МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

+

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

+

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

+

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases} \qquad tg\alpha = ?$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{\cancel{2}}{17} \end{cases} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

Заметим: $\sin(2\alpha+2\beta) = -\cos 2\beta \to \alpha = \pi/2$, но по условию

$tg\alpha$ - имеет значение. : $\alpha \neq \pi/2$

$$\sin(2\alpha)\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}} \pm \frac{4}{\cancel{\sqrt{17}}}\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}$$ Пусть $\sin(2\alpha) = a$

~~$\sin(2\alpha) \pm 4\cos(2\alpha) = 1$~~

$a \pm 4\sqrt{1-a^2} = -1 \qquad a \in [-1;1]$

$a+1 = \pm 4\sqrt{1-a^2}$

$a^2+2a+1 = 4(1-a^2)$

$5a^2+2a-3=0$

$D/4 = 1+15=16$

$a = \frac{-1 \pm 4}{5}$

$\to a = -1; \frac{3}{5}$

ОБР ЗАМЕНА:

$\sin(2\alpha) = -1; \frac{3}{5}$ (-1 - точки разрыва тгнс.)

~~$2\alpha =$~~

$\sin(2\alpha) = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos(2\alpha) = \pm\frac{4}{5}$

$$tg(2\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$tg(2\alpha) = \pm\frac{3}{4}$

$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \pm\frac{3}{4}(1-tg^2\alpha) = 2tg\alpha$

Замена $tg\alpha = t$

(+): $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}t^2 = 2t \quad |\cdot 4$

$3 - 3t^2 = 8t$

$3t^2 + 8t - 3 = 0$

$D/4 = 16 + 9 = 25 \quad t = \frac{-4 \pm 5}{3} \quad t = \frac{1}{3};\ t = \frac{-9}{3} = -3$

(−): $3t^2 - 3 = 8t$

$3t^2 - 8t - 3 = 0$

$D/4 = 25 \qquad t = \frac{4 \pm 5}{3} \qquad t = -\frac{1}{3};\ t = \frac{9}{3} = 3$

Ответ: $\pm\frac{1}{3};\ \pm 3$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Rightarrow \underset{\geq 0}{(3x-3)^2}+\underset{\geq 0}{(y-6)^2}=0$$

$\Downarrow$ т.к. $3x-3=0$ и $y-6=0$ (метод Мажоранта)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ x=1 \\ y=6 \end{cases}$$? (Проверить)

$6-6=\sqrt{6\cdot1-6\cdot1-6+6}$ - верно

Ответ: $(1;6)$

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}=x^2+(26x-x^2)^{\log_5 13}$$

$\boxed{\text{ОДЗ: } 26x-x^2\geq 0}$ Заметим: $0<\log_5 12<\log_5 13$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x\geq x^2+(26x-x^2)^{\log_5 13}$$

$$26x-x^2\geq(26x-x^2)^{\log_5 13}-(26x-x^2)^{\log_5 12}$$

Замена: $26x-x^2=a$

$$a\geq a^{\log_5 13}-a^{\log_5 12}$$

$$f(a) = a^{\log_5 13} - a^{\log_5 12}$$

$$a \geq f(a)$$

Заметим:

$a = 0$ - решение

Дальше будут рассмотрены $a \neq 0$

$$\log_5 13 > 1 \Rightarrow \lim_{a \to \infty} \frac{f(a)}{a} = \infty$$

$$f'(a) = \log_5 13 \, a^{(\log_5(13) - 1)} - \log_5 12 \, a^{(\log_5(12) - 1)} = 0$$

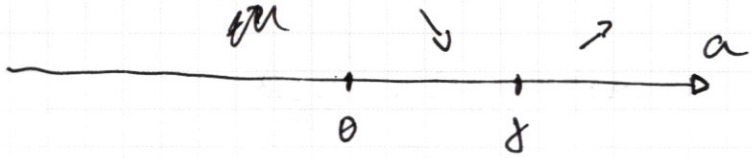
$$a^{\log_5 13} - \frac{\log_5 12}{\log_5 13} a^{\log_5 12} = 0$$

$$a^{\log_5 13} = \frac{\log_5 12}{\log_5 13} a^{\log_5 12} \rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$a^{\log_5 13 - \log_5 12} = \log_{13} 12$$

$$\boxed{a = (\log_{13} 12)^{\frac{1}{\log_5 13 - \log_5 12}}} = \gamma \leftarrow \text{Пусть эта точка - } \gamma$$

