МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

2) $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\dfrac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(1+\cos 4\beta) + \sin 4\beta \cos 2\alpha = -\dfrac{8}{17}$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\cos 2\beta \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\dfrac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\dfrac{8}{17}$

$-\dfrac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\dfrac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

I $\dfrac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \dfrac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ $\left(\sin 2\beta = \dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$4\sin 2\alpha = -(1+\cos 2\alpha)$

$8\sin\alpha\cos\alpha = -2\cos^2\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0)$

$4\sin\alpha = -\cos\alpha$

$tg\,\alpha = -\dfrac{1}{4}$

II $\dfrac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \dfrac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ $\left(\sin 2\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin 2\alpha = \cos 2\alpha - 1$

$8\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \rightarrow tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -4 \end{array}\right.$$

Ответ: $tg\alpha = \{-4; -\frac{1}{4}; 0\}$

№2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

1) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$3((x^2 - 2x + 1) - 1) + 3((y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}) - \frac{4}{9}) = 4$

$3(x-1)^2 - 3 + 3(y - \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{3} = 4$

$3(x-1)^2 + 3(y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{3}$

$(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$ — ур-ие окружности с центром в т. $O(1; \frac{2}{3})$, $R = \frac{5}{3}$

2) Пусть $x' = x - 1$; $y' = y - \frac{2}{3}$. Тогда

$3y - 2x = 3(y' + \frac{2}{3}) - 2(x' + 1) = 3y' - 2x'$

$3xy - (2x + 3y) + 2 = 3(x' + 1)(y' + \frac{2}{3}) - (2x' + 2 + 3y' + 2) + 2 = 3x'y' + 2x' + 3y' + 2 + 2 - (2x' + 3y' + 2 + 2) = 3x'y'$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда,

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = \frac{25}{9} \\ 3y' - 2x' = \sqrt{3x'y'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y' - 2x' \geq 0 \\ 9y'^2 - 12x'y' + 4x'^2 = 3x'y' \end{cases}$$

$$9y'^2 - 15x'y' + 4x'^2 = 0 \qquad t = \frac{y'}{x'}$$ ($x' = 0$ не явл. решением системы)

$$9t^2 - 15t + 4 = 0$$

$$t = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{18}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{4}{3} \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

I $\begin{cases} x'^2 + \frac{16}{9}x'^2 = \frac{25}{9} \\ 4x' - 2x' \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = \pm 1 \\ x' \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = \frac{4}{3} \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

II $\begin{cases} x'^2 + \frac{1}{9}x'^2 = \frac{25}{9} \\ x' - 2x' \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'^2 = \frac{25}{10} \\ x' \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{5}{\sqrt{10}} \\ y' = -\frac{5}{3\sqrt{10}} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{5}{\sqrt{10}} \\ y = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{3\sqrt{10}} \end{cases}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 - \dfrac{5}{\sqrt{10}} \\ y = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{3\sqrt{10}} \end{cases} \end{array}\right.$

№3 $$3^{\log_4 (x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x) \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

Пусть $t = x^2+6x$

I $t \geq 0$

$$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$$

$$\frac{t^{\log_4 3} + t}{t^{\log_4 5}} \geq 1$$

$$t^{\log_4 \frac{3}{5}} + t^{\log_4 \frac{4}{5}} \geq 1$$

$$0{,}6^{\log_4 t} + 0{,}8^{\log_4 t} \geq 1$$

$\left(0{,}6^{\log_4 t} + 0{,}8^{\log_4 t}\right)(t)$ – возрастающая ф-ия.

