МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

3 4 5

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

$4^{\log_4 5} = 5$

1 + 2 ≥ 5

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

1. Распишем ур-ие (2)

$$\sin\left(2(2\alpha+2\beta)-2\alpha\right)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\sin(2\cdot(2\alpha+2\beta))\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cdot\cos(2(2\alpha+2\beta))+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

$$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cdot(1-2\sin^2(2\alpha+2\beta))+$$
$$+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

2. подставим знач. ур-ия (1) в полученное ур-ие п. 1.

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos(2\alpha+2\beta)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\left(1-2\cdot\frac{1}{17}\right)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cdot\frac{15}{17}+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\alpha+2\beta)\cos 2\alpha + \frac{2}{17}\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

3. $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}.$

может получиться две ситуации

1) $\cos(2\alpha+2\beta) > 0$ 2) $\cos(2\alpha+2\beta) < 0$

Начнем с 1-ой.

$\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$, тогда подставим в ур-ие, полученное в п.2.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$-\frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha + \frac{2}{17} \cdot \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \quad \Big| \cdot \frac{17}{2}$$

$$-4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -4$$

тогда $\cos 2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \dfrac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$.

$$-4\left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) + \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = -4$$

$$\frac{-2+2tg^2\alpha + tg\alpha + 2 + 2tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 0.$$

ОДЗ: $\cos\alpha \neq 0$

$\underbrace{1+tg^2\alpha}_{>0} \neq 0$

$$\frac{4tg^2\alpha + tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = 0$$

$$4tg^2\alpha + tg\alpha = 0$$

$$tg\alpha(4tg\alpha + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

4. Случай 2) $\cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, аналогично подставим в ур-ие, получ. в п 2.

$$-\frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \left(\frac{-4}{\sqrt{17}}\right) \cdot \cos 2\alpha + \frac{2}{17}\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \quad \Big| \cdot \frac{17}{2}$$

$$4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -4$$

ОДЗ: $\cos\alpha \neq 0$

$\underbrace{1+tg^2\alpha}_{>0} \neq 0$

$$4 \cdot \left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) + \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + 4 = 0$$

$$\frac{2 - 2tg^2\alpha + tg\alpha + 2 + 2tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 0$$

$\dfrac{4+tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = 0$; $\underline{tg\alpha = -4}$,

Ответ: $tg\alpha = 0$
$tg\alpha = -\frac{1}{4}$
$tg\alpha = -4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$, $\begin{cases} (3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3(x-1)^2-3+\frac{(3y-2)^2}{3}-\frac{4}{3}=4 \end{cases}$

ОДЗ: $3y-2x \geq 0$

$\begin{cases} (3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3(x-1)^2+\frac{(3y-2)^2}{3}=7+\frac{4}{3} \end{cases}$

Введем переменные

$a=x-1$
$b=3y-2$, тогда $\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 3a^2+\frac{b^2}{3}=\cancel{4}+3+\frac{4}{3} \end{cases}$ (возведем в кв) $|\cdot 3$

$\begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab \\ 9a^2+b^2=25 \\ b-2a\geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} b^2-5ab+4a^2=0 \\ 9a^2+b^2=25 \\ b\geq 2a \end{cases}$, $\begin{cases} (b-4a)(b-a)=0 \\ 9a^2+b^2=25 \\ b\geq 2a \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=a \end{array}\right. \\ 9a^2+b^2=25 \\ b\geq 2a \end{cases}$

подставим знач. $b=4a$ во 2 ур-ие

$9a^2+16a^2=25$
$a^2=1$
$a=\pm 1 \Rightarrow b=\pm 4$

если $a=1$ $b=4$

услов. $b\geq 2a$ выполн.

если $a=-1$; $b=-4$; услов $b\geq 2a$

$-4\geq -2$ не выполн.

$\Rightarrow a=1$; $b=4$.

подставим знач $b=a$ во 2 ур-ие

$9a^2+a^2=25$
$10a^2=25$
$a^2=\frac{5}{2}$; $a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$; $b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

если $a=\sqrt{\frac{5}{2}}$; $b=\sqrt{\frac{5}{2}}$

условие $b\geq 2a$; $\sqrt{\frac{5}{2}}\geq 2\sqrt{\frac{5}{2}}$ не выполн.

