МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. Ответ: ~~[illegible]~~ $x \in (0; 2]$.

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

ОДЗ: $x^2+6x > 0$. На ОДЗ $|x^2+6x| = x^2+6x$.

$\Rightarrow 3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$. Пусть $x^2+6x = a$.

$a^{\log_4 3} + a^{\log_4 4} - a^{\log_4 5} \geq 0. \Rightarrow 3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} - 5^{\log_4 a} \geq 0.$

Пусть $\log_4 a = b$. $3^b + 4^b - 5^b \geq 0$. ~~[illegible]~~ $/ : 5^b$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^b + \left(\frac{4}{5}\right)^b - 1 \geq 0$. $y(b) = \left(\frac{3}{5}\right)^b + \left(\frac{4}{5}\right)^b - 1$

монотонно убывает, равенство нулю достигается при $b = 2$ $\Rightarrow$ решением нер-ва будет $b \leq 2 \Rightarrow \log_4 a \leq 2$

$\Rightarrow a \leq 16 \Rightarrow 0 < x^2+6x \leq 16 \Rightarrow 0 < x(x+6) \leq 16$.

При $x = 2$ $x^2+6x = 16$, 0 - больший корень $x^2+6x = 0$ $\Rightarrow$ на $x \in (0; 2]$ $x^2+6x \leq 16$ (и на $(2; +\infty)$ $x^2+6x > 16$) $\Rightarrow (0; 2]$ - ответ.

№5.

Ответ: ~~[illegible]~~ 229.

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ $(x, y \neq 0)$ $\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Найдём $f(p)$ для всех простых чисел $p \leq 27$. Их значения представлены в таблице слева.

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

Теперь для всех натуральных $3 \leq n \leq 27$ нетрудно найти $f(n)$, разложив n на простые множители и многократно применив $f(ab) = f(a) + f(b)$.

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

Их значения представлены в таблице слева.

№5 (продолжение).

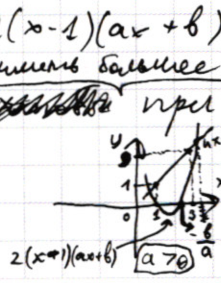
Ответом на задачу будет кол-во пар чисел $x, y \in \mathbb{N}$ таких, что $f(x) < f(y)$. Среди ~~представ~~ представленных в последней таблице значений $f(n)$ 10 нулей, 7 единиц, 3 двойки, 2 четверки, 2 тройки, 1 пятёрка. Если среди них есть a значений, равных c, и b значений, равных d, где $c<d$, то есть $a\cdot b$ пар чисел $(k; l)$ таких, что $c = f(k) < f(l) = d$. Найдём $a\cdot b$ для всех $(c; d)$ из $\{(0;1),(0;2),\ldots,(0;5),(1;2),(1;3),\ldots,(4;5)\}$ и сложим полученные результаты: $10\cdot 7 + 10\cdot 3 + 10\cdot 2 + \ldots + 10\cdot 1 + 7\cdot 3 + 7\cdot 2 + \ldots$
$\ldots + 2\cdot 1 = 229$ искомое число.

№6. Ответ:

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

1. ОДЗ: $x \neq 1$. $f(x)=8x^2-34x+30 = 2(4x-5)(x-3)$, $f(3)=0$, $f(1)=4$.
$g(x)=ax+b$. $g(1)=a+b$, $g(3)=3a+b$ $\Rightarrow$ $a+b\geq 4$, $3a+b \geq 0$.
Для таких a, b прямая $ax+b$ будет лежать выше $f(x)$ на $[1;3]$, т.к. график $f(x)$ — парабола с ветвями вверх.

2. $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \;\Big/\cdot(2x-2) > 0$ на $(1;+\infty)$ $\Rightarrow$ знак нер-ва не меняется
$4x-3 \geq 2ax^2+2bx-2ax-2b = 2(ax^2+(b-a)x-b) = 2(x-1)(ax+b)$
$4x-3=1$ при $x=1$, $4x-3=9$ при $x=3$.
$2(x-1)(ax+b)=0$ при $x=1; -\frac{b}{a}$; при $x=3$ $2(x-1)(ax+b)=12a+4b$
$2(x-1)(ax+b)=4x-3$ должно иметь большее решение на $(3;+\infty)$
$\Rightarrow 12a+4b \leq 9$; и при $a>0$ или
нужно $-\frac{b}{a} \leq 1$ при $a<0$ (исходя из взаимного расположений графиков функций):



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение.

