МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-6x\geq 0 \\ (y-6x)^2=xy-6x-y+6 \\ 9x^2-18x+36+y^2-12y+9=90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y\geq 6x \\ y^2+36x^2-13xy+6x+y-6=0 \quad (1) \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $y^2+y(1-13x)+36x^2+6x-6$

$$y=\frac{-1+13x\pm\sqrt{1+169x^2-26x-144x^2-24x+24}}{2}=\frac{-1+13x\pm\sqrt{25x^2-50x+25}}{2}$$

$$=\frac{-1+13x\pm 5(x-1)}{2}=\left[\begin{array}{l} 9x-3 \\ 4x+2 \end{array}\right.$$

• $\Rightarrow y=\left[\begin{array}{l} 9x-3 \\ 4x+2 \end{array}\right. \Rightarrow y-6=\left[\begin{array}{l} 9(x-1) \\ 4(x-1) \end{array}\right. \Rightarrow$

(2) $9\cdot(x-1)^2+(y-6)^2=90 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9(x-1)^2+81(x-1)^2=90 \\ 9(x-1)^2+16(x-1)^2=90 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2=1 \\ (x-1)^2=\frac{90}{25} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\pm 1 \\ x-1=\pm\frac{\sqrt{90}}{5} \end{array}\right. \Rightarrow x=\left[\begin{array}{ll} \pm 1+1 & \text{при } y=9x-3 \\ \pm\frac{\sqrt{90}}{5}+1 & \text{при } y=4x+2 \end{array}\right. \Rightarrow x= 2;\ 0;\ \frac{\sqrt{90}+5}{5};\ \frac{5-\sqrt{90}}{5}$

Но! $y\geq 6x \Rightarrow$ Если $x=2 \Rightarrow y=18-3=15$ и $15\geq 2\cdot 6$ ✓

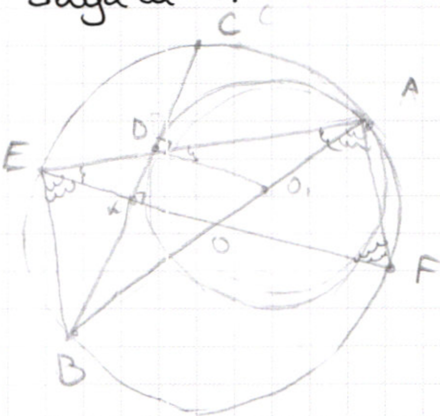
Если $x=0 \Rightarrow y=-3$ и $-3<0$ ✗

Если $x=\frac{5+\sqrt{90}}{5} \Rightarrow y=\frac{30+4\sqrt{90}}{5}$; $6x=\frac{30+6\sqrt{90}}{5}$ ✗

Если $x=\frac{5-\sqrt{90}}{5} \Rightarrow y=\frac{30-4\sqrt{90}}{5}$; $6x=\frac{30-6\sqrt{90}}{5}$ ✓

Ответ: ~~x=1; 0; ...~~ $x=2$ и $y=15$ или $x=1-\frac{\sqrt{90}}{5}$; $y=6-\frac{4\sqrt{90}}{5}$

Задача 4.



т. O_1 - центр малой окружности т.к. BA и $O_1A \perp$ касательной в точке A => т. $O_1 \in BA$.

$O_1D \perp BC$ т.к. BC - касательная => $DO_1 \parallel EF$ т.к. $EF \perp BC$ (т. K - пересечение EF и BC.

=> $\angle EAB = \angle ADO_1$ т.к. $DO_1 = O_1A$ и $\angle O_1DA = \angle FEA$

=> $\angle FEA = \angle EAB$. $\angle BEF = \angle BAF$ т.к. опираются на одну дугу. => $\angle BEA = \angle EAF$. т.к. AB - диаметр =>

=> $\angle BEA = \angle EAF = 90°$. => EF - диаметр =>

пересечение EF и BA - т. O - центр большей окружности. т.к. O - центр =>

=> $BO = OC$ => $\triangle BOC$ - р/б. => $OK - \perp BC$ и OK делит BC пополам =>

$BK = KC = BC/2 = (BD+DC)/2 = 12{,}5$ => $DK = \frac{1}{2}$

т.к. CB и EF - хорды => $EK \cdot KF = CK \cdot KB = \left(\frac{25}{2}\right)^2$ => $EK \cdot (2R - EK) = \frac{5^4}{4}$.

