МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leqslant ax + b \leqslant 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$-\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92 \end{cases}$$

$$x-8y=216$$

$$\sqrt[3]{64y^2-x^2}=\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=\sqrt[3]{-216(8y+x)}=-6\sqrt[3]{(8y+x)}$$

$$+\begin{cases} x+6\sqrt[3]{8y+x}=124 \\ 8y+6\sqrt[3]{8y+x}=-92 \end{cases}$$

$$8y+x+12\sqrt[3]{8y+x}=32$$

$$t=\sqrt[3]{8y+x}$$

$$t^3+12t-32=0$$

$t=2$ - корень подходит

разделим $(t^3+12t-32)$ на $(t-2)$ по схеме Горнера:

	1	0	12	-32
2	1	2	16	0

$$t^3+12t-32=(t-2)(t^2+2t+16)$$

$t^2+2t+16$ - корней не имеет, т.к. $D<0$

$$\sqrt[3]{8y+x}=2$$

$$8y+x=8$$

$$+\begin{cases} 8y+x=8 \\ x-8y=216 \end{cases}$$

$2x=224$

$x=112$

$8y=8-112$

$8y=-104$

$y=-\frac{104}{8}=-\frac{26}{2}=-13$

Ответ: $x=112$, $y=-13$

№3

$\overline{abcdefg}$ — семизначное число

остаток при делении на 10 $= g$

на 100 $= \overline{fg}$

на 1000 $= \overline{efg}$

и т.д.

$S = 12414$ — сумма остатков на $10^k, 10^{k+1}, 10^{k+2}$

$k=1$

$S = \underbrace{\overline{g}}_{<10} + \underbrace{\overline{fg}}_{<100} + \underbrace{\overline{efg}}_{<1000} < 12414$

$k=2$

$S = \underbrace{\overline{fg}}_{<100} + \underbrace{\overline{efg}}_{<1000} + \underbrace{\overline{defg}}_{<10000} < 11100 < 12414$

при $k \leq 2$ сумма остатков всегда меньше 12414

$k=5$

$S = \overline{cdefg} + \overline{bcdefg} + \underbrace{\overline{abcdefg}}_{>12414} > 12414$

при $k \geq 5$ сумма остатков больше 12414

Получаем, что $\left[\begin{array}{l} k=3 \\ k=4 \end{array}\right.$

1) $k=3$

$\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12414$

$\overline{efg} + 1000d + \overline{efg} + 10000c + 1000d + \overline{efg} = 12414$

$\underbrace{10000c + 2000d}_{\vdots 3} + \underbrace{3\,\overline{efg}}_{\vdots 3} = \underbrace{12414}_{\vdots 3}$

$10000c + 2000d \,\vdots\, 3$

$5c + d \,\vdots\, 3$

при этом $c \leq 1$; $d \leq 6$, т.к.

$10000c + 2000d \leq 12000$

$5c + d \leq 6$

если $c=1$, то $d=1$

если $c=0$, то $\left[\begin{array}{l} d=3 \\ d=6 \end{array}\right.$

$c=0$; $d=0$ — невозможно, т.к. $3\,\overline{efg} < 3000$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим а) $c=1$; $d=1$

$10000+2000+3\overline{efg}=12414$

$3\overline{efg}=414$

$\overline{efg}=138$

б) $c=0$; $d=3$

$6000+3\overline{efg}=12414$

$3\overline{efg}=6414$

$\overline{efg}=2138$ – невозможно

в) $c=0$; $d=6$

$12000+3\overline{efg}=12414$

$3\overline{efg}=414$

$\overline{efg}=138$

2) $k=4$

$\overline{defg}+\overline{cdefg}+\overline{bcdefg}=12414$

$100000b+20000c+3\overline{defg}=12414$

$b=0$ $c=0$

$3\overline{defg}=12414$

$\overline{defg}=4138$

Получаем 3 случая: $\overline{ab11138}$, $\overline{ab06138}$, $\overline{a004138}$

a – 9 вар.
b – 10 вар. $\}$ $\overline{ab}$ – $9\cdot10$ вар. $\Rightarrow$ $9\cdot10$ вариантов, $9\cdot10$ вар, 9 вар