$2(x-1)(ax+b)=4x-3 \Rightarrow 2ax^2+2(b-a)x-2b-4x+3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax^2+2(b-a-2)x-2b+3=0.$ $\frac{D_1}{4}=b^2+a^2+4+4a-2ab-4b+$

$+6a-4ab=a^2+(10-6b)a+b^2-4b+4=a^2+(10-6b)a+(b-2)^2.$

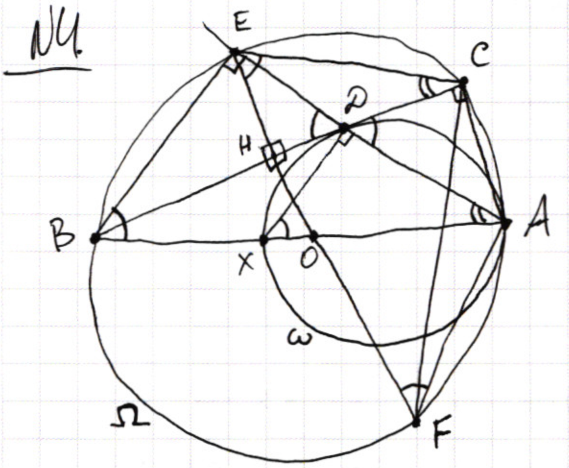
$\frac{D_2}{4}=25+9b^2-30b-(b^2-2)^2=8b^2-26b+21=(2b-3)(4b-7)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№4



Ответ: $\angle AFE = 60^\circ$.

AB - диаметр Ω => центр Ω, ω лежат на AB; Пусть $AB \cap \omega = X$, тогда AX - диаметр ω => $\angle ADX = 90^\circ = \angle AEB = \angle ACB$. Пусть $EF \cap BC = H$.

$BC = BD + DC = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9$.

$BD^2 = BX \cdot BA = \frac{169}{4}$. $\angle ACH = \angle CHF = 90^\circ$ => $AC \parallel EF$. $\angle AFE = \angle ABE$ как опир. на одну дугу. Пусть $\angle AFE = \alpha = \angle ABE$, а $\angle BAE = 90^\circ - \alpha = \angle BCE$ как опирающиеся на одну дугу => $\angle CEH = \alpha$. $\angle DXA = \angle CDA = \alpha$ как угол между касательной и хордой => $\angle EDB = \alpha$ => $\triangle BED \sim \triangle BHE \sim \triangle EHD \sim \triangle CHE \sim \triangle ACD \sim \triangle AEB \sim \triangle ADX$ - прямоугольные $\triangle$ с углами α и $90^\circ - \alpha$.

=> $\angle EBC = 90^\circ - \alpha$ => $EB = EC$ => EF - диаметр Ω => $BH = HC$, EH - бисс. $\triangle BEC$ => $\angle CEH = \angle BEH = \angle EFA$ => $AF \parallel BE$. $\angle BAD = \angle EAC = 90^\circ - \alpha$ => AD - бисс. $\triangle ABC$ => $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{13}{5}$.

[$CD \cdot DB = ED \cdot DA$.] AE - бисс. $\angle BAC$ - попала в вершину E вписанного $ABEC$ и диагональ $ABEC$ => $ABEC$ – равнобокая трапеция => $\alpha = 2(90^\circ - \alpha)$ => $\alpha = 60^\circ = \angle AFE$.

$\angle EAF = 90^\circ$, т.к. EF - диам.