и т.к. $\triangle EDB$ - прямоугольный и $EK \perp DB$ => $EK^2 = KD \cdot KB = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

=> $EK = \frac{5}{2}$ => $EK \cdot (2R - EK) = \frac{5}{2} \cdot \left(2R - \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5^3}{2}$ => $2R = \frac{125+5}{2} = \frac{130}{2}$

=> $R = \frac{65}{2}$ (радиус большей окружности Ω)

- $ED^2 = EK^2 + KD^2 = \frac{25}{4} + \frac{1}{4} = \frac{26}{4}$; $ED \cdot DA = BD \cdot DC = 12 \cdot 13 = DA \cdot \frac{\sqrt{26}}{2}$ => $DA = 12\sqrt{26}$

$\triangle DAO_1 \sim \triangle EAO$ т.к. $\angle A$ общий и $\angle ADO_1 = \angle AEO$ => $\frac{EA}{DA} = \frac{EO}{DO} = \frac{R}{r}$

$EA = ED + DA = \frac{25}{2} \cdot \sqrt{26}$ => $r = \frac{R \cdot 12\sqrt{26} \cdot 2}{25 \cdot \sqrt{26}} = R \cdot \frac{24}{25} = \frac{65 \cdot 12}{25} = \frac{13 \cdot 12}{5}$

$r = \frac{13 \cdot 12}{5} = \frac{156}{5} = 31{,}2$ (радиус меньшей окружности ω)

- ~~$\angle EFA = 90° - \angle AEF = 90° - \angle FEA = \angle FEB$~~

По т. синусов. т.к. окружность Ω описана вокруг $\triangle EAF$ =>

$\frac{EA}{\sin \angle EFA} = 2R$ => $\frac{25 \cdot \sqrt{26}}{2 \cdot \sin \angle EFA} = 65$ => $\sin \angle EFA = \frac{25 \cdot \sqrt{26}}{130} = \frac{5 \cdot \sqrt{26}}{26} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4. Продолжение.

- $\triangle AEF$ – прямоугольный. $\Rightarrow S_{AEF} = AE \cdot AF \cdot \frac{1}{2}$.

$AF^2 = EF^2 - EA^2 = 65^2 - \frac{25^2 \cdot 26}{4} = \frac{4 \cdot 65^2 - 25^2 \cdot 26}{4} = \frac{26^2 \cdot 25 - 25 \cdot 26}{4} = \frac{25^2 \cdot 26}{4} \Rightarrow$

$AF = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{26}$

$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{25}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{1}{2} = \frac{125 \cdot 26}{8} = \frac{125 \cdot 13}{4}$

$125 \cdot 25$: 625, 250, 31.25

$31,25 \cdot 13$: 9375, 3125, 406.25

Ответ: $R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{13 \cdot 12}{5} = 31,2$

$\sin \angle EFA = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \angle EFA = \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}$

$S_{AEF} = \frac{125 \cdot 13}{4} = 406,25$

Задача 6.

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

- $\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-6x+4+4}{3x-2} = \frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2} = y$ – гипербола

