МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

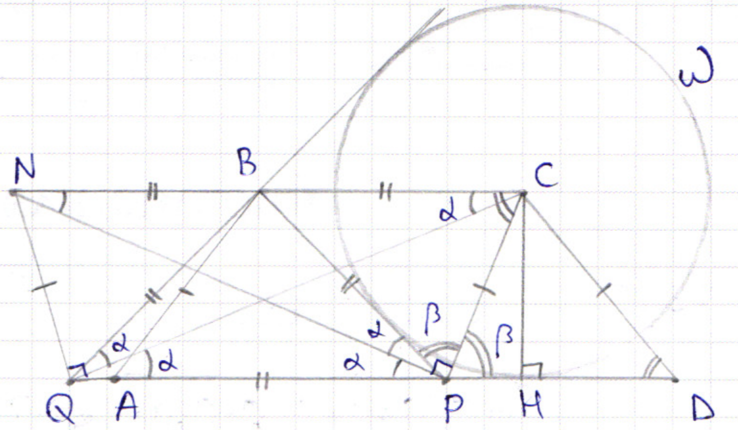
$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABCD$ и CDD_1C_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых B_1C_1 и C_1D_1, плоскости CDD_1, а также плоскости ABC в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

N. 4

Дано: ABCD - равнобокая, ω с центром в C, касается AD, касательные к ω из B пересекают AD в P и Q, $N \in CB$, $\angle CPN = 90°$



Найти: $\angle ADC$, NQC, S_{NCDQ}, если $\angle NCP = \mathrm{arctg}\,\frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$

Решение:

BQ, BP и QP - касательные к ω $\Rightarrow$ ω - вневписанная окружность в $\triangle BQP$ $\Rightarrow$ QC - биссектриса $\angle BQP$, PC - биссектриса $\angle BPD$ $\Rightarrow$ Пусть $\angle BQC = \angle CQP = \alpha$; $\angle BPC = \angle CPD = \beta$.

$BC \parallel QP \Rightarrow \angle CQP = \angle BCQ = \alpha$ (нкл)

$\angle BQC = \angle BCQ = \alpha \Rightarrow \triangle BCQ$ - равнобедренный $\Rightarrow BQ = BC$.

Аналогично $\angle CPD = \angle PCB \Rightarrow \triangle BPC$ - равноб. $\Rightarrow BC = BP$.

$\angle BPN = 90° - \angle BPC = 90° - \beta$

$\angle BNP = 180° - \angle NPC - \angle NCP = 90° - \beta$ $\Rightarrow \angle BNP = \angle BPN = 90° - \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BNP$ - равнобедр $\Rightarrow NB = BP$.

$BN = BQ = BC = BP \Rightarrow NQPC$ - вписанный $\Rightarrow \angle NQC = \angle NPC = 90°$

$\left.\begin{array}{l} BC = \frac{NC}{2} = \frac{13}{2} = AP \\ BC \parallel AP \end{array}\right\} \Rightarrow ABCP$ - параллелограмм $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB = CP \\ AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow CP = CD \Rightarrow \triangle PCD$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle CPD = \angle CDP = \beta = \angle NCP =$

$= \mathrm{arctg}\,\frac{12}{5}$.

$\angle NBQ = \angle BQP = 2\alpha$ (нкл)

$\left.\begin{array}{l} \angle CBP = 180° - \angle BCP - \angle BPC = 180° - 2\beta = \angle BPQ = \angle BQP = 2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$ (т.к. $QB = BP$)

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle NBQ = \angle CBP \\ NB = BC \\ QB = BP \end{array}\right\} \Rightarrow$ по $1^{-ому}$ пр. $\triangle NBQ = \triangle BCP \Rightarrow NQ =$ ~~CD~~ $PC \Rightarrow$

$\Rightarrow NQ = CD$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12345

$\overline{a_1a_2a_3\ldots a_7}$

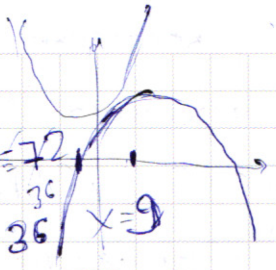
$4x = f$

$y - f = -64$

$y + f = 8$

$2y = \ldots \quad 2f = 72$

$f = 36 \quad x = 9$



$a_7 + \overline{a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} \leqslant 12345$

$\overline{a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_3a_4a_5a_6a_7} = 12345$