$90+90+9=189$

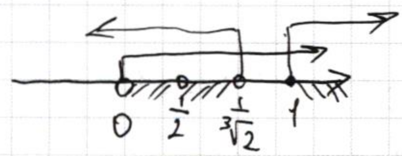
Ответ: 189

№ 2

$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leq \log_{2x} \frac{1}{x^3}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x^9 > 0 \\ 2x^3 > 0 \\ 2x^3 \neq 1 \\ \frac{1}{x^3} > 0 \\ 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ \log_{2x^3} x^9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \neq \frac{1}{2} \\ \log_{2x^3} x^9 \geq 0 \end{cases}$



$x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}) \cup [1; +\infty)$

$\log_{2x^3} x^9 \geq 0$

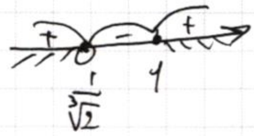
$\log_{2x^3} x^9 \geq \log_{2x^3} 1$

$(2x^3-1)(x^9-1) \geq 0$ – по методу рационализации

$2x^3-1=0$ $\qquad$ $x^9-1=0$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad$ $x^9=1$

$x=1$



$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} = \sqrt{9 \log_{2x^3} x} =$

$= 3\sqrt{\log_{2x^3} x}$

$\log_{2x} \frac{1}{x^3} = \log_{2x} x^{-3} =$

$= -3 \log_{2x} x$

$3\sqrt{\log_{2x^3} x} \leq -3 \log_{2x} x$

$\sqrt{\log_{2x^3} x} \leq -\log_{2x} x$

т.к. $\sqrt{\log_{2x^3} x} \geq 0 \Rightarrow -\log_{2x} x \geq 0$

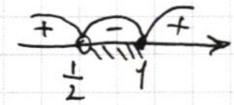
$\log_{2x} x \leq 0$

$\log_{2x} x \leq \log_{2x} 1$

$(2x-1)(x-1) \leq 0$

$2x-1=0$ $\qquad$ $x-1=0$

$x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x=1$



с учетом ОДЗ

$x \in (\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}) \cup [1]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x=1$

$$\sqrt{\log_2 1} \le \log_2 1$$

$$0 \le 0$$

при $x \neq 1$

$$\sqrt{\log_{2x^3} x} \le -\log_{2x} x$$

$$\sqrt{\frac{1}{\log_x 2x^3}} \le -\frac{1}{\log_x 2x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\log_x 2+\log_x x^3}} \le -\frac{1}{\log_x 2+\log_x x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\log_x 2+3}} \le -\frac{1}{\log_x 2+1}$$

$t=\log_x 2$, $t > -3$

$$\frac{1}{\sqrt{t+3}} \le -\frac{1}{t+1}$$

т.к. $\frac{1}{\sqrt{t+3}} \ge 0$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t+3}}\right)^2 \le \left(-\frac{1}{t+1}\right)^2$$

$$\frac{1}{t+3} \le \frac{1}{(t+1)^2}$$

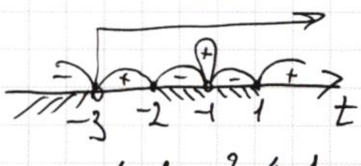
$$\frac{t^2+t-2}{(3+t)(t+1)^2} \le 0$$

корни $t=-2$

$t=-1$

$t=1$

$t=-3$



$$-2 \le \log_x 2 \le 1$$

~~$\frac{\sqrt2}{2} \le x \le 1$~~

$\left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{\sqrt2}{2} \quad - \text{~~уд~~} \\ 1<x<2 \quad - \text{не уд.}\end{array}\right.$