если $a = -\sqrt{\frac{5}{2}}$; $b = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

усл: $b \geq 2a$; $-\sqrt{\frac{5}{2}} \geq 2 \cdot -\sqrt{\frac{5}{2}}$ выполн.

$\Rightarrow$ Мы получили значения:

(1) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} a = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$.

$\begin{cases} a = x - 1 \\ b = 3y - 2 \end{cases} \Rightarrow$ (1) $\begin{cases} x - 1 = 1 \\ 3y - 2 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - 1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 3y - 2 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3} \end{cases}$

$2 - \sqrt{\frac{5}{2}} \geq 2 - 2\sqrt{\frac{5}{2}}$

Ответ: $(2; 2)$, $\left(1 - \sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right)$

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2 \quad \Big| + x^2$.

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5}$

$\log_4(x^2+6x)$ имеет ОДЗ

ОДЗ: $x^2 + 6x > 0 \Rightarrow |x^2+6x|^{\log_4 5} = (x^2+6x)^{\log_4 5}$.

$\Rightarrow 3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$.

пусть $x^2 + 6x = a$; $a > 0$

$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$

$3^{\frac{\log_3 a}{\log_3 4}} + a \geq a^{\log_4 5}$

$\left(3^{\log_3 a}\right)^{\frac{1}{\log_3 4}} + a \geq a^{\log_4 5}$

$a^{\frac{1}{\log_3 4}} + a^1 \geq a^{\log_4 5}$

1) $a > 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда, используя метод рацион. перехода

$\frac{1}{\log_3 4} + 1 \geq \log_4 5 \quad \Big| \cdot \log_3 4$

$\frac{1}{\log_3 4} \cdot \log_3 4 + \log_3 4 \geq \log_4 5 \cdot \log_3 4$

$1 + \log_3 4 \geq \log_3 5$

$\log_3 3 + \log_3 4 \geq \log_3 5$

$\log_3 12 \geq \log_3 5$ (~~условие~~ нерав-во выполн. при $a > 1$)

2) если $0 < a < 1$

$\frac{1}{\log_3 4} + 1 \leq \log_4 5 \quad \Big| \log_3 4$

$1 + \log_3 4 \leq \log_3 5$

$\log_3 12 \leq \log_3 5 \Rightarrow$ (~~условие~~ нер-во не выполн) $\Rightarrow a < 1$ невозм.

3) при $a = 1$

$a^{\frac{1}{\log_3 4}} + a^1 \geq a^{\log_4 5}$

$2 \geq 1$ выполняется при $a = 1$

$\Rightarrow \quad a \geq 1$

$x^2 + 6x \geq 1$

$x^2 + 6x - 1 \geq 0$

$x^2 + 6x - 1 = 0$

$D = \cancel{}\ 36 + 4 = 40$

$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{10}}{2} = -3 + \sqrt{10}$

$x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{10}}{2} = -3 - \sqrt{10}$

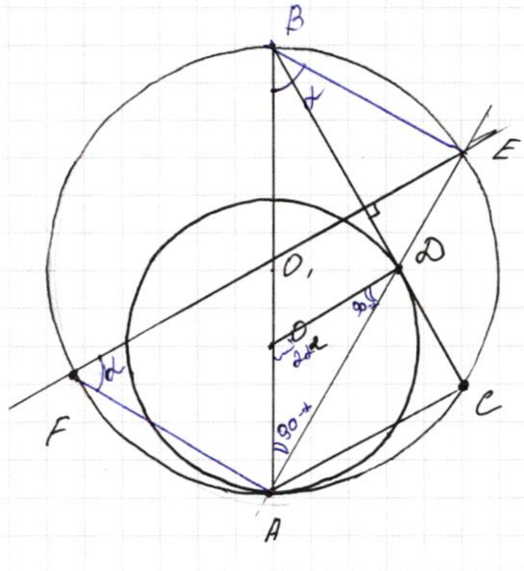
$(x - (-3 + \sqrt{10}))(x - (-3 - \sqrt{10})) \geq 0$

$+ \quad - \quad +$

$-3 - \sqrt{10} \qquad -3 + \sqrt{10}$

Ответ: $x \in (-\infty; -3 - \sqrt{10}] \cup [-3 + \sqrt{10}; +\infty)$

№ 4.