$4 \times 9 = 36$

-64

$64 - 36 = 28$

100

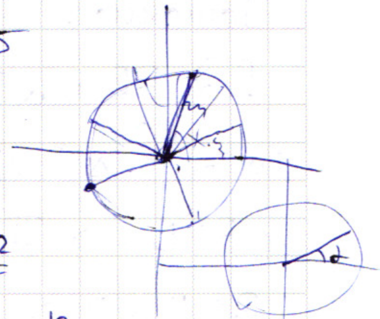
$9999 + 999 + 99 < 12345$

60, 36

$+16 = 44$

$x = 7 \quad a_3 = 1$

42



28

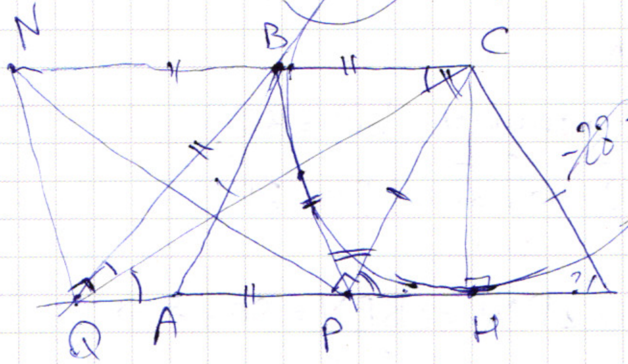
$\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$

$AP = \frac{13}{2} \quad NC = 13$

$x + \frac{\pi}{6} - x + \frac{\pi}{3} =$

$-\frac{2\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$45 \times 3 = 135$



$4 \times 9 = 36 + 16$

$-28 + 16$

20

$D = \frac{25}{9} + \frac{45}{3} = \frac{25+135}{9} = \frac{160}{9}$

$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$

$-28 + 36 = 8$

-64

$D = 625 + 275 = 900$

$8 - 2\sqrt[3]{8 \cdot (-64)} = 24 \quad -28 + 36$

$8 = 2 \cdot 2 \cdot (-4) = 24$

$\sqrt[3]{2} \quad 2 \cdot -8 = -16$

$x_{12} = \frac{-\frac{5}{3} \pm \frac{4}{3}\sqrt{10}}{-\frac{2}{3}}$

$x_{12} = \frac{-25 \pm 30}{-2} = -\frac{5}{2}, \frac{55}{2}$

$\frac{160 - 25}{\ldots} = \frac{135}{4}$

$\frac{-5 \pm 4\sqrt{10}}{2}$

$\log_{1/2}$

$8 + 16 = 24 \quad 4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$\sqrt{(x + \frac{5}{2});(x - \frac{55}{2})} \leqslant ax + b \leqslant$

$\sin(x+y) = 9 \cdot \cos(\frac{\pi}{3} - x)$

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x} \frac{1}{x^2}$

$\log_{3/2} \frac{1}{16}$

$\cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16 \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6})$

$\sqrt[3]{8 \cdot (-64)}$

$\sin(x+y) = 9 \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3})$

$ax + b > 0$

$\sin(x+y) = 9 \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6})$

$\frac{275}{4} + 25x - x^2 \leqslant (ax+b)^2$

$2 \cdot -8 = -16$

$\sin(x+y) = 9\sin(x + \frac{\pi}{6})$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

$\left.\begin{array}{l}\angle NQD = 90^\circ + \alpha \\ \angle CDQ = \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \angle NQD + \angle CDQ = 90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} NQ \parallel CD \\ NQ = CD\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow NCDQ$ – параллелограмм.

~~Опустим $CH \perp AD$ и $BH' \perp AD$~~

$\angle CNQ = 90^\circ - \angle NCQ = \beta \Rightarrow tg\,\angle CNQ = tg\,\beta = \frac{12}{5}$

Пусть $NQ = x$, тогда $QC = x \cdot tg\,\beta = \frac{12}{5}x$

По т. Пифагора: $NQ^2 + QC^2 = NC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + \frac{144}{25}x^2 = 169 \Rightarrow \frac{169x^2}{25} = 169 \Rightarrow x = 5 \quad (x > 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\cos\beta =$~~ $\sin\beta = \frac{12}{13}$.

$S_{NCDQ} = QD \cdot CD \cdot \sin\angle QDC = NC \cdot NQ \cdot \sin\angle QNC = 13 \cdot 5 \cdot \frac{12}{13} =$
$= 60$

Ответ: $\angle ADC = arctg\,\frac{12}{5}$, $\angle NQC = 90^\circ$, $S_{NCDQ} = 60$

N.5 Рассмотрим числа $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_7}$, $a_1 \neq 0$

1) Пусть сумма ост. от деления на $10^7, 10^6, 10^5 = 12345$

Однако $a_1 \neq 0 \Rightarrow$ она $\geqslant 1000000 > 12345$, что невозможно. Аналогично тройка степеней не может быть 8,7,6 ; 9,8,7 и т.д. $\Rightarrow$ старшая степень десятки $\leqslant 6$.

2) Пусть сумма ост. от деления на $10^6, 10^5$ и $10^4 = 12345$.