с учетом ОДЗ

$x \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt2}{2}) \cup [1]$ – Отв

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=\cancel{-}92 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{64y^2-x^2}=x-124 \\ \sqrt[3]{64y^2-x^2}=8y+92 \end{cases}$$

$\cancel{64y^2-x^2\geq 0}$

$-3\sqrt[3]{2y+27}=2y+26$

$8y+92=x-124$

$8y-x+124+92=0$

$8y-x+216=0$

$x=8y+216$

$\sqrt[3]{216(216-2x)}=$

$=6\sqrt[3]{216-2x}\,t$

$6\sqrt[3]{216-2x}=x-124$

$8y=x-216$

$64y^2=x^2-2\cdot216x+216^2$

$\sqrt[3]{216^2-432x}=x-124$ $\quad 6 \quad 12\sqrt[3]{\cancel{216-2x}}=2x-248$

$64y^2-x^2=64y^2-(8y+216)^2=64y^2-64y^2-16\cdot216y-216^2=-16\cdot216y-216^2=$

$=-216(16y+216)$

$-12\sqrt[3]{216+2x}=248-2x$

$\cancel{12}\sqrt[3]{(t-32)}=t$

$\sqrt[3]{64y^2-x^2}=\sqrt[3]{(-216)(16y+216)}=-6\sqrt[3]{16y+216}=-6\sqrt[3]{\cancel{8(2y\ 2(8y+}}=-12\sqrt[3]{2y+27}$

$8(2y+27)$

$-12\sqrt[3]{(t-32)}=t^3$

$(0;32)$

$-12\sqrt[3]{2y+27}=8y+92$

$-6\sqrt[3]{2y+27}=4y+46$

$-3\sqrt[3]{2y+27}=2y+26$

$-3\sqrt[3]{t+1}=t$

$-27(t+1)=t^3$

$t^3+27(t+1)=0$

$t^3+27t+27=0$ $\quad t<0$

$t(t^2+27)=27$ $\quad \frac{1}{3} \quad 1$

$\frac{1}{27}+9-27<0$

$\cancel{27(2y+27)=8y^3+3\cdot4y^2\cdot26+3\cdot2y\cdot26^2+26^3}$

$-3t=t^3-1$

$-27(2y+27)=8y^3+12y^2\cdot26+6y\cdot26^2+26^3$

$-54y-27^2=$

$t^3+3t-1=0$

$8y^3+12\cdot26y^2+54y+26^2\cdot6y+26^3+27^3=0$

$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{8}{27}+8\cdot9-27>0$

$t^3-3t^2+3t-1=-3t^2$

$(t-1)^3=-3t^2$

$\cancel{2t^2+27}$

$-1 \ = \ -1$

$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}$

$\cancel{3x^2+3}$ $\quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{8}{27}-9+27 \quad \frac{4}{9} \quad \frac{64}{721}+12-27$

$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3}$

x	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
y	-1	3	$\frac{1}{27}$	$-$	

$\frac{1}{8}+\frac{27}{2}-27$ $\quad \frac{125}{729}+15-27$

$16-27$

$-\frac{26}{27} \quad -\_ \quad -26+27 \quad 26-27 \quad \frac{8}{9} \quad 24-27 \quad \frac{5}{9} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{15}{27} \quad \frac{18}{27}$

$-\frac{53}{54} \quad -\frac{53}{2}+27$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

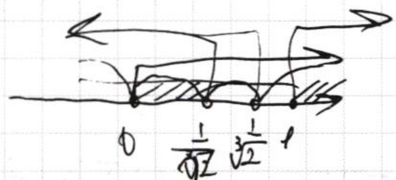
(Нумеровать только чистовики)