$\rightarrow$ две точки перегиба



$\rightarrow$ 2 решения: $a_1 = 0 \quad a_2 > \gamma$

$$a \geq a^{\log_5 13} - a^{\log_5 12} \rightarrow$$

$$a = a^{\log_5 13} - a^{\log_5 12} \quad \Big| \cdot \frac{1}{a} \rightarrow 1 = a^{\log_5(13) - 1} - a^{\log_5(12) - 1}$$

$$a = 5^b$$

$$5^b = 13^b - 12^b \quad \Bigg\{ \begin{array}{l} 169 - 144 = 25 \Rightarrow b = 2 \\ a = 25 \end{array}$$

$a \in \cancel{\{0\} \cup [25;+\infty)}\ [0;25]$

Обр. замена:

$(26x - x^2) \in \cancel{\{0\} \cup [25;+\infty)}\ [0;25]$

$\cancel{26x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 26}$

$\cancel{26x - x^2 \geq 25}$

$\cancel{x^2 - 26x + 25 \leq 0}$

$\cancel{(x-1)(x-25) \leq 0 \Rightarrow x \in [1;25]}$

~~Ответ:~~ $\cancel{x \in \{0\} \cup [1;25] \cup \{26\}}$

$$\begin{cases} 26x - x^2 \leq 25 \\ 26x - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 26x + 25 \geq 0 \\ x^2 - 26x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;1] \cup [25;+\infty) \\ x \in [0;26] \end{cases}$$

Ответ: $x \in [0;1] \cup [25;26]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(b) = -f\left(\frac{1}{b}\right)$:

$f = 0$ - 9 случаев

$f = 1$ - 8 случаев

$f = 2$ - 3 случая

$f = 3$ - 2 случая

$f = 4$ - 2 случая

$f = 5$ - 1 случай

~~[illegible]~~

~~$N = 9\cdot(25-9) + 8\cdot(25-9-8) + 3\cdot(25-9-8-3) + 2\cdot(25-9-8-3-2) + 2(25-9-8-3-2-2) =$~~

~~$= 9\cdot 16 + 8\cdot 8 + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 2 =$~~

~~$= 144 + 64 + 15 + 6 + 2 = 208 + 23 =$~~

~~$= 231$~~

~~Ответ: 231~~

$N = 9(25-9) + 8(25-9-8) + 3(25-9-8-3) + 2\cdot(25-9-8-3-2) + 2(25-9-8-3-2)$

$= 231$

Ответ: 231

№5

f опр на „+" рац. числах $\forall a,b\ f(ab)=f(a)+f(b)$,

$f(p)=[p/4]$, p – простое

$N(x,y)$: $4\le x\le 28$ $4\le y\le 28$ $f(x/y)<0$ $x,y\in N$

Если $f(x/y)<0$, то $f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ...

$f(2)=0$, $f(3)=0$ $f(5)=1$ $f(7)=1$ $f(11)=2$ $f(13)=3$ $f(17)=4$

$f(19)=4$ $f(23)=5$ $\boxed{f(29)=7}$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$ $f(1)=0$, т.к. $f(a\cdot 1)=f(a)+f(1)$

$f(6)=0$ $f(8)=0$ $\boxed{f(9)=0}$ $f(10)=1$ $\boxed{f(12)=0}$

$f(14)=1$ $f(15)=1$ $\boxed{f(16)=0}$ $\boxed{f(18)=0}$ $f(20)=1$ $f(27)=0$

$f(21)=1$ $f(22)=2$ $\boxed{f(24)=0}$ $f(25)=2$ $f(26)=3$ $f(28)=1$

$$\begin{cases} f(ab)=f(a)+f(b) \\ f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{b}\right) \end{cases} \Rightarrow f(ab)-f\left(\frac{a}{b}\right)=f(b)-f\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\cancel{f(2\cdot b)-f\left(\frac{2}{b}\right)=f(b)-f\left(\frac{1}{b}\right)}$$

$$\cancel{f(b)-f\left(\frac{2}{b}\right)}$$

$$f\left(\frac{1}{b}\right)=-f(ab)+f\left(\frac{a}{b}\right)+f(b)$$

$$\cancel{f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2\cdot 2)-f(1)-f(2)=0}$$

$$f\left(\frac{1}{b}\right)=-f(b^2)+\cancel{f(1)}^{=0}+f(b)=-f(b^2)+f(b)=-f(b)$$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