Дано:
AB - диаметр.
$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$.
BC - касат к ω
т D - т. касан ω и BC
$EF \perp BC$

---

r - радиус ω - ?
R - радиус Ω - ?
$\angle AFE$

1) Точки касания и центра окружностей лежат на одной прямой (т. о касан).
т. к. AB - диаметр окр. Ω то и т.B ∈ AO,
2) $O_2D \perp BC$; т. к. это радиус, провед. в т. касания ($O_2D = r$)
3) Пусть $BO_2 = x$.
4) $\triangle BAC$ - прямоуг. ; т. к. AB - диаметр
$\angle ACB = 90°$ (опир. на ◡AB)
$\Rightarrow$ $\triangle BO_2D \sim \triangle ABC$ (по 2 угл) ($\angle BDO_2 = \angle BCA = 90°$
$\angle ABC$ - общий

$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA} = \frac{O_2D}{AC}$. ($BC = BD + DC = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9$)

$\frac{\frac{13}{2}}{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{x}{x+r}$. ($BA = BO_2 + O_2A = x + r$)

$\frac{13}{18} = \frac{x}{x+r}$.

$13x + 13r = 18x$
$5x = 13r$; $x = \frac{13}{5} r$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) ~~по т. об отрезках касат.~~

Рассм $\triangle BO_2D$ - прямоуг ($O_2D \perp BD$)

по т. Пифагора:

$$BO_2^2 = O_2D^2 + BD^2$$

$$x^2 = r^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{13r}{5}\right)^2 - r^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$\frac{13^2r^2 - 5^2r^2}{5^2} = \frac{13^2}{2^2}$$

$$8r \cdot 18r = \frac{5^2 \cdot 13^2}{2^2}$$

$$r^2 = \frac{5^2 \cdot 13^2}{2^2 \cdot 2^4 \cdot 9}; \Rightarrow r = \frac{5 \cdot 13}{3 \cdot 2^3} = \frac{5 \cdot 13}{24} \Rightarrow$$

$$r = \frac{65}{24}$$

6) $AB = 2R$

$AB = x + r = BO_2 + O_2A$

$$2R = r + x = r + \frac{13}{5}r = \frac{65}{24} + \frac{13}{5} \cdot \frac{65}{24} = \frac{65 + 169}{24} =$$

$$= \frac{234}{24} = \frac{117}{12}$$

$$\Rightarrow R = \frac{117}{24}$$

7) $\triangle ABC$ - прямоуг по т. Пифагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{\left(\frac{117}{12}\right)^2 - 9^2} = \sqrt{\left(\frac{117}{12} - 9\right)\left(\frac{117}{12} + 9\right)} = \sqrt{\frac{9 \cdot 15^2}{12^2}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 15}{12} = \frac{15}{4}$$

8) Пусть $\angle AFE = \alpha \Rightarrow \angle ABE = \alpha$ (т. к. опир. на $\smile AE$)

$\triangle ABE$ – прямоуг ($\angle AEB = 90°$, т. к. опир. на диаметр AB)

$\Rightarrow \angle BAE = 90 - \alpha$.

$\triangle AO_2D$ – равноб ($O_2A = O_2D = r$ радиусы).

$\angle O_2AD = \angle O_2DA = 90 - \alpha$

$\Rightarrow \angle AO_2D = 2\alpha$.

по т. кос для $\triangle AO_2D$.

$AD^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos 2\alpha$.

$AD^2 = 2r^2(1 - \cos 2\alpha)$

$\frac{15^2}{4^2} = 2 \cdot \left(\frac{65}{24}\right)^2 (1 - \cos 2\alpha)$

$\frac{\cancel{5}^2 \cdot 3^2 \cdot \cancel{4}^2 \cdot 3^2 \cdot 2^{2^2}}{2 \cdot \cancel{4}^2 \cdot \cancel{5}^2 \cdot 13^2} = (1 - \cos 2\alpha)$

$\frac{3^4 \cdot 2}{13^2} = 1 - \cos 2\alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - \frac{162}{169} = \frac{7}{169}$.

$\Rightarrow$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} = \frac{169 + 7}{2 \cdot 169} = \frac{176}{2 \cdot 169}$.

$\cos^2\alpha = \frac{88}{169}$; $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{22}}{13}$; $\alpha = \arccos\frac{2}{13}\sqrt{22}$.

Ответ: $r = \frac{65}{24}$; $R = \frac{117}{24} = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \arccos\frac{2}{13}\sqrt{22}$

№ 5.