Заметим, что при $\log_4 t = 2$, $0{,}6^2 + 0{,}8^2 = 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_4 t \geq 2$

$t \geq 16$

$x^2 + 6x \geq 16$

$x^2 + 6x - 16 \geq 0$

$(x-2)(x+8) \geq 0$

$x \in (-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$

II $t < 0$

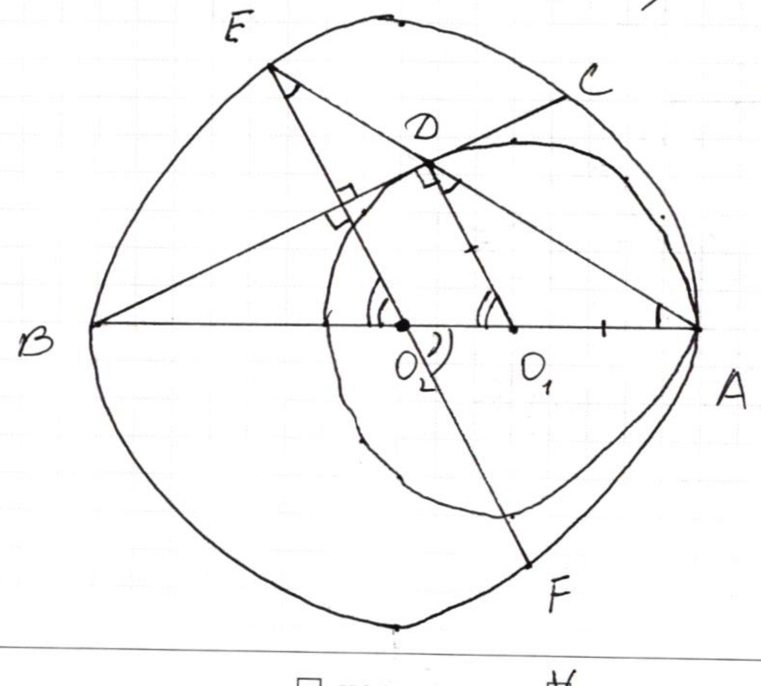
$\cancel{t^{\log_4 3} + t \geq (-t)^{\log_4 5}}$

$\cancel{t^{\log_4 3} + t \geq (-1)^{\log_4 5} \cdot t^{\log_4 5}}$

При $t < 0$, $\log_4 t$ не определён $\Longrightarrow$ корней нет

Ответ: $x \in (-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$

№4



1) $O_1D \perp BC$, т.к. BC – касательная

По т. Пифагора $BO_1^2 = BD^2 + O_1D^2$

$$(2R_2 - R_1)^2 = \frac{169}{4} + R_1^2$$

2) $\angle FED = \alpha$, тогда $\left.\begin{array}{l}\angle EDB = 90^\circ - \alpha \\ \angle BDO_1 = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle O_1DA = \alpha$

$\triangle O_1DA$ – равнобедренный ($O_1D = O_1A = R_1$) $\Rightarrow \angle DO_1A = \alpha$

$\left.\begin{array}{l}\angle O_2ED = \alpha \\ \angle EAO_2 = \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow EF \cap BA = O_2$, $\triangle EO_2A$ – равнобедренный

3) $\angle DO_1B$ – внешний для $\triangle DO_1A$, $\angle DO_1B = 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \frac{R_1}{2R_2 - R_1}$$

4) Рассмотрим $\triangle BCA$:

$\angle BCA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр.

$\triangle BCA \sim \triangle BDO_1 \Rightarrow AC = R_1 \dfrac{BC}{BD}$

$$AC = R_1 \frac{BD + DC}{BD}; \quad AC = \frac{9 \cdot 2}{13} R_1 = \frac{18}{13} R_1$$

~~По т. Пифагора~~

$$\cancel{4R_2^2 = 81 + \left(\frac{18}{13} R_1\right)^2}$$

$$\cancel{4R_2^2 = \frac{81 \cdot 169 + 18^2 R_1^2}{(2 \cdot 13)^2}}$$

$$\cancel{R_2 = \frac{\sqrt{81 \cdot 169 + 18^2 R_1^2}}{26}}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Из 1): $4R_2^2 - 4R_2R_1 = \frac{169}{4}$~~

~~$81 + \left(\frac{18}{13}R_1\right)^2 - 4R_2R_1 = \frac{169}{4}$~~

~~$\frac{155}{4} = 4R_2R_1 - \frac{18^2}{169}R_1^2$~~

Также $\frac{AC}{R_1} = \frac{AB}{AO_1}$

$$\frac{18}{13} = \frac{2R_2}{2R_2 - R_1}$$

$$\frac{9}{13} = \frac{R_2}{2R_2 - R_1}$$

$$18R_2 - 9R_1 = 13R_2$$

$$9R_1 = 5R_2 \to R_2 = 1{,}8R_1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{R_1}{2{,}6R_1} = \frac{5}{13}$$

Из 1) $\Rightarrow$ $(2{,}6R_1)^2 = \frac{169}{4} + R_1^2$

$$\frac{169}{25}R_1^2 = \frac{169}{4} + R_1^2$$

$$\frac{144}{25}R_1^2 = \frac{169}{4}$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{25 \cdot 169}{4 \cdot 144}}$$

$$R_1 = \frac{5 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{65}{24}$$

$$R_2 = \frac{9 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{3 \cdot 13}{2 \cdot 4} = \frac{39}{8}$$

5) $\angle AFE$ – вписанный

$\angle EO_2A$ – центральный, опирается на эту же дугу $\Bigg\}$ $\angle AFE = \frac{\angle EO_2A}{2}$;

$\angle AFE = 90^\circ - \alpha$

$\cos 2\alpha = \frac{5}{13}$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{12}{13}$

$2\cos^2\alpha = \frac{18}{13}$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \sin(90^\circ - \alpha)$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$\triangle AFE$ – прямоугольный ($\angle EAF$ опирается на диаметр).

высота к гипотенузе.

$$S_{\triangle AFE} = \frac{2R_2}{2} \cdot h = R_2^2 \sin(2\alpha)$$

$$S_{\triangle AFE} = \frac{39^2}{8^2} \cdot \frac{12}{13} = \frac{12 \cdot 9 \cdot 13^2}{8^2 \cdot 13} = \frac{13 \cdot 9 \cdot 3}{2} =$$

$$= \frac{351}{2}$$

Ответ: $R_1 = \frac{64}{25}$; $R_2 = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

$S = \frac{351}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+37$$

1) $$\frac{4x-3}{2x-2} - ax - b \geqslant 0$$

Найдём мин. значение этой ф-ии на $[1;3]$.

$$\frac{d\left(\frac{4x-3}{2x-2} - ax - b\right)}{dx} = \frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{(2x-2)^2} - a = 0$$

$$8x-8-8x+6 = (2x-2)^2 a$$

$$-2 = 4(x-1)^2 a$$

$$-\frac{1}{2} = (x-1)^2 a$$

$$-\frac{1}{2a} = (x-1)^2$$

$$\begin{cases} a<0 \\ x = 1 + \sqrt{\frac{-1}{2a}} \end{cases}$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{-1}{2a}}} - a + b - \sqrt{\frac{-a}{2}} = 2-a-b \geqslant 0$$

~~2a~~ $\boxed{a+b \leq 2}$

2) $ax+b-8x^2+34x-30 \geq 0$

$$\frac{df}{dx} = a-16x+34 = 0$$

$$16x = a+34$$

$$x = \frac{a}{16}+\frac{17}{8}$$

$$f(x) = \frac{a^2}{16}+\frac{17a}{8}+b-\frac{a^2}{2\cdot 16}-\frac{17^2}{8}+\frac{17a}{8}+\frac{17^2}{4}-$$

$$-30 \geq 0$$

$$\frac{a^2}{32}+\frac{17a}{4}+b-30+\frac{17^2}{8} \geq 0$$

$$a^2+17\cdot 8a++32b-960+(17\cdot 2)^2 \geq 0$$

$$a^2+136a+32b \geq -206$$

Пусть $b=p-a$, $p \leq 2$.

Тогда $a^2+136a+32p-32a \geq -206$

$$a^2+104a \geq -(206+32p) \quad p_{max}=2,$$

$$a^2+104a \geq -270$$

$$a^2+104a+270 \geq 0$$

$$a^2+104a+270=0$$

$$a=-52 \pm \sqrt{2704-270}$$

$$a=-52 \pm \sqrt{2434}$$

$$a \in (-\infty; -52-\sqrt{2434}] \cup [-52+\sqrt{2434}; 0)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

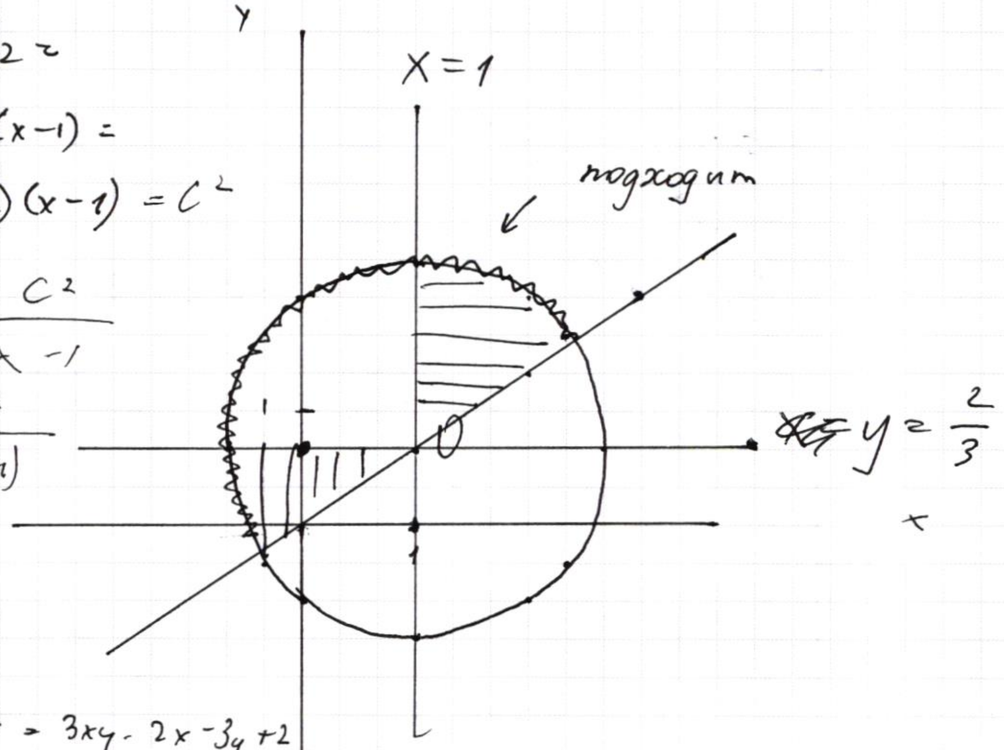
$3xy-2x-3y+2=$

$=3y(x-1)-2(x-1)=$

$=(3y-2)(x-1)=C^2$

$3y-2=\frac{C^2}{x-1}$

$y=\frac{2}{3}+\frac{C^2}{3(x-1)}$



$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2=-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2=0$

$9\left(\frac{y}{x}\right)^2-15\frac{y}{x}+4=0$

$\frac{y}{x}=t$

$-2x-3y+2=0$

$\cancel{2x}\ 3y=-2x+2$

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$

$x=1;\ y=0$

$\cancel{y}\ x=0;\ y=\frac{2}{3}$

$16 \times 9 = 144$

$9t^2-15t+4=0$

$t=\frac{15\pm\sqrt{225-144}}{18}$

$225-144$; $\sqrt{81}=9$

$t=\frac{4}{3}$

$t=\frac{1}{3}$

$3\left(y-\frac{2}{3}\right)+2-2(x-1)-2=$

$=3\left(y-\frac{2}{3}\right)-2(x-1)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