асимптота $x = \frac{2}{3}$, $y = -2$

- $18x^2 - 51x + 28 = y$ – парабола

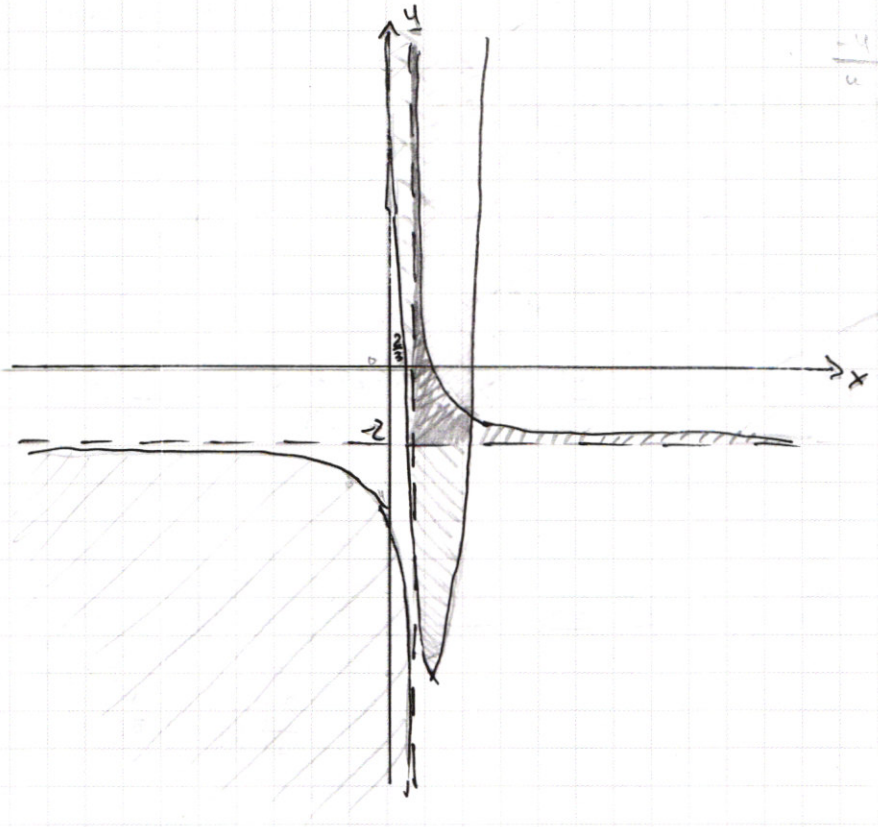
$x_0 = \frac{51}{2 \cdot 18} = \frac{17}{12}$ $y_0 = \frac{18 \cdot 17^2}{12 \cdot 12} - \frac{51 \cdot 17}{12} + 28 = 28 - \frac{17^2}{8}$

X_0 $y=0$ $x = \frac{51 \pm \sqrt{3^2 \cdot 17^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 7}}{2 \cdot 2 \cdot 9} = \frac{51 \pm 3\sqrt{289 - 224}}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{17 \pm \sqrt{65}}{12}$

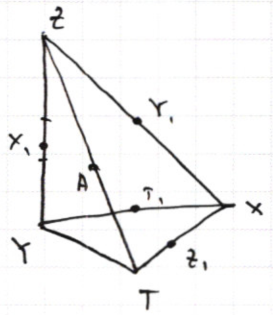
Y_0 $x=0$ $y = 28$

$a>0$ ветви вверх

Изобразим плоскости где: $y \le \frac{8-6x}{3x-2}$ и $y \ge 18x^2-51x+28$.



Задача 7.



т. $X_1Y_1T_1$ и Y лежат на одной окружности т.к. лежат в одной плоскости и лежат на одной сфере.

=> $\angle YX_1Y_1 = 180° - \angle YT_1Y_1$ но $X_1Y_1 \parallel YT_1$ (ср. линия)

=> $X_1Y_1T_1Y$ - прямоугольник

Аналогично т.к. X_1A и T_1Z_1 - ср. линии =>

они $\parallel YT$ => лежат в одной плоскости =>

т. $AX_1T_1Z_1$ лежат на одной окружности и

$AX_1T_1Z_1$ - прямоугольник => $YT \perp ZX$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

6) $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

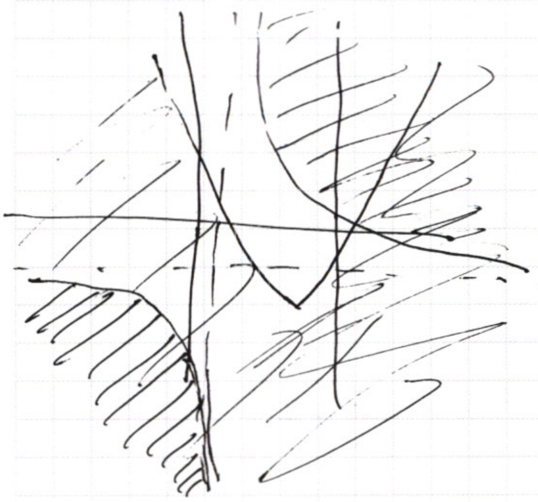
$\cdot\, 18x^2-51x+28 = 3\cdot3\cdot2x^2 - 3\cdot17x + 7\cdot4\cdot$