$3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$,

~~$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)$~~ $f(y) = f\left(y^2 \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y^2) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \quad f(y) = f(y^2) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y) - f(y^2)$

$f(y^2) = f(y) + f(y) = 2f(y)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = +f(y) - 2f(y) = -f(y)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$; $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x) - f(y) < 0$

$\boxed{f(x) < f(y)}$

10200

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(3) + f(2) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = 2f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = f(2) + f(6) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = 2f(4) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$

$f(20) = f(2) + f(10) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = f(3) + f(8) = 0$

$f(25) = 2f(5) = 2$

$f(26) = f(2) + f(13) = 3$

$f(27) = f(3) + f(9) = 0$

$\Rightarrow$ если $f(x) = 0$

$0 < f(y)$

$f(y) = 1$

* P-кол-во различ. пар.

$\Rightarrow y = \{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21\}$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27\}$

$\Rightarrow$ кол-во пар $\Rightarrow P_1 = 10 \cdot 7 = 70.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2) если $f(x)=0$

$f(y)=2$

$y=\{11, 22, 25\}$

$\Rightarrow P_2 = 3\cdot 10 = 30.$

если $f(x)=0$

$f(y)=3$, $y=\{13, 26\}$

$P_3 = 10\cdot 2 = 20$

если $f(x)=0$

$f(y)=4$, $y=\{17\}$

$P_4 = 10$

если $f(x)=0$

$f(y)=5$; $y=\{23\}$

$P_5 = 10.$

3) если $f(x) = 1$; $x=\{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21\}$.

1.) $f(y)=2$

$y=\{11, 22, 25\}$

$P_6 = 3\cdot 7 = 21$

2) $f(y)=3$; $y=\{13, 26\}$, $P_7 = 7\cdot 2 = 14$

3) $f(y)=4$; $y=\{17\}$ $P_8 = 7$

4.) $f(y)=5$; $y=\{23\}$, $P_9 = 7.$

4) если $f(x)=2$; $x=\{11, 22, 25\}$

1. $f(y)=3$ $y=\{13, 26\}$

$P_{10} = 3\cdot 2 = 6$

2. $f(y)=4$, $y=\{17\}$, $P_{11}=3$

3. $f(y)=5$; $y=\{23\}$; $P_{12}=3.$

5) если $f(x)=3$ $x=\{13, 26\}$

1. $f(y)=4$; $y=\{17\}$, $P_{13}=2$

2. $f(y)=5$; $y=\{23\}$, $P_{14}=2.$

6) если $f(x)=4$ $x=\{17\}$

$f(y)=5$, $y=\{23\}$ $P_{15}=1$

$\Rightarrow P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{15} = 70+30+20+10+10+21+14+14+6+6+4+1 = 206.$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №10

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{25}{4} + \frac{15^2}{13^2} \cdot \frac{13}{2} = AD^2$

$\frac{25}{4}^{(13} + \frac{15^2}{13 \cdot 2}^{(2} = AD^2$

$\frac{25 \cdot 13 + 25 \cdot 9 \cdot 2}{4 \cdot 13} = AD^2$

$25(13+18)$; $AD^2 = \frac{25 \cdot 31}{4 \cdot 13}$; $AD = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{31}{13}}$

$AD^2 = 2r^2 + 2r^2 \cos 2\alpha$

$\frac{25 \cdot 31}{4 \cdot 13} = 2 \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{13}{2}(1+\cos 2\alpha)$

$\frac{36 \cdot 31}{13^2 \cdot 4} = 1 + \cos 2\alpha$; $\cos 2\alpha = \frac{36 \cdot 31 - 13^2 \cdot 4}{13^2 \cdot 4} = \frac{4(9 \cdot 31 - 13^2)}{13^2 \cdot 4} =$

$= \frac{(279 - 169)}{13^2} = \frac{110}{13^2}$

$\begin{array}{r} \times 13 \\ 13 \\ \hline +39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$

$\cancel{1 = \cos^2}$ $2\cos^2\alpha - 1 = \frac{110}{169}$; $\cos^2\alpha = \frac{279}{2 \cdot 169}$

$\alpha = \arccos \frac{3}{13}\sqrt{\frac{31}{2}}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{9 \cdot 31}{2 \cdot 13^2}}$

$90 - \alpha = \arcsin \frac{3}{13}\sqrt{\frac{31}{2}}$

$\cos\alpha = \frac{3}{13}\sqrt{\frac{31}{2}}$

№5. $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) < 0 = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$.