Тогда $100000 a_2 + 20000 a_3 + 3 \cdot \overline{a_4a_5a_6a_7} = 12345 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_2 = 0,\ a_3 = 0 \Rightarrow \overline{a_4a_5a_6a_7} = \frac{12345}{3} = 4115$

Таких чисел ровно 9:

1004115 ; 2004115 ; … ; 9004115.

3) Пусть сумма ост. от деления на $10^5, 10^4, 10^3 = 12345$

Тогда: $\cancel{100000} \cdot 10000 \cdot a_3 + 2000 a_4 + 3 \cdot \overline{a_5a_6a_7} =$

$= 12345. \Rightarrow a_3 \leqslant 1$; a_1, a_2 - любые.

Пусть $a_3 = 1$. Тогда $2000 a_4 + 3 \cdot \overline{a_5a_6a_7} = 2345 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_4 \leqslant 1 \to a_4 = 1 \quad \overline{a_5a_6a_7} = \frac{345}{3} \Rightarrow \overline{a_5a_6a_7} = 115$

$\to a_4 = 0 \quad \overline{a_5a_6a_7} = \frac{2345}{3} \notin \mathbb{Z}$

Пусть $a_3 = 0$.

Тогда $2000 a_4 + 3 \cdot \overline{a_5a_6a_7} = 12345$, $a_4 \leqslant 6$

~~$a_4 = 7$~~ $3 \cdot \overline{a_5a_6a_7} \leqslant 3 \cdot 999 \Rightarrow 2000 a_4 \geqslant 12345 - 2997 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_4 \geqslant 5$

$a_4 = 5 \quad 3 \cdot \overline{a_5a_6a_7} = 2345 \Rightarrow \overline{a_5a_6a_7} \notin \mathbb{Z}$

$a_4 = 6 \quad 3 \cdot \overline{a_5a_6a_7} = 345 \Rightarrow \overline{a_5a_6a_7} = 115$

Итого, все решения: $\overline{a_1a_2 06115}$, $\overline{a_1a_2 11115}$

Т.к. a_1 можно выбрать 9 способами, a_2 – десятью, всего решений $2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

4) Пусть сумма ост. от деления на 10^4, 10^3 и 10^2 = 12345

Тогда $1000\cdot a_4 + 200\cdot a_5 + 3\cdot\overline{a_6a_7} = 12345$

$a_4 \leq 9$, $a_5 \leq 9$, $\overline{a_6a_7} \leq 99 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1000a_4 + 200a_5 + 3\cdot\overline{a_6a_7} \leq 9000 + 1800 + 3\cdot 99 =$

$= 10800 + 297 = 11097 < 12345 \Rightarrow$ 0 решений.

Аналогично нет решений для $10^3, 10^2, 10^1$ и меньшей старшей степени.

5) Итого решений: $9 + 180 = 189$

Ответ: 189 чисел.

№1

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - \sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)} = 44 \\ y - \sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)} = -20 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (вычтем и сложим)

сделаем замену: $a = y - 4x$, $b = y + 4x$

$$\begin{cases} 4x - y = 64 \\ 4x + y - 2\sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)} = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a = 64 \\ b - 2\sqrt[3]{ab} = 24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -64 \\ b - 2\sqrt[3]{-64\cdot b} = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -64 \\ b + 8\sqrt[3]{b} - 24 = 0 \end{cases}$$

$\cancel{8\sqrt[3]{b} = 24 - b}$ $\quad \sqrt[3]{b} = t \Rightarrow t^3 + 8t - 24 = 0$

$(t-2)(t^2 + 2t + 12) = 0 \Rightarrow t_1 = 2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№1 (продолжение)

$t^2+2t+12=0$ $\quad D=4-48<0 \Rightarrow$ нет корней

Итого: $\sqrt[3]{b}=t=2 \Rightarrow b=8 \Rightarrow \begin{cases} a=-64 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y-4x=-64 \\ y+4x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4x-64 \\ 8x-64=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-28 \\ x=9 \end{cases}$

Ответ: $x=9$; $y=-28$

№2 $\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x}\frac{1}{x^2}$

1) $3x>0$ $\quad x>0$ $\quad 9x>0$ $\quad x>0$

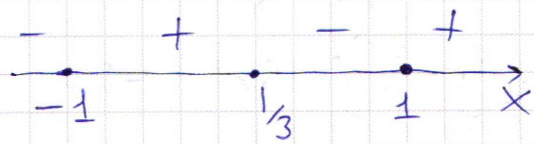
$3x \neq \cancel{0}\ 1 \Rightarrow x\neq \frac{1}{3}$ $\quad 9x\neq 1 \Rightarrow x\neq\frac{1}{9}$

$x^4>0 \Rightarrow x>0,\ x<0$

$\frac{1}{x^2}>0 \Rightarrow x>0,\ x<0.$

$\log_{3x} x^4 \geqslant 0 \Rightarrow \log_{3x} x^4 \geqslant \log_{3x} 1 \Rightarrow (3x-1)(x^4-1)\geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+1)(x-1)(x+1)\geqslant 0$