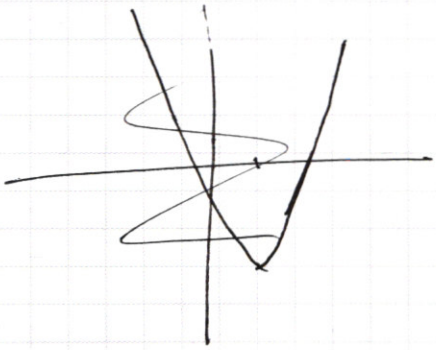
$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-2(3x-4)}{} = \frac{-2\cdot(3x-2)+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$\alpha x\ \frac{51}{2\cdot18} = \frac{17}{12}\quad \frac{17^2}{8} - \frac{2\,17^2}{8} + 28 = 28 - \frac{17^2}{8}$

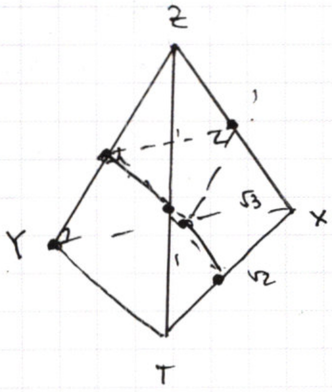
$x = \frac{51 \pm \sqrt{3^2\cdot17^2 - 4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot7\cdot4}}{}$ $3\sqrt{17^2-32\cdot7}$ $\frac{17 \pm 8\sqrt{65}}{4\cdot3\cdot3}$

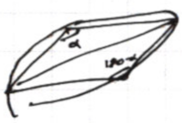
4 17 17 119 17 289 32 7 224 65

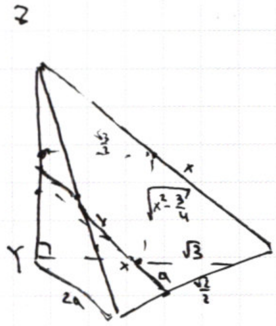




7)







$\frac{3}{4} + x^2 - \frac{3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$-2+\frac{4}{3x-2} \geq \frac{2}{3}a+b$

$\frac{2}{3}a+b=\infty$

Задача 2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-6x \geq 0 \\ (y-6x)^2 = xy-6x-y+6 \\ 9x^2+y^2-18x-12y+45=90 \end{cases}$$

$y \geq 6x$

$$\begin{cases} y \geq 6x & \text{- полуплоскость} \\ y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0 & (1) \\ 3^2(x-1)^2+(y-6)^2=90 & \text{- элипс (2)} \end{cases}$$

$y \leq -2+\frac{4}{3x-2}$ $x=0$ $y=-4$ $y\leq -4$ $x=80$

(1) $y^2+y(-13x+1)+36x^2+6x-6=0$

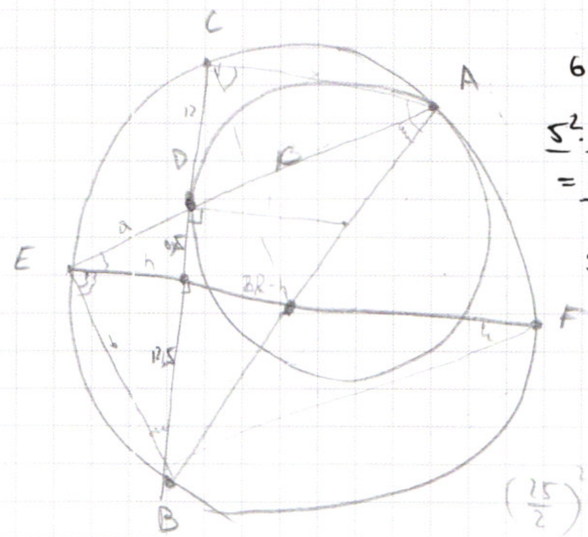
$$y=\frac{13x-1 \pm \sqrt{169x^2-26x+1-144x^2-24x+24}}{2}=\frac{13x-1\pm 5(x-1)}{2}=$$

$$=\frac{13x-1\pm 5x\mp 5}{2}=\left[\begin{array}{l} 9x-3 \\ 4x+2 \end{array}\right.$$

(2) $3^2(x-1)^2+(y-6)^2=90$

т.к. из (1) $y=\left[\begin{array}{l} 9x-3 \\ 4x+2 \end{array}\right. \Rightarrow y-6=\left[\begin{array}{l} 9x-9 \\ 4x-4 \end{array}\right.=\left[\begin{array}{l} 9(x-1) \\ 4(x-1) \end{array}\right. \Rightarrow$

(2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9(x-1)^2+81(x-1)^2=90 \\ 9(x-1)^2+16(x-1)^2=90 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2=1 \\ 5(x-1)^2=18 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1+1 \\ x=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}+1 \end{array}\right.$



$65^2=5^2\cdot 13^2$ $\frac{25}{4}\cdot 26+\frac{25^2 26}{4}=\frac{25\cdot 26}{4}=13\cdot 13$

$\frac{5^2\cdot 13^2\cdot 4}{4}-\frac{5^2\cdot 5^2\cdot 13\cdot 2}{4}$ $\frac{25\cdot 26}{4}\cdot 26=25\cdot 13\cdot 13=5\cdot 13$

$=\frac{5^2\cdot 13\cdot 2\cdot(13\cdot 2-5^2}{4}$

$\frac{5^2\cdot 13}{2}$ $h^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2}\Rightarrow h=\frac{5}{2}$

$\frac{5^2\cdot 26}{4}$

$\frac{5}{2}\cdot\sqrt{26}$ $\frac{5}{2}\cdot(2R-\frac{5}{2})=\frac{(25)^2}{4}$

$2R-\frac{5}{2}=\frac{125}{2}$

$2R=\frac{130}{2}$

$\boxed{R=\frac{130}{4}=\frac{65}{2}}$

$\frac{R}{r}=\frac{a+c}{c}=\frac{a}{c}+1=\frac{25}{24}$

$r=\frac{12\cdot 13}{5}$

$\sqrt{26}\, c=24\cdot 13$

$c=\frac{24\cdot 13}{\sqrt{26}}=\frac{12\cdot 26}{\sqrt{26}}=12\sqrt{26}$

$\frac{a}{c}=\frac{1}{24}$

$b=\frac{5}{2}\sqrt{26}$

$65^2-\frac{25^2\cdot 26}{4}$

$\frac{2\cdot 2\cdot 13\cdot 13\cdot 5\cdot 5-5\cdot 5\cdot 13\cdot 2\cdot 5\cdot 5}{4}$

$\frac{13\cdot 2-25}{4}=\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 2 3 4 5 6 7

+ +

1). • tg α - есть => $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2B) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4B)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases} \Rightarrow$$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2B + \sin 2B\cdot\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4B + \sin 4B\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\cdot(\cos^2 2B - \sin^2 2B) + 2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha + \sin 2\alpha$

$\cos(2\alpha+2B) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$$* = \begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2B + \sin 2B\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \underbrace{\sin(2\alpha+2B)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos 2B + \underbrace{\cos(2\alpha+2B)}_{\pm\frac{4}{\sqrt{17}}}\cdot\sin 2B = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$-\cos 2B \pm 4\sin 2B = -\frac{2}{\sqrt{17}} = 2\sin(2\alpha+2B)$

$-\cos^2 B + \sin^2 B \pm 8\sin B\cdot\cos B = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$2\sin^2 B \pm 8\sin B\cdot\cos B + \frac{2}{\sqrt{17}} - 1 = 0$

$\sin B = \mp 8\cos B \pm \sqrt{16\cos^2 B - \frac{8}{\sqrt{17}} + 8}$

$\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2B - \cancel{\sin 2\alpha} + \cancel{2\sin 2B\cos^2}$