$f(2) = 0$.

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 0$.

$f(5) = 1$

$f(6) = f(3) + f(2) = 0 + 0 = 0$

$f(7) = 1$

90-

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$ $\quad f(10) = f(2) + f(5) = 1$ $\quad f(12) = f(3) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$ $\quad f(11) = 2$ $\quad f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) =$

$f(\frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{4})$ $\quad \Rightarrow f(\frac{1}{4}) = f(4) + f(\frac{1}{8})$

$f($

$f(2) = f(\frac{1}{2}) + f(4) = f(\frac{1}{2}) = 0.$

$f(\frac{1}{4}) = 0$

$f(\frac{1}{8}) = 0.$

$f(\frac{1}{3}) = 3$

$f(3) = f(9) + f(\frac{1}{3})$; $f(\frac{1}{3}) = -f(3) = 0$

$f(\frac{1}{5}) = f(25) -$

$f(5) = f(25) \cdot f(\frac{1}{5})$

$\Rightarrow f(\frac{x}{y})$; $\quad f(y) = f(y^2) + f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{1}{y}) = f(y) - f(y^2) =$

$= -f(y)$

$\Rightarrow \underbrace{f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)}$

№6. $(1; 3]$

$2 + \frac{1}{(2x-2)} \geq 2x + 6 \geq 8x^2 - 34x + 30$ | Графич.

$100 + 40 + 21 + 28 +$

$2 + 5 =$

$= 161 + 45 = 206$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4 a} \cdot 3^{\log_3 a} - |a|^{\log_4 5} \geq 0.$

$\left(3^{(\log_4 a + \log_3 a)} - |a|^{\log_4 5}\right) \geq 0.$

$\cancel{a^{\log_4 3} + a^1 \geq |a|^{\log_4 5} \quad (1) \quad a > 1}$

$3^{\frac{\log_3(x^2+6x)}{\log_3 4}} \quad \left(3^{\log_3(x^2+6x)}\right)^{\frac{1}{\log_3 4}} = (x^2+6x)^{\frac{1}{\log_3 4}} + 6x + x^2 \geq$

$a^{\frac{1}{\log_3 4}} + a \geq |a|^{\log_4 5}. \quad a > 1$

$\frac{1}{\log_3 4} + 1 \geq \log_4 5. \quad \Big| \cdot \log_3 4$

$1 + \log_3 4 \geq \log_3 4 \cdot \log_4 5 = \log_3 5 \quad \forall$

$\log_3 12 \geq$

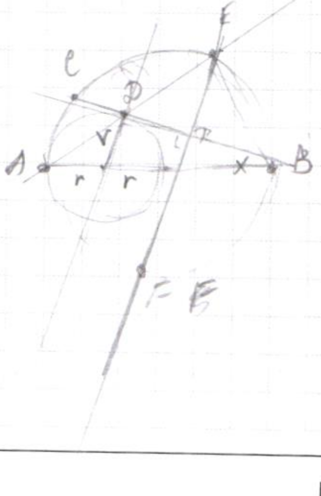
$x^2 + 6x \geq 1 \qquad a = 1 \quad$ всегда $\forall$.

a) $0 < a < 1$

$\frac{1}{\log_3 4} + 1 \leq \log_4 5 \quad \Big| \cdot \log_3 4$

$1 + \log_3 4 \leq \log$

№ 4.



$CD = \frac{5}{2}$

$AD = \frac{13}{2}$

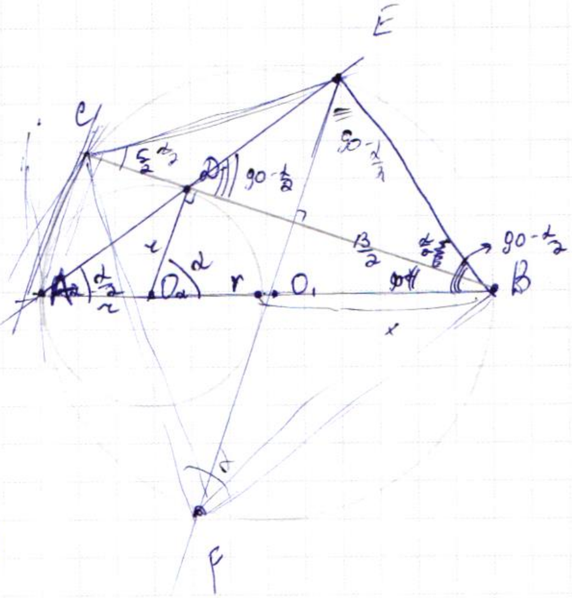
$\begin{cases} DB^2 + r^2 = (x+r)^2 \\ DB^2 = x \cdot (x+2r) \end{cases} \quad DB^2 + r^2 = x^2 + 2xr + r^2$