$x\in\left[-1;\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$

Итого: $x\in\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup[1;+\infty)$

2) Возведём в квадрат:

$\log_{3x} x^4 \leqslant \left(\log_{9x} x^{-2}\right)^2$; $\quad \log_{9x} x^{-2}\geqslant 0$

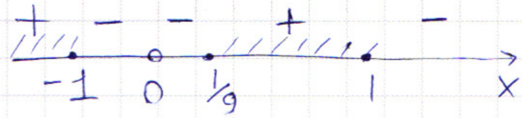
$\log_{9x} x^{-2}\geqslant \log_{9x} 1$

$9\left(x-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\geqslant 0$

$\frac{9\left(x-\frac{1}{9}\right)(1-x)(1+x)}{x^2}\geqslant 0$

№ 2 (продолжение)

$x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1}{9}; 1]$



Итого: $\begin{cases} \log_{3x} x^4 \leq (\log_{9x} x^{-2})^2 \\ x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{9}) \cup \{1\} \end{cases}$

$\log_{3x} x^4 \leq (\log_{9x} x^{-2})^2$, $x \neq 1$ (равенство при $x=1$)(в ответ)

$$\frac{\log_{9x} x^4}{\log_{9x}(3x)} \leq (\log_{9x} x^{-2}) \cdot (\log_{9x} x^{-2})$$

$$\frac{\cancel{4} \cdot \log_{9x} x}{\log_{9x}(3x)} \leq \log_{9x} x \cdot \cancel{(-2)} \cdot \cancel{(-2)} \cdot \log_{9x} x$$

$$\frac{\log_{9x} x \left(1 - \log_{9x}(3x) \cdot \log_{9x} x\right)}{\log_{9x}(3x)} \leq 0$$

Т.к. $9x > 1$; $\begin{matrix} x < 1 \\ 3x < 1 \end{matrix}$, $\log_{9x} x < 0$, $\log_{9x}(3x) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $1 - \log_{9x}(3x) \cdot \log_{9x}(x) \leq 0$

Ответ: $x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{9}) \cup \{1\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

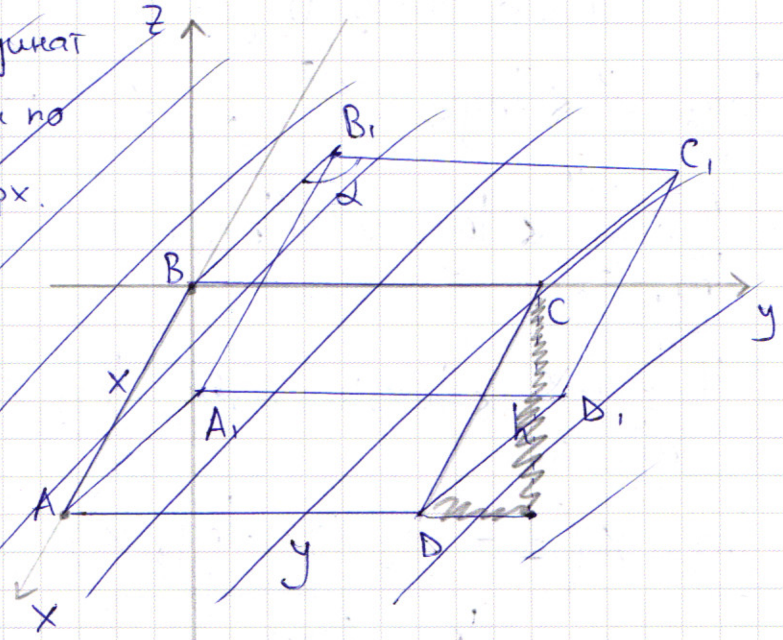
~~№7 Введём систему координат с центром в B, Ox пустим по BA, Oy по BC, Oz вверх.~~