№2

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leq \log_{2x} \frac{1}{x^3}$$

$$\begin{cases} x^9 > 0 \\ 2x^3 > 0 \\ 2x^3 \neq 1 \\ \frac{1}{x^3} > 0 \\ 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ \log_{2x^3} x^9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \log_{2x^3} x^9 \geq 0 \end{cases}$$



$\sqrt[3]{2} < 2$

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{2}$

$$x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup [1; +\infty)$$

$\log_{2x^3} x^9 \geq 0$

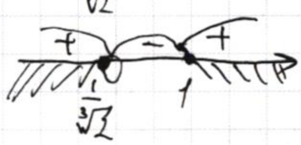
$\log_{2x^3} x^9 \geq \log_{2x^3} 1$

$(2x^3-1)(x^9-1) \geq 0$

$2x^3-1=0 \qquad x^9-1=0$

$2x^3=1 \qquad x^9=1$

$x^3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad x=1$



$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leq \log_{2x} x^{-3}$$

$$\sqrt{9 \log_{2x^3} x} \leq 3 \log_{2x} x$$

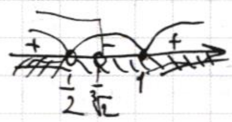
$$3\sqrt{\log_{2x^3} x} \leq -3 \log_{2x} x$$

$$0 \leq \sqrt{\log_{2x^3} x} \leq -\log_{2x} x$$

$\log_{2x} x \leq 0$

$(2x-1)(x-1) \leq 0$

$x = \frac{1}{2} \qquad x=1$



$$\frac{1}{\log_x 2x^3} = \frac{1}{\log_x x^3 + \log_x 2} = \frac{1}{3+\log_x 2}$$

$$-\frac{1}{\log_x 2x} = -\frac{1}{\log_x 2 + \log_x x} = -\frac{1}{\log_x 2 + 1}$$

$\log_x 2 \neq -3$

$\log_x 2 \neq -1$

$$\frac{1}{\sqrt{3+\log_x 2}} \leq -\frac{1}{\log_x 2 + 1}$$

$x=1$

$$\frac{1}{\sqrt{3+t}} \leq -\frac{1}{t+1}$$

$2^{-1} \qquad 2^{-\frac{1}{3}}$

$2^{-\frac{1}{2}}$

$\log \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \qquad 1$

$2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1}{3+t} \leq -\frac{1}{t^2+2t+1}$$

$t < -3$

$2^{-\frac{3}{4}}$

$-2 \leq t < -1$

$-1 < t < 1$

$\sqrt{2}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}$

$$\frac{1}{3+t} - \frac{1}{t^2+2t+1} \leq 0$$

$t^2+t-2=0$

$-2 \qquad 1$

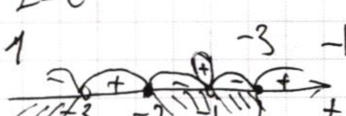
$-3 \qquad -1 \qquad -1$

$$\frac{t^2+2t+1-3-t}{(3+t)(t^2+2t+1)} \leq 0$$

$$\frac{t^2+t-2}{(3+t)(t+1)^2} \leq 0$$

$\log_x 2 < -3$

$\log_x 2 \leq \log_x \frac{1}{x^3}$



☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\log_x 2 < \log_x \frac{1}{x}$ $\log_x 2 > -2$

$2 > \frac{1}{x}$ $(x-1)(2-\frac{1}{x}) < 0$ $1 > x = \frac{1}{4}$

$2-\frac{1}{x} > 0$ $\cancel{x=\frac{1}{2}}$ $1 < x$

$\frac{2x-1}{x} > 0$ $0 < x < \frac{1}{2}$

$(2x-1)x > 0$ $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $2^{-\frac{1}{3}}$

$2x-1=0$ $x \neq 0$

$x = \frac{1}{2}$ $-1 < \log_x 2 < \cancel{-3}$

0 $\frac{1}{2}$

$\cancel{2^{-\frac{1}{2}}}$ $\cancel{\log_{2^{-\frac{1}{3}}} 2 = -3}$

$-3 < \log_x 2 < -1$

$-2 \le \log_x 2 < -1$

$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < x \le \frac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-\frac{1}{2}} \\ x = 1 \end{array}\right.$