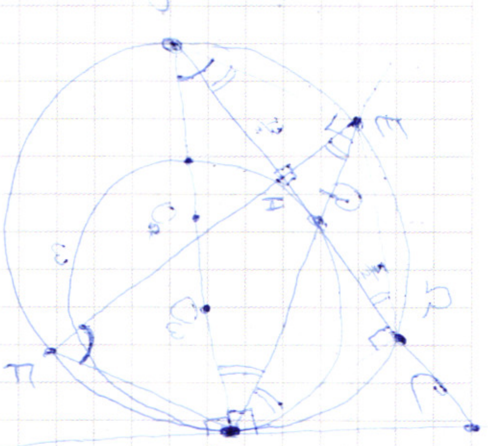
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

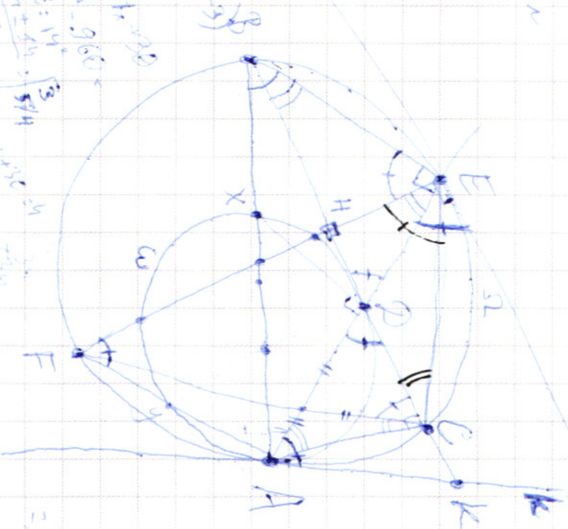
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$EF \parallel CA$ $BC = 9$

$2\cdot 2(3a+b)$

$12a+4b$



$EF \parallel AC$

$\Omega \times EB$

$EF = 96°$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = a$ $\cos 2\alpha = c$
$\cos 2\beta = b$ $\sin 2\beta = d$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = ab + cd = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha+2\beta)\sin(2\beta) = ab^2 + cdb + bcd - ad^2 = a(b^2-d^2) + 2bcd = -\frac{8}{17}$

~~$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha$~~

$\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{17}$; $\cos^2(2\alpha+2\beta) = \frac{16}{17}$

$a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 = \frac{1}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) + \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}\sin(2\beta) = -\frac{8}{17} = -\frac{1}{\sqrt{17}}b + \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}d$

$\sqrt{17}\,b \pm 4\sqrt{17}\,d = 8$

$\sin(2\alpha+2\beta)\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)\sin(2\beta) + \sin(2\alpha+2\beta)\sin(2\alpha) = \frac{8}{17\sqrt{17}}$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} 3y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2 & (1) \\ 3y^2 + 3x^2 - 6x - 4y - 4 = 0 & (2) \end{cases}$

$(1)+(2)$: $7x^2 + 6y^2 - 15xy - 4x - y - 6 = 0$

$7x^2 - (4+15y)x - y - 6 + 6y^2$

$(1)-(2)$: $x^2 - 15xy + 2 + 8x + 7y = 0$

$x^2 + (8-15y)x + 7y + 2 = 0$

$D = 64 + 225y^2 - 240y - 28y - 8 = 225y^2 - 268y + 56$

$4^{\log_4 8} = 8^{\log_4 4}$

$\log_4(3^{\log_4 8})$

~~$2(1) - (2)$ $3y^2+4x^2-15xy$~~

$6y^2 + 8x^2 - 30xy + 4x + 6y - 2$

$3y^2 + 3x^2 - 6x - 4y - 4 = 0$

ОДЗ: $x^2 + 6x \neq 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$ $\quad | : (x^2+6x)^{\log_4 3}$

$a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5} + a^{\log_4 4} \geq 0$

$3^{\log_4 a} - 5^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} \geq 0$

$3^b - 5^b + 4^b \geq 0 \quad | : 5^b$

$\left(\frac{3}{5}\right)^b - 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^b \geq 0$ убыв.

при $b = 2$ равенство

$x \in (-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$.

$\log_4 a = b \leq 2$

$a \leq 16$: $x^2 + 6x = x(x+6)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА