



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = \frac{15}{2}$ ,  $BD = \frac{17}{2}$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 25$ ,  $2 \leq y \leq 25$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[\frac{1}{4}; 1]$ .

7. [6 баллов] Дана пирамида  $KLMN$ , вершина  $N$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $KN$ . Известно, что  $KL = 3$ ,  $KM = 1$ ,  $MN = \sqrt{2}$ . Найдите длину ребра  $LM$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.  $a = 2\alpha$     $b = 2\beta$

$$\sin a \cos b + \cos a \sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin a (\cos^2 b - \sin^2 b) + \cos a \cdot 2 \sin b \cos b + \sin a = -\frac{2}{5} =$$

$$= 2 \sin a \cos^2 b + 2 \cos a \sin b \cdot \cos b = 2 \cos b \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$2 \cos b = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos b = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin b = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sin a}{\sqrt{5}} \pm \frac{2 \cos a}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin a \pm 2 \cos a = -1$$

~~$\sin a \pm 2 \cos a = -1$~~

1)  $\sin a = 1 - 2 \cos a$

2)  $\sin a = 2 \cos a - 1$

$$2 \sin a \cos a = -3 \cos^2 a + \sin^2 a$$

$$2 \sin a \cos a = \cos^2 a - 3 \sin^2 a$$

$$2 + \operatorname{tg} a = -3 + \operatorname{tg}^2 a$$

$$2 \operatorname{tg} a = 1 - 3 \operatorname{tg}^2 a$$

$$\operatorname{tg}^2 a - 2 \operatorname{tg} a - 3 = 0$$

$$3 \operatorname{tg}^2 a + 2 \operatorname{tg} a - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6}$$

$$\operatorname{tg} a = \left\{ -1; 3; \frac{1}{3} \right\}$$

2.  $(x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$$x-6 = a$$

$$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 - 45 = 45$$

$$2y-1 = b$$

$$a \geq 6b \quad ab \geq 0$$



$$(a-6b)^2 = ab$$

$$a^2 + 9b^2 = 90$$

$$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$$

$$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$$

$$(a-4b)(a-9b) = 0$$

$$1) a = 4b$$

$$25b^2 = 90$$

$$b = \sqrt{3,6} \quad a = 4\sqrt{3,6}$$

$$~~a < 6b~~ \quad \underline{a < 6b} \Rightarrow \emptyset$$

$$b = -\sqrt{3,6} \quad a = -4\sqrt{3,6}$$

$$x = 6 + a \quad y = \frac{b+1}{2}$$

$$x = 6 - 4\sqrt{3,6} \quad y = \frac{1 - \sqrt{3,6}}{2}$$

$$x = 15 \quad y = 1$$

3.

$$10x - x^2 + \sqrt{10x - x^2} \sqrt{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$10x - x^2 > 0$$

$$10x - x^2 = t$$

$$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} = t^{\log_3 5}$$

$$t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$$

$$f(x) = t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \quad t > 0$$

$$f'(x) = \log_3 4 t^{\log_3 4 - 1} - \log_3 5 t^{\log_3 5 - 1}$$



$$f''(x) = \log_3 4 \cdot \log_3 4 t^{\log_3 4 - 2} - \log_3 5 \cdot \log_3 5 t^{\log_3 5 - 2}$$

$$\text{где } t \leq 1: \quad t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} \leq 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$\text{где } t > 1: \quad (t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}) \uparrow \Rightarrow 1 \text{ реш.}$$

$$f(x) = 0 \quad x_1 = 9 \quad (\text{можно подставить})$$

$$\text{Ответ: } t \in (0; 9) \Rightarrow x \in (0; 1) \cup (9; 10)$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

$$f(1 \cdot a) = f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = 0 = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = f(a) \cdot (-1)$$

$x$	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(x)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

$$f(x_y) < 0 \text{ если } f(y) > f(x)$$

4	6	8	9	10	12	14	15	16	18	20	21	22	24	25
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	2	0	2

1: 7 мм

2: 3 мм

3: 1 мм

4: 2 мм

5: 1 мм

0: 10 мм

~~10 мм~~

$$N = 23 + 2 \cdot 21 + 20 + 3 \cdot 17 + 4 \cdot 10 = 206$$



$$b \quad \frac{ax+16}{4x-5} = y + \frac{1}{x+\frac{5}{4}}$$

$$y + \frac{1}{x+\frac{5}{4}} = ax+b$$

$$y + \frac{1}{x+\frac{5}{4}} \leq ax+b \quad \Leftrightarrow \quad a\left(x+\frac{b-4}{a}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right) \leq 1 \quad x < \frac{5}{4}$$

$$a\left(x^2 + \left(\frac{b-4}{a} - \frac{5}{4}\right)x - \frac{5(b-4)}{4a}\right) - 1 \leq 0$$

$$ax^2 + \frac{4b-5a-4}{4a}x - \frac{5b-20-4}{4} \leq 0 \quad x_2 = \frac{5a+4-4b \pm \sqrt{\frac{16b-5a-4^2}{4a}}}{2a}$$

$$+ a(5b-20-4)$$

$$b \quad ax+b \leq -32x^2 + 36x - 3 \quad \text{где } x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow$$

$$\frac{a}{4} + b \leq -\frac{32}{16} + \frac{36}{4} - 3 \quad \text{и} \quad a+b \leq -32 + 36 - 3$$

$$\frac{a}{4} + b \leq 4 \quad \text{и} \quad a+b \leq 1$$

$$\frac{(ax+b)(4x-5) - 16x + 16}{4x-5} \geq 0 \quad \cdot \quad (ax+b)(4x-5) - 16x + 16 \leq 0$$

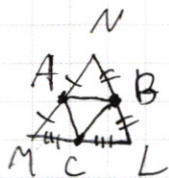
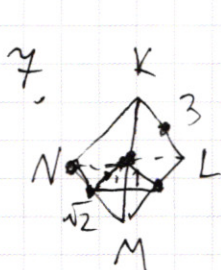
$$a+b \geq 0 \quad \frac{a}{4} + b \geq 3$$

$$\text{где } a < 0; \quad -\frac{(4b-5a)}{2a} \notin \left(\frac{1}{4}; 1\right)$$

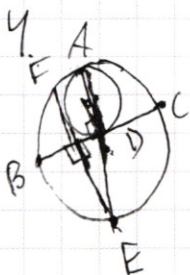
$$\frac{5-b}{2a} \notin \left(\frac{1}{4}; 1\right) \quad |b| \geq \left|\frac{3a}{4}\right|$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\triangle ABC \in \text{сфере} \Rightarrow \triangle ACB -$   
- вписанный четырехугольник.  
 $\angle ANB = \angle BCA$  и  $\angle ANB + \angle BCA = 180^\circ$   
 $\Rightarrow \angle N = 90^\circ$ , ~~и~~  $\triangle ABC -$  квадрат/  
прямоугольник



$$AD \cdot DF = BD \cdot DC$$



~~Answer~~

$$\left(\frac{a}{4} + b\right) \in [3; 4] \quad (a+b) \in [0; 1]$$

$$b \in [-a; 1-a] \quad b \in \left[3 - \frac{a}{4}; 4 - \frac{a}{4}\right]$$

$$-a \leq 4 - \frac{a}{4} \quad 1 - a \geq 3 - \frac{a}{4}$$

$$-\frac{3a}{4} \leq 4 \Rightarrow a \geq -\frac{16}{3}$$

$$-\frac{3a}{4} \geq 2 \Rightarrow a \leq -\frac{8}{3}$$

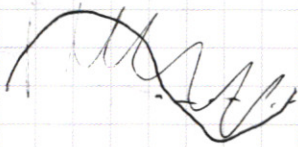
$$a \in \left[-\frac{16}{3}; -\frac{8}{3}\right] \quad b \geq \left\lfloor \frac{3a}{4} \right\rfloor$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

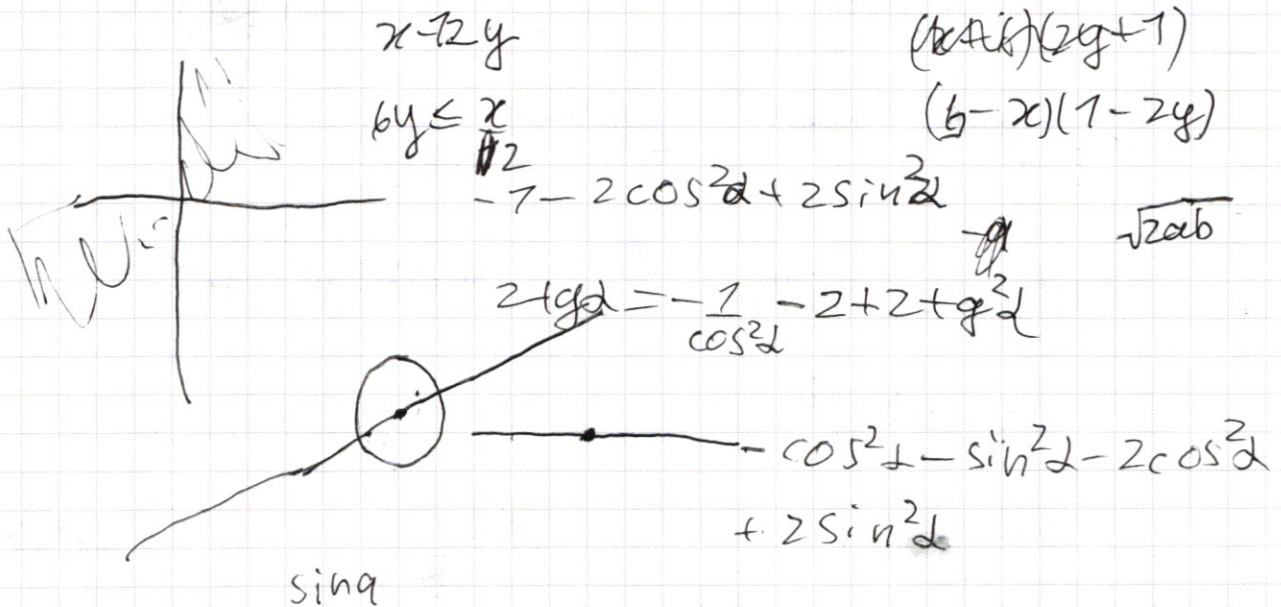


$$\begin{aligned} x - 12y &= \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y &= 45 \end{aligned}$$

$$\sin \alpha \cos b + \cos \alpha \sin b$$

$$\sin \alpha (\cos^2 b - \sin^2 b) + \cos \alpha \cdot 2 \sin b \cos b + \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos^2 b + 2 \cos \alpha \sin b \cos b$$



$$(x-6)^2 + (6y-3)^2$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$(6-x)^2 + (1-2y)^2 = 90$$

$$(6-x)^2 + (6(\frac{1}{2}-y))^2 = 90$$



$$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 45$$

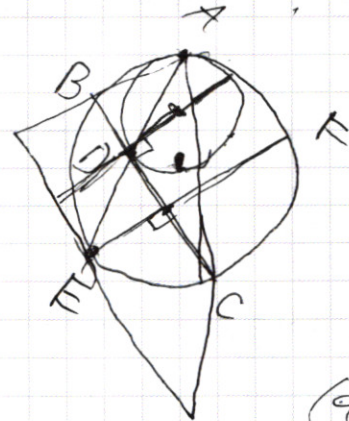
$$x - 12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)}$$

$$a + 6b = \sqrt{ab}$$

$$a^2 + 36b^2 - 12ab = ab$$

$$a^2 + 9b^2 = 45$$

$$a \geq -6b$$



$$10x + |x^2 - 10x| \log_3 4 \geq x^2 + 5 \log_3 (10x - x^2)$$

$$7 \geq t \log_3 \frac{5}{3} + t \log_3 \frac{4}{3}$$

$$3^t \geq \frac{t \log_3 5}{3}$$

$$\frac{1}{3} \ln t - \ln_3 5$$

$$5 \log_3 t - 4 \log_3 t$$

$$1 \geq t \log_3 5 - 1 - t \log_3 4 - 1$$

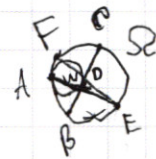
$$t \log_3 \frac{4}{3} + 1 \geq t \log_3 \frac{5}{3} + 1$$

$$9 + 4 - 5 - 2$$

$$x(10-x)$$

$\Omega$

$$t \geq$$



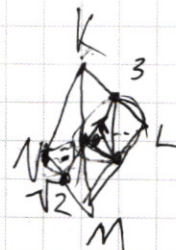
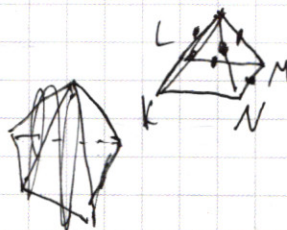
$$t \log_3 x - 1 = f(x)$$

$$t \log_3 5 = \log_3 4 \cdot \log_3 5$$

$$32 - 36 + 3$$

$$4 + \frac{1}{x - \frac{5}{4}}$$

$$-(32x^2 - 36x + 3)$$





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(p) = [p/4]$$

2

$$f(2) = 0 \quad f(3) = 0$$

$$f(1) \cdot f(a) = f(a) + f(1) \quad \text{DA}$$

$$23 + 42 + 20 + 57 + 70$$



65

85

136

$$= \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{b}{2a}$$

$$4ax^2 - 5b - 5ax + 4bx$$

$$23 = 12$$

$$4ax^2 - (5a + 4b + 7b)x - 5b + 7b$$

$$\frac{5}{4}$$

$$\frac{a}{4} + b \leq -2 + 9 - 3$$



$$\frac{a+b}{4} \in [3; 4] \quad a+b \in$$