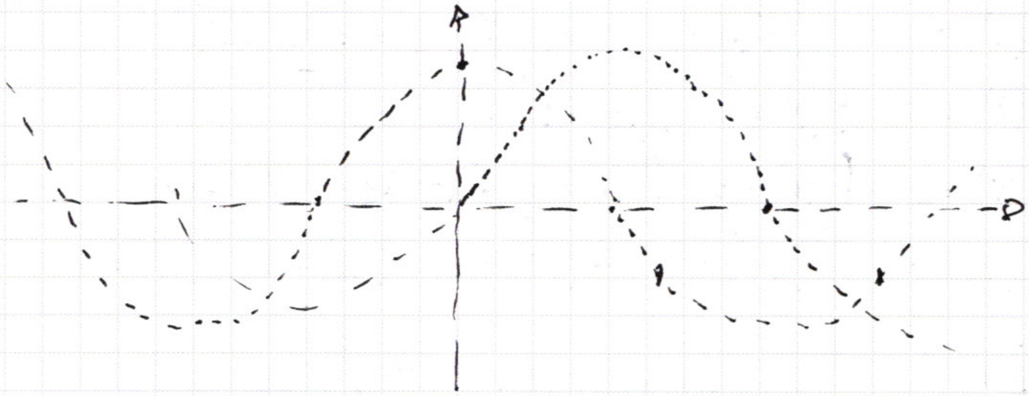
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \end{cases}$$

$$\sin(2a+4\beta) = \sin(2a+2\beta)\cdot\cos2\beta + \cos(2a+2\beta)\cdot\sin2\beta$$

$$\begin{cases} \sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(2a+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin(2a+2\beta)\cos2\beta + \cos(2a+2\beta)\cdot\sin2\beta + \sin2a = -\frac{2}{17} \end{cases}$$



~~А: $\cos(2a+2\beta) = +\frac{4}{\sqrt{17}}$~~

$$\begin{cases} \sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin2a\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos2a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big| \cdot\frac{1}{\cos2a} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos2\beta \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin2\beta + \sin2a = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

Замена: $\sin(2a) = x \quad \sin(2\beta) = y$

№6

$$f(x)=\frac{8-6x}{3x-2} \qquad g(x)=18x^2-51x+28$$

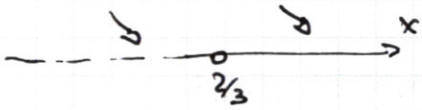
$f(x) \geq ax+b \geq g(x)$

f:

$f(2)=-1 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x+\frac{2}{3}\right)=+\infty$

