.$

$$BD\cdot AE = BE \cdot AB$$
$$BE\cdot AD = CD \cdot AB$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AK} = \frac{2R}{2r} = \frac{R}{r} = \frac{25}{24} \qquad BE^2 = \frac{BD\cdot CD\cdot AE}{AD}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AK} = \frac{2R}{2r} = \frac{R}{r} \overset{\shortparallel}{=} \frac{25}{24} \qquad \frac{25}{24\cdot 2}\cdot 13\cdot 12 = BE^2 = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$$

~~$BD\cdot AE = AB\cdot BE$~~

$$CD\cdot AB = BE\cdot AD$$

$$\frac{25\cdot 13\cdot 12}{24} = \frac{25\cdot 13}{2} \Rightarrow BE = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$\frac{BE}{AB} = \frac{5\sqrt{13}\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 13\cdot 5} = \sqrt{\frac{1}{13\cdot 2}} = \cos ABE = \cos AFE$$

$$\sin = \frac{25\sqrt{13}\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 13\cdot 5} = \frac{5}{\sqrt{26}} \quad \Rightarrow \angle AFE = \arccos\sqrt{\frac{1}{13\cdot 2}} = \sqrt{\frac{1}{26}}$$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad f(p) = [\frac{p}{4}]$

4 - 5

456

$4 \leq x \leq 28 \quad 4 \leq y \leq 28.$

$f(1) = 0 = f(2) = f(3)$ $\quad f(4) = 0 \quad f(5) = 1.$

28

4

25.

$f(6) = 0. \quad f(7) = 1. \quad f(8) = 0 \quad f(9) = 0 \quad f(10) = 1 \quad \boxed{f(11) = 2.}$

$f(12) = 0 \quad f(13) = 3 \quad f(14) = 1 \quad f(15) = 1 \quad f(16) = 0$

$\frac{4}{8}\ \frac{5}{10}\ \frac{6}{12}\ \frac{14}{28}\ f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\frac{1}{2}\ \frac{2}{4}$ $\quad f(1) = 0. = f\left(\frac{1}{5}\right) + f(5)$

$\boxed{f(17) = 4} \quad f(18) = 0 \quad \boxed{f(19) = 4} \quad f(20) = 1 \quad f(21) = 1$

$\boxed{f(22) = 2} \quad f(23) = 5 \quad f(24) = 0 \quad \boxed{f(25) = 2}$

$f(26) = 3 \quad f(27) = 0 \quad f(28) = 1.$

$\frac{1}{5} = \frac{1}{7} = \frac{1}{10} = \frac{1}{14} = \frac{1}{15} = \frac{1}{20} = \frac{1}{21} = \frac{1}{28} = -1.$

4 - 28

$\frac{k}{p}\ \frac{p}{k} = f(1)$

$f\left(\frac{k}{p}\right) + f\left(\frac{p}{k}\right) = f(1) = 0.$

$\Rightarrow f\left(\frac{k}{p}\right) = -f\left(\frac{p}{k}\right).$

$1, \frac{1}{2},$ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27.