~~$A(x;0;0)$~~

~~$B(0;0;0)$~~

~~$C(x;y;h)$~~

~~$C_1(0;y;h)$~~



№7

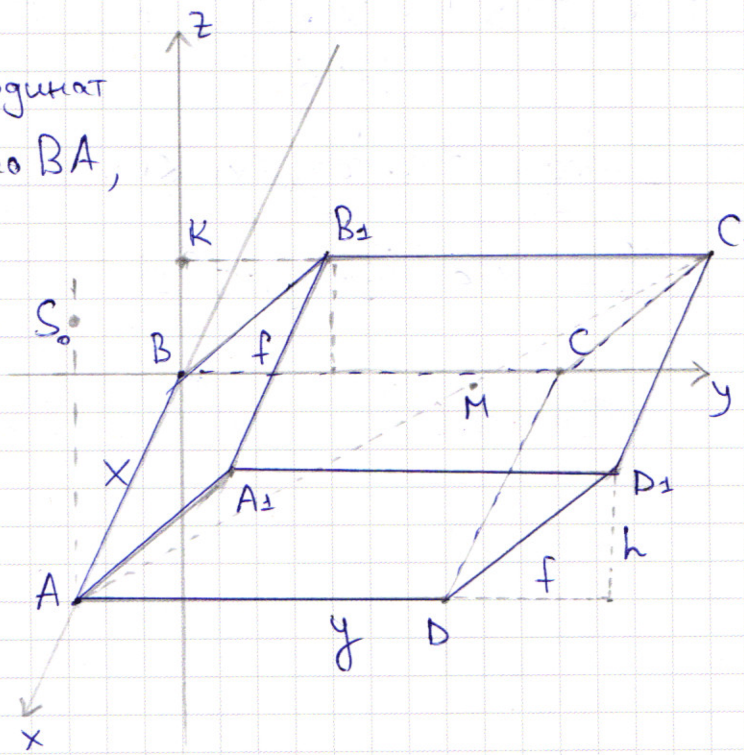
Введём ~~су~~ систему координат с центром в B, Ox пустим по BA, Oy по BC, Oz – вверх.

$A(x;0;0)$

$B(0;0;0)$

$C_1(0;y;h)$

$D_1(x;y;h)$



Пусть S_0 - центр сферы.

Т.к. S_0 касается ABC в точке A, координаты S_0 – $(x;0;r)$, где r – радиус сферы.

$\overrightarrow{AC_1}(-x;y;h) \Rightarrow M\left(\frac{3}{8}x;\frac{5}{8}y;\frac{5}{8}h\right)$, Т.к. M делит

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7

(Нумеровать только чистовики)

№7 (продолжение)

AC_1 в отношении $5/3$.

$|\overrightarrow{S_0M}|^2 = (\frac{5}{8}x)^2 + (\frac{5}{8}y)^2 + (\frac{5}{8}h - r)^2 = \frac{25}{64}(x^2+y^2+h^2) - \frac{10}{8}rh + r^2$

Т.к. M лежит на сфере, $|\overrightarrow{S_0M}|^2 = r^2 \Rightarrow \frac{25}{8}(x^2+y^2+h^2) = 10rh$

$|\overrightarrow{AC_1}|^2 = (-x)^2 + y^2 + h^2 = 8$ (по усл.) $\Rightarrow 25 = 10rh \Rightarrow rh = \frac{5}{2}$.

Пусть S касается C_1B_1 в точке K. $B_1C_1 \parallel O_y \Rightarrow S_0K \perp O_y \Rightarrow$
$\Rightarrow K(0;0;h)$

$|\overrightarrow{S_0K}|^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + (r-h)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2rh + h^2 = 0$

$\overrightarrow{C_1D_1}(x;0;0)$
$\overrightarrow{S_0D_1}(0;y;h-r)$ $\Rightarrow \overrightarrow{C_1D_1}\cdot\overrightarrow{S_0D_1} = 0+0+0 = 0 \Rightarrow C_1D_1 \perp S_0D_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S касается C_1D_1 в точке D_1 (и плоскости CDD_1 тоже)

$|\overrightarrow{S_0D_1}|^2 = r^2 \Rightarrow y^2 + h^2 + r^2 - 2rh = r^2 \Rightarrow y^2 - 2rh + h^2 = 0$

Т.о. $x^2 = y^2$ $\quad rh = \frac{5}{2} \Rightarrow y^2 + h^2 = 2rh = 5$

$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+h^2 = 8 \\ y^2+h^2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 3 = y^2 \Rightarrow x = y = \sqrt{3},\ h = \sqrt{2},\ r = \frac{5}{2\sqrt{2}}$.

Пусть $B_1(0;f;\sqrt{2})$. Тогда: $\cancel{D_1(y-f}$ $D(x;y-f;0)$
$C(0;y-f;0)$

Зададим плоскость CDD_1 $(Ax+By+Cz+D=0)$

Тогда: $B(y-f) + D = 0 \Rightarrow B(\sqrt{3}-f) + D = 0 \Rightarrow D = (f-\sqrt{3})B$

$\sqrt{3}B + \frac{5}{2\sqrt{2}}C + D = 0 \Rightarrow C = \frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot B(\sqrt{3} - f - \sqrt{3}) =$

$= -\frac{2\sqrt{2}\cdot f}{5}\cdot B$ $\quad \Rightarrow \vec{n}\left(0;1;-\frac{2\sqrt{2}f}{5}\right)$