$y' = y - \frac{2}{3}$; $x' = x - 1$

$3y - 2x = 3\cancel{y\ldots}$

$3y' - 2x'$

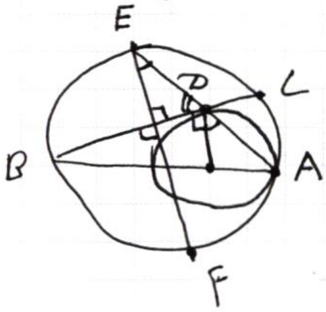
$3xy = 3(x'+1)(y'+\frac{2}{3}) =$

$= 3(x'y' + \frac{2}{3}x' + y' + \frac{2}{3}) =$

$= 3x'y' + 2x' + 3y' + 2$

$\times \begin{array}{r} 81 \\ 4 \\ \hline 324 \end{array}$

$- \begin{array}{r} 324 \\ 169 \\ \hline 155 \end{array}$



$2x + 3y = 2x' + 2 + 3y' + 2 = 2x' + 3y' + 4$

$3x'y' + 2x' + 3y' + 2 - 2x' - 3y' - 4 + 2 =$

$= 3x'y'$

$\frac{18}{13} = \frac{2R_2}{2R_2 - R_1}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x) \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t > 0$

$\frac{t^{\log_4 3} + t}{t^{\log_4 5}} \geq 1$

$t^{\log_4 \frac{3}{5}} + t^{\log_4 \frac{4}{5}} \geq 1$

$\cancel{(\tfrac{3}{5})^{\log}}$ $0{,}6^{\log_4 t} + 0{,}8^{\log_4 t} \geq 1$

$x^2 + 6x - 16 = 0$

$x = -3 \pm \sqrt{9+16} = -3 \pm 5 = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -8 \end{array}\right.$

$\times \begin{array}{r} 39 \\ 9 \\ \hline 351 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha (1 + 2\cos^2 2\beta - 1) + \sin 4\beta \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) \cdot 2\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$+\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 2\cos 2\beta = + \frac{8}{17}$

$\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{8\sqrt{17}}{2 \cdot 17}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}}$

$4\sin 2\alpha = \cos 2\alpha - 1$

$4\sin 2\alpha = -2\sin^2\alpha$

$\boxed{\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin^2\alpha$

$4\cos\alpha = -\sin\alpha$

$1 - 2\sin^2\alpha$ $\quad tg\alpha = -4$

$tg 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\, tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$1 + 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha$

1) $\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $\quad 8\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos^2\alpha$

$4\sin 2\alpha = -(1 + \cos 2\alpha)$ $\quad 4\sin\alpha = \cos\alpha$

$tg\alpha = \frac{1}{4}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$\cancel{3(x+y)^2+6xy}$

$3(x^2-2x)+3(y^2-\frac{4}{3}y)=4$

$3((x-1)^2+1)+3((y-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{9})=4$

$3(x-1)^2-3 \quad +3(y-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{3}=4$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2 = 7+\frac{4}{3}$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{3}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$ – ω $((1;\frac{2}{3}); R=\frac{5}{3})$

$3y-2x=0 \quad y=\frac{2}{3}x$

$$\begin{cases} 3y-2x \geqslant 0 \\ 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \end{cases}$$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2$

$3xy-3y=3y(x-1)$

$2-2x=2(1-x)$

$\sqrt{3y(x-1)+2(1-x)} = 3y(x-1)-2(x-1)=$

$(x-1)^2+(x-1)(3y-x-1) = (3y-2x)^2 \qquad =(x-1)(3y-2)$

$=(x-1)(3y-2)$

$9y^2-12xy+4x^2 \cancel{=(3y-2)^2=}$

$=(9y^2 \quad)$

$(x-1)(3y-2)=(3y-2x)^2 \qquad (x-1)(3y-2) \geqslant 0$

$3xy-2x-3y+2=(3y-2x)^2$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$(x-1)^2+(\frac{3}{2}y-1)^2-$