$+ \underbrace{\sin 4B}_{2\cdot\cos 2B\cdot\sin 2B}\cdot\cos 2\alpha = 0$

$2\cos 2B(\sin 2\alpha\cdot\cos 2B + \sin 2B\cdot\cos 2\alpha) = 0$

$\Rightarrow \cos 2B = 0$

$\cancel{2}\cos 2B\cdot\mp\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}} = +\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{17}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2B = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin 2B = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cancel{B = \pi + 2\pi k}$

$\cancel{\sin 2B = 0}$

$\cancel{2B = 2\pi k}$

$\sin(2\alpha+4B) = \sin 2\alpha\cdot\cos 4B + \sin 4B\cdot\cos 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot(2\cos^2 2B - 1) +$
$+ 2\cos 2\alpha\cdot\sin 2B\cdot\cos 2B$

$\sin 2\alpha\cdot\underline{2\cos^2 2B} - \cancel{2\sin 2\alpha} + \underline{2\cos 2\alpha\cdot\sin 2B}\cdot\underline{\cos 2B} \cancel{+\sin 2\alpha} = 0$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2B -$

$\cos 2B = 0$

$2B = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{B = \frac{\pi}{4}}$ $\cos 2B = 0$, $\sin 2B = 1$, $\cos 4B = -1$, $\sin 4B = 0$

$\cancel{\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\cancel{\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\cancel{-\sin(2\alpha)} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cancel{\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\cancel{2\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \pm 4\cdot(2\cos^2\alpha - 1) + 1 = 0$

$8\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3 = 0$

$\cos\alpha = -2\sin\alpha \pm\sqrt{4\sin^2\alpha + 24}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2) $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Rightarrow$ $y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)} \Rightarrow y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$(3x)^2-2\cdot3\cdot3\cdot x \quad -2\cdot6\cdot y$

$\Rightarrow y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$
$(3x-3)^2+(y-6)^2=90 \Rightarrow$ $y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$
$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$\cdot\ y-6x\geq0 \quad y\geq6x$
$y^2-12xy+36x^2=(x-1)(y-6)$

$\cdot\ y^2-12xy+36x^2-xy+6x+y-6=y^2-13xy+36x^2+6x-6+y=0$

$y^2+y(-13x+1)+36x^2+6x-6=0$

$y=\dfrac{+13x-1\pm\sqrt{169x^2-26x+1-144x^2-24x+24}}{2}$

$y=\sqrt{6-y}$
$y^2=36-y$
$y^2+y-36=0$
$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{145}}{2}$
$y^2-12y-45$
$y=\dfrac{12\pm\sqrt{144+90}}{2}$

$25x^2-50x+25$
$25(x^2-2x+1)$
$25\cdot(x-1)^2=(5\cdot(x-1))^2$

$y=\dfrac{13x-1\pm(5x-5)}{2}=$ $\dfrac{13x-1+5x-5}{13x-1-5x+5}=\dfrac{18x-6}{8x+4}=\left[\begin{matrix}9x-3\\4x+2\end{matrix}\right.$

$9x-3\geq6x$
$3x-3\geq0$

$-2x+2\geq0$
$x-1\geq0$

3) $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$ $\cdot\ 26x-x^2>0$

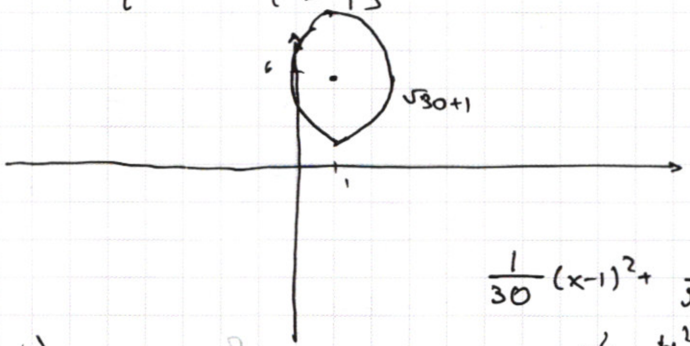
$t^{\log_5 12}+t\geq13^{\log_5 t}$

$\log_a b=x \iff a^x=b$

$\log_5 \quad t^{\log_5 12}=p \Rightarrow \log_t p=\log_5 12$

$\log_5 t=\dfrac{\log_5 12}{\log}$

$\log_{13}+3^{\cancel{\log_5 x}}$ $\quad \log_5 t=p$
$5^p=t$

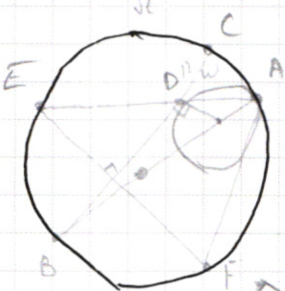


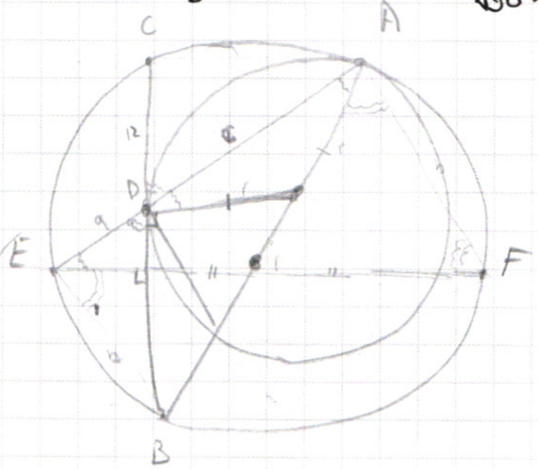
$\dfrac{1}{30}(x-1)^2+\dfrac{1}{90}(y-6)^2=1$

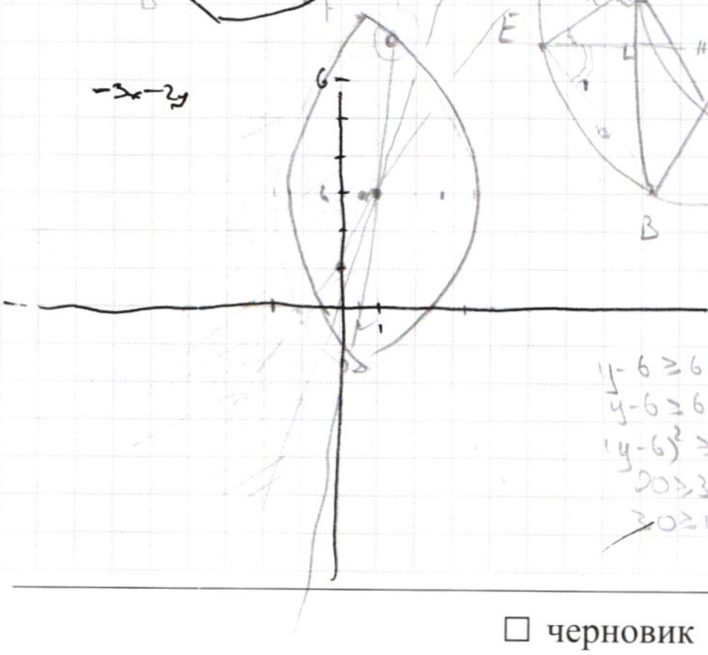
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

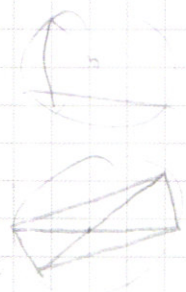
$\sqrt{30}\sim5{,}5$
$\sqrt{90}\sim9{,}5$

4)









$-3x-2y$

$\dfrac{13}{2R} \quad \dfrac{a}{b}$

$a=\sqrt{169-b^2}$

$2R=\dfrac{13\cdot b}{\sqrt{169-b^2}}=$

$\dfrac{2r}{c}=\dfrac{2R}{a\cdot c}$ $\quad a\cdot c=12\cdot13$

$y-6\geq6x-6$
$y-6\geq6(x-1)$
$(y-6)^2\geq36(x-1)^2$
$90\geq39(x-1)^2$
$30\geq13$

$a^2+b^2=13^2$
$\underbrace{a^2+b^2}_{13^2}+c^2+2ac=2R^2$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)