$xA + \sqrt{3}B + \frac{5}{2\sqrt{2}}C + D = 0 \Rightarrow A = 0$

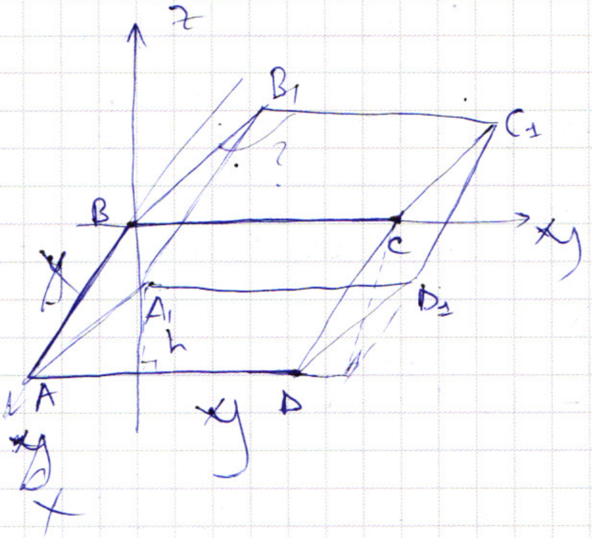
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$A(x;0;0)$

$C_1(0;y;h)$

$AC_1 =$

$M\left(\frac{3}{8}x;\frac{5}{8}y;\frac{5}{8}h\right)$

$x^2+y^2+h^2=8$ $\quad y^2+h^2=5$

$S(x;0;r)$

$C(x;y;h)$

$|\vec{SC}|=r \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2+(r-h)^2=r^2$

$y^2+h^2-2rh=0 \quad y^2+h^2=2rh$

$x^2=3 \quad x=\sqrt{3}$

$y^2=5-\frac{25}{4r^2}$

$y^2+h^2=5$

$\left(\frac{5}{8}x\right)^2+\left(\frac{5}{8}y\right)^2+\left(\frac{5}{8}h-r\right)^2=r^2$

$\underbrace{\frac{25}{64}x^2+\frac{25}{64}y^2+\frac{25}{64}h^2}-\frac{10}{8}rh+\cancel{r^2}=\cancel{r^2}$

$\frac{8\cdot 25}{64}=\frac{25}{8} \quad 25=10rh$

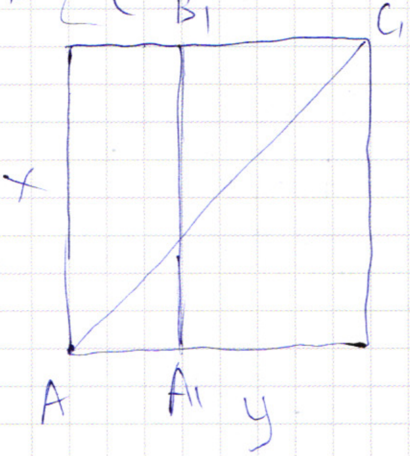
$rh=2,5$

$h=\frac{5}{2r}$

$\angle BB_1C_1$

$\vec{B_1B}$ (

$\vec{B_1C_1}$ (



$x=y$

$\vec{B_1C_1} =$

$F(0;0;h)$

$x=y$

$x^2+(h-r)^2=r^2$

$r=\frac{5}{2\sqrt{2}}$

$y=\sqrt{3}$

$h=\sqrt{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 (продолжение)

Пусть $B_1(0; f; \sqrt{2})$. Тогда: $D(\sqrt{3}; \sqrt{3}-f; 0)$,

$C_1(0; \sqrt{3}; \sqrt{2})$, $C(0; \sqrt{3}-f; 0)$, $D_1(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{2})$

Обозначим α плоскость CC_1DD_1: $\alpha(Ax+By+Cz+D=0)$

$\alpha \parallel AB \parallel Ox \Rightarrow A=0$

$C \in \alpha \Rightarrow (\sqrt{3}-f)B + D = 0 \Rightarrow D = (f-\sqrt{3})B$

$D_1 \in \alpha \Rightarrow \sqrt{3}B + \sqrt{2}C + D = 0 \Rightarrow \sqrt{2}C = -\sqrt{3}B - (f-\sqrt{3})B \Rightarrow$

$\Rightarrow C = -\frac{fB}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha\left(0\cdot x + y + \left(-\frac{f}{\sqrt{2}}\right)\cdot z + (f-\sqrt{3}) = 0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{n}\left(0; 1; -\frac{f}{\sqrt{2}}\right)$

$\overrightarrow{S_0D_1} \perp \alpha \Rightarrow \overrightarrow{S_0D_1} \parallel \vec{n} \Rightarrow \frac{\overset{\sqrt{3}}{y''}}{1} = \frac{\left(\sqrt{2} - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{-f} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3}f = \frac{5}{2} - 2 \Rightarrow f = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