$2R = x + r$

$R = \left(\frac{x+r}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{13}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



r, R ?
$\angle AFE$
$S_{\triangle AEF}$

$$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = x\cdot(x+2r)$$

$$\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{EB} = \frac{DB}{x+2r}$$

$BE^2 = DE\cdot AE$

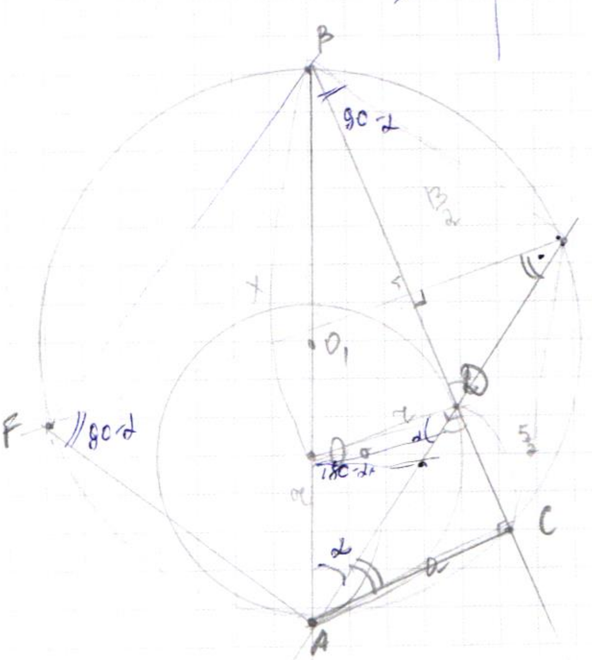
$(2r+x)^2 - AE^2 = DE\cdot AE$

$(2r+x)^2 = (DE+AE)AE$

$(2DE+AD)(AD+ED)$

$3DE\cdot AD + 2DE^2 + AD^2$

$$AD\cdot DE = \frac{5\cdot 13}{4}$$



$$\begin{array}{r} 117 \\ +108 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\frac{x}{x+r} = \frac{r}{a} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}}$$

$$\frac{x}{x+r} = \frac{13}{18}$$

$13x + 13r = 18x$

$13r = 5x$

$$r = x\cdot\frac{18}{13}\quad x = \frac{13^2}{2^2}$$

$$(x+)(x+r) = \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{13^3}{9\cdot 2^3};\quad x = \frac{13}{2\cdot 3}\sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{13}{6}\sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$\cancel{\frac{5}{13}x^2 = \frac{13^2}{2^2}}$$

$$\cancel{x^2 = \frac{13^2}{2^2\cdot 5}} \Rightarrow \cancel{x = \frac{13}{2}\sqrt{\frac{13}{5}}}$$

$$\cancel{x = \frac{13}{5}}\quad r = \frac{5}{13}\cdot\frac{13}{6}\cdot\sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$\frac{r}{a} = \frac{13}{18};\quad a = \frac{18}{13}r = \frac{15}{13}\sqrt{\frac{13}{2}}\ \text{из}\ \triangle DAC$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

(2) $\sin 2\alpha \cdot (\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + \sin 2\alpha \cdot \sin^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos(2\alpha+2\beta)$

$\sin(x+2\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos x + \sin$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \left(\sqrt{1-\frac{1}{17}}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

~~$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\beta + \sin 2\beta \left(\sqrt{\frac{16}{17}}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$~~

$\sin(2(2\alpha+2\beta) - 2\alpha) + \sin 2\alpha$ $\sin(2\cdot(2\alpha+2\beta))\cdot \cos 2\alpha -$
$- \sin 2\alpha \cdot \cos(2(2\alpha+2\beta)) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\left(1-2\sin^2(2\alpha+2\beta)\right) +$
$+ \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\left(1-2\cdot\frac{1}{17}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