$-(\frac{3}{2}-x)^2$

$3xy-2x-3y+2=(x^2-2x+1)+3xy\cancel{-1}-$

$\cancel{-3y}-x^2$

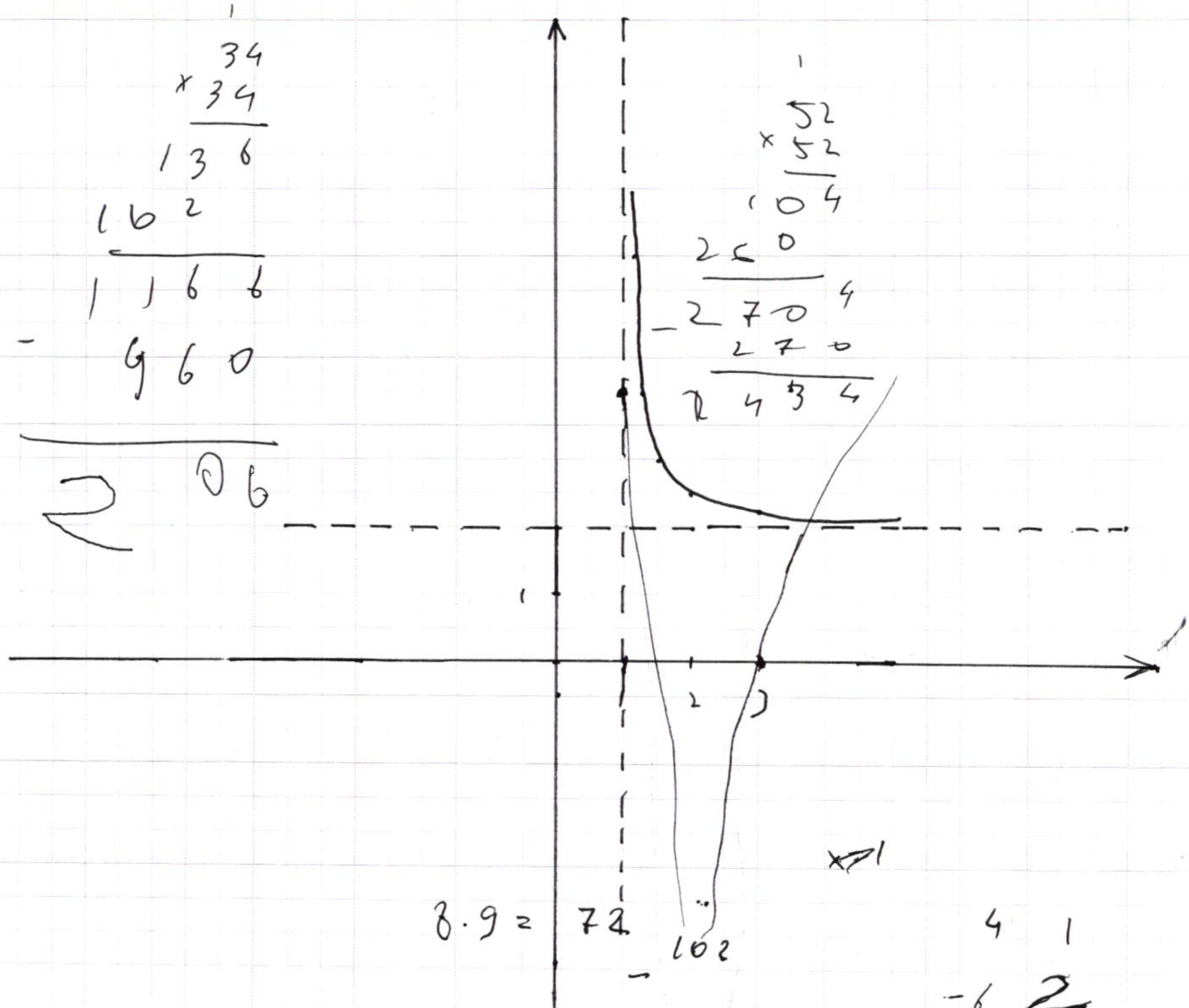
$(x-1)^2+(\frac{9}{4}y^2-3y+1)+3xy-x^2-\frac{9}{4}y^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{2(2x-2)+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2} = 2 + \frac{0.5}{x-1}$



34×34

136

162

1166

-960

206

52×52

104

260

2704

-270

2434

$x > 1$

$8 \cdot 9 = 72$

-102

4 1

-6 2

3

$8x^2 - 34x + 30 =$

$= 8\left(x^2 - 2\cdot\frac{17}{8} + \left(\frac{17}{8}\right)^2 - \left(\frac{17}{8}\right)^2\right.$

$+30 = 8\left(\left(x - \frac{17}{8}\right)\right)^2 - \frac{17^2}{8}$