$\overrightarrow{B_1B}\left(0; \frac{-1}{2\sqrt{3}}; -\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{B_1C_1}\left(0; \sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}; 0\right)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}}{|\overrightarrow{B_1B}|\cdot|\overrightarrow{B_1C_1}|} = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}}{\cancel{\sqrt{2+\frac{1}{12}}}\ \sqrt{2+\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{3+\frac{1}{12}-1}} =$$

$$= -\frac{5}{12\cdot\left(2+\frac{1}{12}\right)} = -\frac{5\cdot\cancel{12}}{\cancel{12}\cdot 25} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}}$

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = BB_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin\alpha \cdot AB =$

$$= \frac{25}{12}\cdot\sqrt{\frac{24}{25}}\cdot\sqrt{3} = \cancel{\sqrt{\frac{25\cdot}{12}}}\ \sqrt{\frac{25^2\cdot 24\cdot 3}{12\cdot 12\cdot 25}} = \sqrt{6}$$

Ответ: $\angle BB_1C_1 = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$; $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = \sqrt{6}$

N. 5

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cdot\cos(\pi/3 - x) \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\cdot\sin(x+2y) = -16\cdot\sin(x+\pi/6) \end{cases}$$

$\sin(x+y) = 9\cdot\sin(x+\pi/6) \Rightarrow \cos(x+2y) - \sqrt{3}\cdot\sin(x+2y) = -\frac{16}{9}\cdot\sin(x+y)$

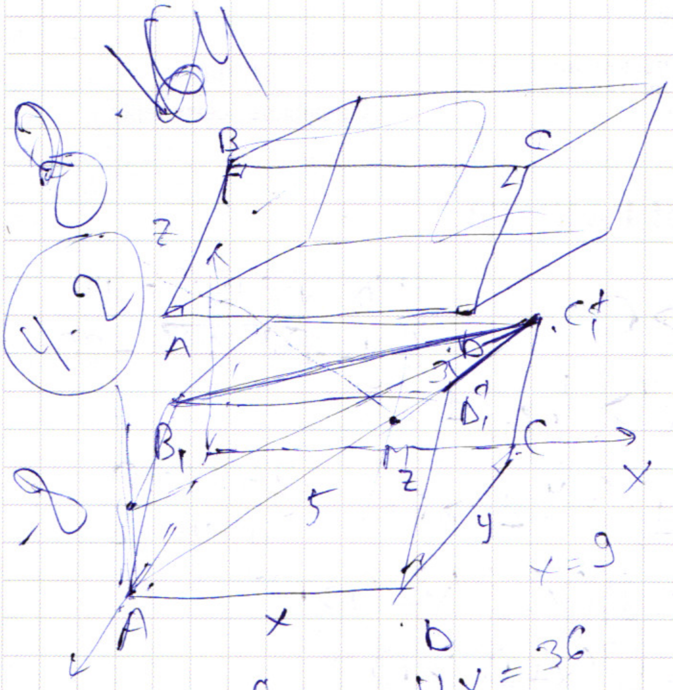
Пусть $\alpha = x+y$

$\cos(\alpha+y) - \sqrt{3}\cdot\sin(\alpha+y) = -\frac{16}{9}\cdot\sin\alpha$

$\cos\alpha\cdot\cos y - \sin\alpha\cdot\sin y - \sqrt{3}\cdot\sin\alpha\cdot\cos y - \sqrt{3}\cdot\sin y\cdot\cos\alpha = -\frac{16}{9}\cdot\sin\alpha$

$\sin\alpha\left(\sin y + \sqrt{3}\cdot\cos y - \frac{16}{9}\right) = \cos\alpha\left(\cos y - \sqrt{3}\cdot\sin y\right)$

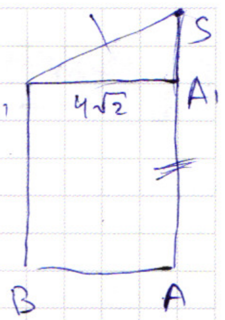
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\cos y - \sqrt{3}\cdot\sin y}{\sin y + \sqrt{3}\cdot\cos y - \frac{16}{9}}$



$\overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} +$

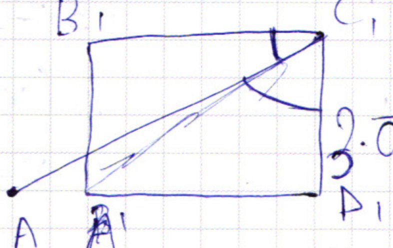
$+ \overline{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} +$