$f(x)=\frac{4}{3x-2}-2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-2$

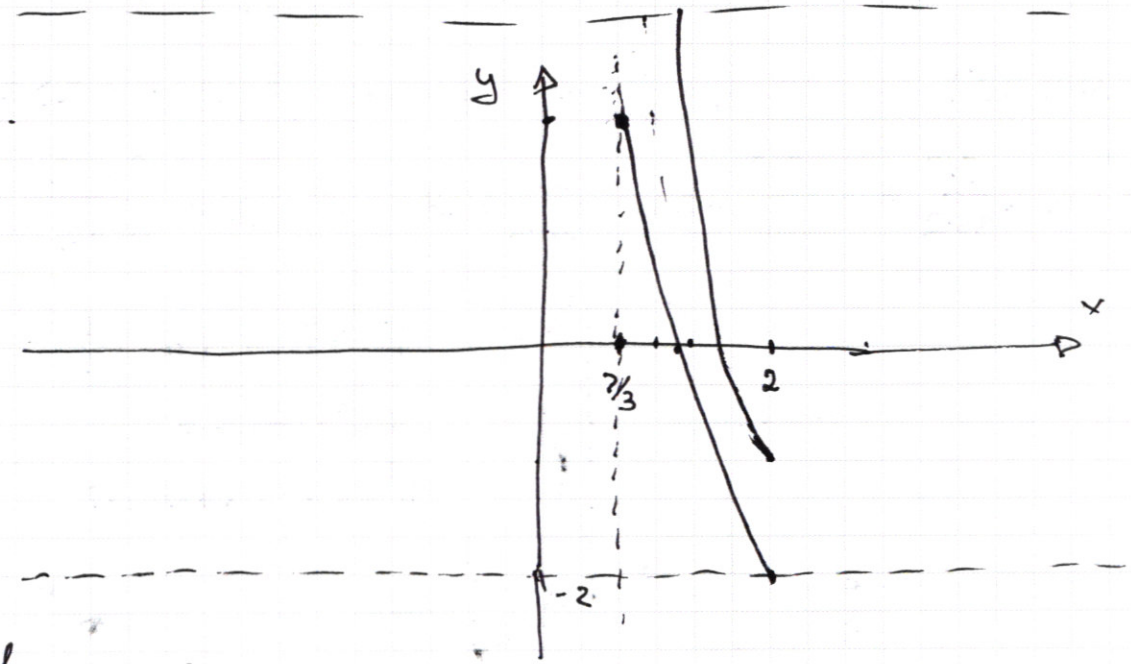
$f'(x)=\frac{-12}{(3x-2)^2}$



g: $g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{18}{9}4-\frac{51\cdot 2}{3}+28=8-34+28=2$

$g(2)=18\cdot 4-51\cdot 2+28=72-102+28=-2$

$g'(x)=36x-51$



Нижняя граница:

$r(x)=ax+b \qquad \left(\frac{2}{3};2\right)$ и $(2;-2)$ – решения

$$\begin{cases} 2=a\frac{2}{3}+b & (1) \\ -2=a\cdot 2+b & (2) \end{cases} \qquad (1)-(2):\ 4=\left(\frac{2}{3}-2\right)a \Rightarrow 4=-\frac{4}{3}a$$

$a=-3 \Rightarrow b=4$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \quad \forall x\in\left[\frac{3}{3};2\right]$

$f(x)=\frac{8-6x}{3x-2}$, $g(x)=18x^2+51x+28$

$f(x)=\frac{4-2(3x-2)}{3x-2}=\frac{4}{3x-2}-2$

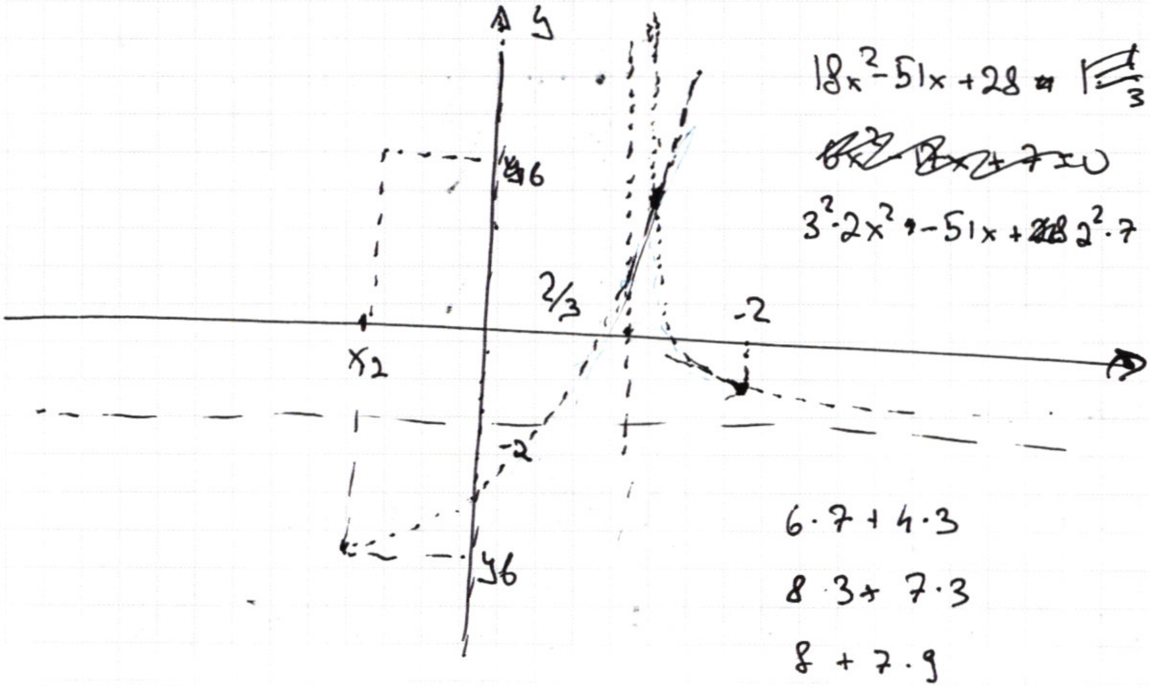
$51\cdot51$: 51, 255, 2601; $56\cdot36$: 336, 168, 2016