$f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p) = 0$

$f\left(\frac{k}{p}\right) = -f\left(\frac{p}{k}\right)$

$f\left(\frac{k}{p}\right) = f(k) + f\left(\frac{1}{p}\right) = f(k) - f(p).$

$f\left(\frac{k}{p}\right) = 0$ если $\boxed{f(k) - f(p) = 0}$

черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$169 - 144 = 25$

$24:4=6$

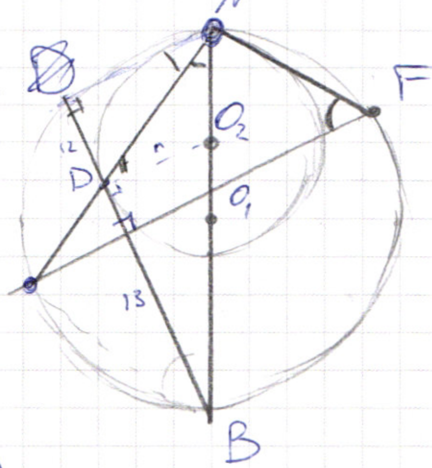
$24 \cdot 6 = 144$

r и R, $\angle AFE$ и S_{AEF}

$\Omega > \omega$

$\sqrt{64+}$

169



$CD = 12 \quad BD = 13$

$\cancel{\dfrac{R+r}{2R} = \dfrac{13}{25}}$

$\cancel{25(R+r) = 26R}$

$\dfrac{BO_2}{AB} = \dfrac{13}{25}$

$\dfrac{2R-r}{2R} = \dfrac{13}{25}$

$50R - 25r = 26R$

$24R = 25r$

$13^2 - \dfrac{13}{2}$

$4\cdot 13^2 - 2\cdot 13$

$= \dfrac{2\cdot 13\,(2\cdot 13-2)}{4}$

$\cancel{EC = AC}$

$\cancel{\dfrac{EC}{AB} = \dfrac{12}{AD}}$

$13^4 \cancel{\dfrac{13\cdot 12}{2}}$

$\dfrac{r}{x} = \dfrac{DO_2}{CA} = \dfrac{13}{25} \Rightarrow x = \dfrac{25r}{13} = \dfrac{24R}{13}$

$13^2 - \dfrac{13}{2} = \dfrac{4\cdot 13^2 - 2\cdot 13}{4}$

$(2R)^2 = 25^2 + \left(\dfrac{24R}{13}\right)^2$

$4\cdot 169\cdot R^2 = 25^2\cdot 169 + 24^2 R$

$(4\cdot 169 - 24^2)R^2 = 25^2\cdot 169$

$4\cdot 25\, R^2 = 25^2\cdot 169$

$R = \sqrt{\dfrac{25\cdot 169}{4}} = \dfrac{13\cdot 5}{2}$

$r = \dfrac{24}{25}R = \dfrac{13\cdot 12}{5}$

$EC = EB$

$\dfrac{2\cdot 13\,(2\cdot 13-1)}{4} = \dfrac{13\cdot 25}{2}$

BD AB

$AE = \sqrt{AB^2 - EB^2}$

$= \sqrt{13^2\cdot 25 - \dfrac{25\cdot 13}{2}}$

$5\sqrt{13^2 - \dfrac{13}{2}} = 25\sqrt{\dfrac{13}{2}}$

$\cancel{\dfrac{BD\cdot AE}{CD\cdot AB^2} \quad \dfrac{AB}{AD}}$

$\cancel{AE = \dfrac{AB^2\cdot CD}{BD\cdot AD}}$

$S = \dfrac{25\sqrt{\dfrac{13}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{13}}\cdot 5\sqrt{\dfrac{13}{2}}}{2}$

12 – 0

8 – 1

3 – 2

2 – 3

4 – 4

1 – 5

$f\left(\dfrac{25}{2}\right) = 2$

$\dfrac{125\cdot 13}{4}$

9 – 0

$24 + 16 + 16 + 8 + 6 + 6 + 6 + 3 + 4 + 4 + 2 + 2 = 8$

$64 + 15 + 6 + 2$

$8\cdot 3 + 8\cdot 2 + 8\cdot 2 + 8$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta$

№2

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$x<1$ $4x+2<6$ +
$9x-3<6$ +
$x>1$ $4x+2>6$ +
$9x-3>6$ +
36

$(3x\cancel{+3})^2+(y\cancel{+6})^2$ $\cancel{3x+3}$ $(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$xy-6x-y+6\geq 0$

$(x-1)(y-6)\geq 0$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$x<1$ $y<6$

$y>6$ $x>1$!

$y^2-(13x-1)y+36x^2+6x-6=0$

$169x^2-26x+1$

$D=(13x-1)^2-4\cdot(36x^2+6x-6)=$

$=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=25x^2-50x+25=$

$=25(x^2-2x+1)=25(x-1)^2$ $\sqrt{D}=5|x-1|$

$y=\frac{(13x-1)\pm 5|x-1|}{2}$ $x<1$

$x<1$: $\frac{13x-1+5(1-x)}{2}=\frac{8x+4}{2}=4x+2$

$\frac{13x-1-5(1-x)}{2}=\frac{18x-6}{2}=9x-3$

~~$x>1$: $\frac{13x-1+5x-5}{2}=\frac{18x-6}{2}=9x-3$~~

$y_1=4x+2$ +

$y_2=9x-3$ +

$(3x-3)^2+(4x+2-6)^2=90$

$(x-1)^2=\frac{90}{12}$

$x-1=\frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{3}}$

$\cancel{9x}$ $3(x-1)^2+4(x-1)^2=90$

$(x-1)^2=\frac{90}{7}$ $x-1=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{7}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)