$+ \overline{a_4 a_5 a_6 a_7} = 12345$



$a_2 = 0 \to a_3 = 0 \quad 3\overline{a_4 a_5 a_6 a_7}$

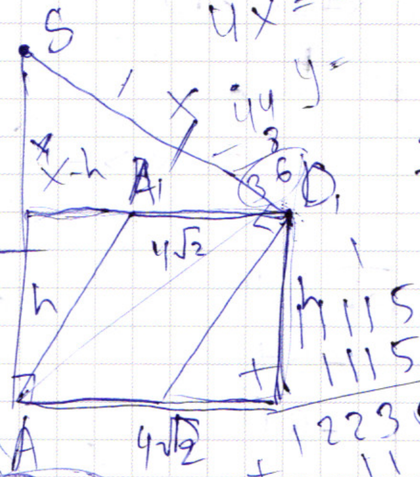
$a_3 \neq 1$



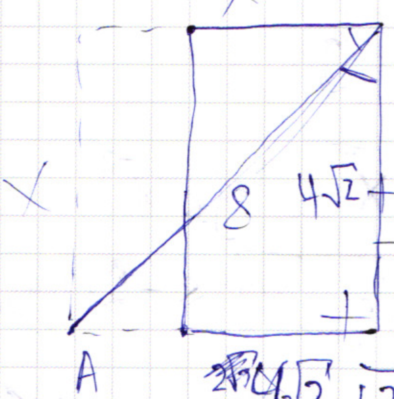
$3 \cdot \overline{a_4 a_5 a_6 a_7} = 2345$

невозможно

$uX = 36$



$1111 \cdot 5 + 1111 \cdot 5 = 12230$; $12230 + 115 = 12345$



$X = \frac{1}{9} \quad \frac{1}{3}$

$6115 + 6115 = 12230$; $+115$; 12345

$36 \cdot 36 = 1296$; $16 \cdot 49 = 784$; $784 - 64$

$-36 ; 7$

$-36 - 28 = -64$

$0 < -\frac{5}{2}a + 6$

$-36 + 28 = -8$

$\sin(x+y) = 9 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{2}{9}$ $\quad 2x^2 = 64 \quad x^2 = 32 \quad x = 4\sqrt{2}$

$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = 9 \cdot \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} +$

$12345 / 3 = 4115$

$\log_2\left(\frac{2}{3}\right) \quad \log_2\left(\frac{2}{9}\right)$

9

1004115
2004115
$\vdots$
9004115

$a_2 = 1$

$3\overline{a_5 a_6 a_7} + 2000 a_4 = 2345$

$a_4 = 1$
$a_4 = 0$

$3\overline{a_4 a_5 a_6 a_7} = 12345$

$\overline{a_4 a_5 a_6 a_7} = 4115$

$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 2xh + h^2 + 32$

$a_3 = 0$

$3\overline{a_5 a_6 a_7} + 2000 a_4 = 12345$

$\overline{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_4 a_5 a_6 a_7} +$

$+ \overline{a_5 a_6 a_7} \quad 32+$

$3\overline{a_5 a_6 a_7} + 2000 \cdot a_4 + 10000 a_3$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq \log_{9x} \frac{1}{x^2}$

$\log_{3x} x^4 \geq 0$

$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20 \end{cases}$

$\log_{3x} x^4 \geq \log_{3x} 1$

$3x > 0 \quad 9x > 0$

$3x \neq 1 \quad 9x \neq 1$

$(3x-1)(x^4-1) \geq 0$

$y - 4x = a$

$y + 4x = b$

$x^4 > 0 \quad \frac{1}{x^2} > 0$

$3(x-\frac{1}{3})(x^2-1)(x^2+1) \geq 0$

$3(x-\frac{1}{3})^2(x+1) \geq 0$

$x \neq 0$

$x > 0$

$x \neq \frac{1}{3}$

$x \neq \frac{1}{9}$

$-\quad + \quad +$

$-1 \quad \frac{1}{3}$

$x > -1$

$4x+y$

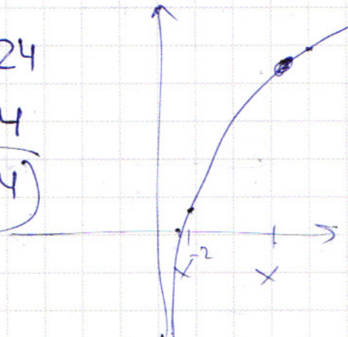
$b - 2\sqrt[3]{ab} = 24$

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq \log_{9x} x^{-2}$

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq -2 \cdot \log_{9x} x$

$-a = 64$

$a = -64$



$\log_{9x} x \leq 0$

$\log_{9x} x \leq \log_{9x} 1$

$(9x-1)(x-1) \leq 0$

$+ \quad - \quad +$

$\frac{1}{9} \quad 1 \quad x$

$9(x-\frac{1}{9})(x-1) \leq 0$

$x \in [\frac{1}{9}; 1]$

-20

$\sqrt{\log_6 16} \leq \log_{18} \frac{1}{4}$

$x = 2$

$\frac{1}{2}$

$\log_9 1$

44

-16

28

$x = 7$

16

$4x = 28$

$4\log_{3x} x \leq 4 \cdot \log_{9x} x$

$\frac{\log_{9x} x}{\log_{9x} 3x} \leq \log_{9x} x$

$1 \geq \log_{9x} 3x$

$y = -36$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)