$g(x)=18x^2+51x+28=3^2\cdot2x^2+51x+7\cdot2^2$

~~$D=51^2-4\cdot18\cdot28=2601-2016=585$~~ $\qquad g(2)=\cancel{124}>0$

$g'(x)=36x+51 \quad \to x_6=\frac{-51}{36} \to$ вершина $g(a)>0 : a>0$

$f\left(-\frac{51}{36}\right)=\frac{51^2}{36\cdot2}-\frac{51^2}{36}+28=\frac{-51^2}{36\cdot2}+28 \qquad f(2)=\frac{8-12}{6-2}=-1$



$18x^2-51x+28 \ne \frac{1}{3}$

~~$6x^2-17x+7=0$~~

$3^2\cdot2x^2-51x+2^2\cdot7$

$6\cdot7+4\cdot3$

$8\cdot3+7\cdot3$

$8+7\cdot9$

$$\begin{cases} h(2) \geq -2 \\ h\left(\tfrac{2}{3}\right) \geq 2 \\ h(x) = f(x) \text{ — одно или нуль решений } \cancel{\text{на}} \end{cases}$$

$$h(x) = f(x) \Rightarrow \frac{8-6x}{3x-2} = ax + b \Rightarrow 8 - 6x = (3x-2)(ax+b)$$

$$8 - 6x = 3ax^2 + 3bx - 2ax - 2b = 3ax^2 + (3b-2a)x - 2b$$

$$3ax^2 + (3b - 2a + 6)x - 2b - 8 = 0 \quad D \leq 0$$

$$D = (3b - 2a + 6)^2 + 4(2b+8)(3a) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2a + b \geq -2 \Rightarrow b \geq -2 - 2a \\ \frac{2}{3}a + b \geq 2 \rightarrow b \geq 2 - \frac{2}{3}a \\ (3b - 2a + 6)^2 + 4(2b+8)3a \leq 0 \rightarrow \cancel{9b^2 + 4a^2 + 36 - 12ab + 36b - 24a} \end{cases}$$

$$\cancel{+ 24b + 96a \leq 0}$$

$$\begin{cases} b \geq -2 - 2a \\ b \geq 2 - \frac{2}{3}a \\ 9b^2 + 4a^2 + 36 - 12ab + 36b - 24a + 24ba + 96a \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \geq -2 - 2a \qquad \cancel{b - \frac{1}{2}b > \left(2 - \frac{2}{3}a\right) - \frac{1}{3}(-2-2a)} \\ b \geq 2 - \frac{2}{3}a \quad \Big| \cdot 3 \rightarrow 3b + 2a \geq 2 \\ 9b^2 + 4a^2 + 36 + 12ab + 36b + 72a \leq 0 \Leftrightarrow (3b + 2a + 6)^2 \leq -48a \end{cases}$$

$$(3b + 2a + 6)^2 = 9b^2 + 4a^2 + 36 + 12ab + 36b + 24a$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Верхняя граница:

$\lambda(x)$ - касательная к $f(x)$: $f'(x) = \frac{-12}{(3x-2)^2}$ $f(x) = \frac{4}{3x-2} - 2$

$$\lambda(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{-12}{(3x_0-2)^2}(x - x_0) + \frac{4}{3x_0-2} - 2$$

$$\lambda(x) = \frac{-12x}{(3x_0-2)^2} + \left[\frac{12x_0}{(3x_0-2)^2} + \frac{4}{3x_0-2} - 2\right] =$$

$$= \frac{-12x}{(3x_0-2)^2} + \frac{12x_0 + 4(3x_0-2) - 2(3x_0-2)^2}{(3x_0-2)^2} =$$

$$= \frac{-12x}{(3x_0-2)^2} + \frac{12x_0 + 12x_0 - 8 - 18x_0^2 + 12x_0 - 8}{(3x_0-2)^2} =$$

$$= \frac{-12x}{(3x_0-2)^2} + \frac{-18x_0^2 + 36x_0 - 16}{(3x_0-2)^2} = \frac{-12x}{(3x_0-2)^2} - 2\frac{9x_0^2 + 18x_0 - 8}{(3x_0-2)^2}$$

~~Пусть у $\lambda(x)$ - решение~~ Тогда: $\begin{cases} \lambda(2) \geq -2 \\ \lambda(2/3) \geq 2 \end{cases}$

$$\lambda(2) = \frac{-24}{(3x_0-2)^2} +$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} b+2a \geq -2 \\ 3b+2a \geq 6 \\ -48a \geq (3b+2a+6)^2 \geq (6+6)^2 = 144 \Rightarrow a \leq -\frac{144}{48} = -\frac{12\cdot 2}{8} = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+2a \geq -2 \rightarrow a \geq -1-\frac{1}{2}b \\ 3b+2a \geq 6 \quad a \geq 3-\frac{3}{2}b \\ a \leq -3 \end{cases}$$