$\sqrt{\log_{2\cdot(\frac{1}{2})^3} (\frac{1}{2})^9} = \sqrt{\log_{2^1\cdot 2^{-3}} 2^{-9}} = \sqrt{\log_{2^{-2}} 2^{-9}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\log_{2\cdot(\frac{1}{2})} \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} =$ $\sqrt{\log_{2\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^3} (\frac{\sqrt{2}}{2})^9} = \sqrt{\log_{2\cdot 2^{-\frac{3}{2}}} 2^{-\frac{9}{2}}} = \sqrt{\log_{2^{-\frac{1}{2}}} 2^{-\frac{9}{2}}} =$

$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^3} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\cdot(2^{-\frac{1}{2}})^3}$ $= \sqrt{2\cdot\frac{9}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$2^{\frac{1}{2}}$ $2^{\frac{3}{2}}$ $= 3$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1

$-12^3(t^3-32)=t^3$

$\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)} = -6\sqrt[3]{8y+x}$

-216

$x-8y=124+92$

$2x=218$

$x=109$

$\begin{cases} x+8y=2 \\ x-8y=216 \end{cases}$

$x-8y=216$

$x+8y=216+16y$

$x+8y - 2\cdot\sqrt[3]{8y+x}=32$

$x+8y$

$\underbrace{x+8y}_{t^3}+12\sqrt[3]{x+8y}=32$

$t^3+12t=32$

$x+8y=32-12\sqrt[3]{8y+x}=4(8-3\sqrt[3]{8y+x})$

$8y=-107$

$y=-\frac{107}{8}$

$t^3+12t-32=0$

~~8 -4 (x+8)(x+4)~~

$\sqrt[3]{64y^2-x^2}=\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=\sqrt[3]{(8y-216)\cdot(16y+216)}=-6\sqrt[3]{16y+216}=-12\sqrt[3]{2y+27}$

$2\frac{1}{8}$

$16y+216+12\sqrt[3]{8y\cdot 16y+216}=32$

	1	0	12	-32
2	1	2	16	0

~~x+8~~ $12\sqrt[3]{x+8y}=32-x-8y$

$t^2+2t+16=0$

$D<0$

корней нет

$12^3(x+8y)=(32-x-8y)^3$

$t^3+12t-32=(t-t_1)(t^2+bt+c)$

$t^3+bt^2+ct-t_1t^2-bt_1t-ct_1$

$t^3+t^2(b-t_1)+t(c-bt_1)-ct_1$

$ct_1=32$

$b-t_1=0$

$c-bt_1=12$

$bc=32$

$c-b^2=12$

$8+2\cdot12-32=8+24-32=0$

$c-\frac{32^2}{c^2}=12$

$\frac{c^3-32^2}{c^2}=12$

$c^3-32^2=12c^2$

$c^3-12c^2=32^2$

$c^2(c-12)=2^{10}$

$2^8\cdot2^2$

$c=16$

$b=2$

Ответ: $x=109$

$y=-\frac{107}{8}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$\overline{abcdefg}$ $\quad \cancel{k=10}$