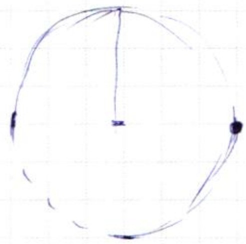
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$2\cdot\left(-\frac{4}{17}\right)\cos 2\alpha \quad -\frac{15}{17}\sin 2\alpha+\sin 2\alpha \quad =-\frac{8}{17}$$

$$-\frac{8}{17}\cos 2\alpha \quad +\frac{2}{17}\sin 2\alpha=-\frac{8}{17} \quad :\cdot \frac{17}{2}$$

$$-4\cos 2\alpha \quad + \sin 2\alpha \quad = -4$$

$$\begin{cases}\cos 2\alpha = 1 \\ \sin 2\alpha = 0.\end{cases} \quad 2\alpha = \quad \Rightarrow tg\, \alpha = 0$$



$$tg\, 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 tg\alpha}{(tg^2\alpha+1)\cos 2\alpha}.$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$-4\left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)+\frac{2 tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = -4$$

$$\frac{-2+2tg^2\alpha \quad + tg\alpha}{1+tg^2\alpha.} = -2$$

ОДЗ: $\cos 2\neq 0$

$$\frac{-2+2tg^2\alpha+tg\alpha+ \quad 2+2tg^2\alpha.}{1+tg^2\alpha.} = 0$$

$$4tg^2\alpha + tg\alpha \quad = 0$$

$$tg\alpha(4tg\alpha+1)=0$$

$$tg\alpha=0$$

$$tg\alpha=-\frac{1}{4}$$

2) $\frac{8}{17}\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{8}{17}\cos 2\alpha + \frac{2}{17}\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -4$

$4\left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) + \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1} = -4$

$\frac{2-2tg^2\alpha + tg\alpha}{tg^2\alpha+1} = -2$

$\frac{2-2tg^2\alpha + tg\alpha + 2tg^2\alpha + 2}{tg^2\alpha+1} = 0$

$tg\alpha = -4$

№2.

$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$ ② $3y-2x \geq 0$

② $3(x-1)^2 - 3 + 3y^2 = 4$

$\boxed{3(x-1)^2 + 3y^2 = 7}$
$-4y$.

$3y-2x = \sqrt{3y(x-1)+2-2x}$

$3y(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(3y-2)$

$3y-2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$.

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$.

$3y-2x = 3y-2x+2-2 =$
$\boxed{=(3y-2)-2(x-1)}$

$2x(2x+1)$

$3(x-1)^2 - 3 + 3y^2 - 4y = 4$ | $(3y-2)^2 = 9y^2 - 12y + 4) - 6y^2 + 8y$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

① $(3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

② $3(x-1)^2-3+(3y-2)^2-6y^2+8y-4=4$

$3(x-1)^2-3+(3y-2)-\cancel{8}$

$3y^2-4y=(3y-2)\cdot(y+2)$

$\frac{(3y-2)^2}{3}=\frac{9y^2-12y+4}{3}=$

$=3y^2-4y+\frac{4}{3}$

$3y^2-4y \mid 3y-2$

$3y^2-2y \mid y$

$2y$

$$\boxed{3(x-1)^2-3+\frac{(3y-2)^2}{3}-\frac{4}{3}=4}$$

$\Rightarrow$ $x-1=a$

$3y-2=b$.

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 3a^2+\frac{b^2}{3}=\cancel{7}+\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=25 \end{cases}$$

$b-2a\geq 0$

$b^2-4ab+4a^2=ab$

$b^2-5ab+4a^2=0$

$(3a+b)^2-6ab$

$5a^2+5ab=25$

$a^2+ab=5$

$a^2+ab-5=0$

№3.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$.

$3^{\log_4 a}+a\geq|a|^{\log_4 5}$

$a^{\log_a b}=b$.

$3^{\log_4 a}=a^{\log_4 3}$

$a^{\log_4 3}+a\geq|a|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 a}+a\geq|a|^{\log_4 5}$

$4^{\log_4(3^{\log_4 a})}+4^{\log_4 a}\geq 4^{\log_4(|a|^{\log_4 5})}$

$\log_4 3^{\log_4 a}+\log_4 a\geq\log_4(|a|^{\log_4 5})$

$a>0$

$a\neq 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)