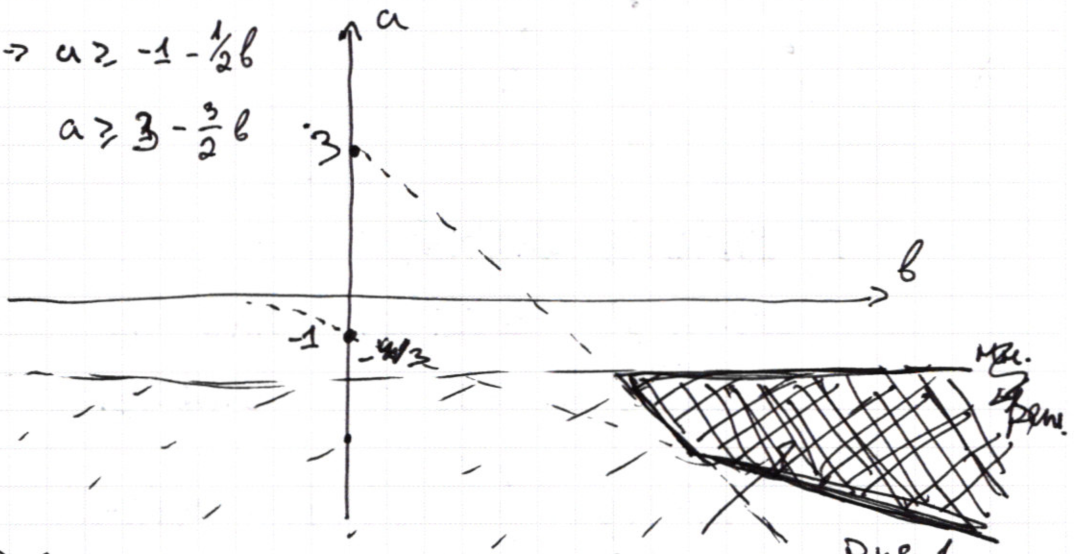
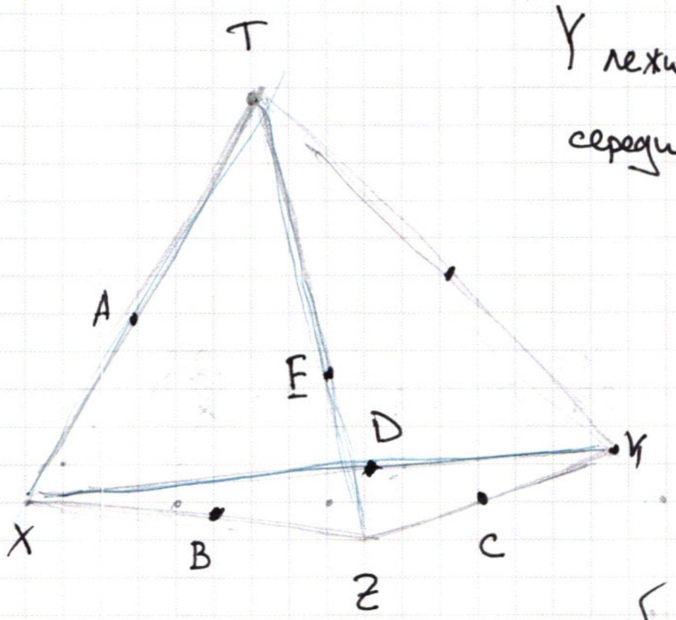


рис 1.

Ответ: $\begin{cases} b+2a \geq -2 \\ 3b+2a \geq 6 \\ a \leq -3 \end{cases}$, рис1

Множество решений

№7



Y лежит на одной сфере с серединами рёбер, кроме TY (A, B, C, D, E)

$XY = \sqrt{3}$ $TX = \sqrt{2}$ $TZ = 2$

$XZ = ?$ $R_{min} - ?$

№1

$\cancel{\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha \sin\beta}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

$\sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2a+4\beta) + \sin 2a = -\frac{2}{17}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$

$\sin(2a+4\beta) + \sin 2a = \cos(\cancel{2a} \; \sin(2a+2b)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)