$\underbrace{g}_{10}$, $\underbrace{fg}_{100}$, $\underbrace{efg}_{1000}$

10^k
10^{k+1}
10^{k+2}

$S=12414$

$k=1$

$S = \overline{g}+\overline{fg}+\overline{efg} < 12414$

$k=2$

$S=\overline{fg}+\overline{efg}+\overline{defg} < 12414$

$k=3$ $\quad$ 100 $\quad$ 1000 $\quad$ 10000

$S=\overline{efg}+\overline{defg}+\overline{cdefg}$ - возможно

$k=4$

$S=\overline{defg}+\overline{cdefg}+\overline{bcdefg}$ - возможно

$k=5$

$S=\overline{cdefg}+\overline{bcdefg}+\overline{abcdefg} > 12414$

> 12414

$k=3;\ 4$

1) $k=3$

$\overline{efg}+\overline{defg}+\overline{cdefg}=12414$

$100e+10f+g+1000d+100e+10f+g+10000c+1000d+100e+10f+g=12414$

$10000c+2000d+300e+30f+3g=12414$

c	d	e	f	g
1	1	1	3	8
0	6	1	3	8

$c\le 1 \qquad d\le 6$

$2700+270+27=2997$

$c=1 \quad d\le 1$

$c=0 \quad d\le 6$

$c=1 \quad d=1$ $\quad 3(100e+10f+g)=414$

$100e+10f+g=138$

$c=1 \quad d=0$ $\quad e=1 \quad f=3 \quad g=8$

$300e+30f+3g=2414$ – невозможно

$\not\vdots\, 3$

$10000c+2000d \,\vdots\, 3$ $\quad c=0 \quad d=3$

$100(10c+2d) \,\vdots\, 3$ $\quad c=0 \quad d=6 \quad e=1 \quad f=3 \quad g=8$

$10c+2d \,\vdots\, 3$

$5c+d \,\vdots\, 3$

$300e+30f+3g=6414$

$100e+10f+g=2138$ – невозможно

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

2) $k=4$

$\overline{defg} + \overline{cdefg} + \overline{bcdefg} = 12414$

~~1000d + efg +~~

$\overline{defg} + 10000c + \overline{defg} + 100000b + 10000c + \overline{defg} = 12414$

$100000b + 20000c + 3\overline{defg} = 12414$

$b=0 \qquad c=0 \qquad 3\overline{defg} = 12414$

$\overline{defg} = 4138$

a 0 0 4 1 3 8	-9	189
a b 1 1 1 3 8	$-9\cdot 10$	
a b 0 6 1 3 8	$-9\cdot 10$	

Ответ: 189

№5

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$ctg\,x + ctg\,y - ?$

$\begin{cases} \cancel{x\neq 0} \\ \cancel{y\neq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin y \neq 0 \end{cases}$

$\frac{1}{2}\sin(x+2y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+2y)$

$\cos\left(\frac{\pi}{6} \overset{-x-2y}{\cancel{+}} (x+2y)\right) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \qquad \cos\left(2y+\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$5\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \sin x\cos\frac{\pi}{3}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$

$\sqrt{3}\cos(x+y) = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x$

$2\sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sqrt{3}\cos x - 5\sin x$

$2\sqrt{3}(\cos x\cos y - \sin x\sin y) = 5\sqrt{3}\cos x - 5\sin x$

$2\sqrt{3}\cos x\cos y - 2\sqrt{3}\sin x\sin y = 5\sqrt{3}\cos x - 5\sin x$

$2\sqrt{3}\cos x\cos y - 5\sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{3}\sin x\sin y - 5\sin x$

$\sqrt{3}\cos x(2\cos y - 5) = \sin x(2\sqrt{3}\sin y - 5) \quad /: \sin x$

$ctg\,x\cdot\sqrt{3}(2\cos y - 5) = 2\sqrt{3}\sin y - 5$

$ctg\,x = \frac{2\sqrt{3}\sin y - 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cos y - 5} \qquad \frac{2\sqrt{3}\sin y - 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cos y - 5} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{2\sqrt{3}\sin^2 y - 5\sqrt{3}\sin y + 2\sqrt{3}\cos^2 y - 5\cos y}{\sin y(2\sqrt{3}\cos y - 5)} =$

$= \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\sin y - 5\cos y}{\sin y(2\sqrt{3}\cos y - 5)} = \frac{2\sqrt{3} - 5(\sqrt{3}\sin y + \cos y)}{\sin y(2\sqrt{3}\cos y - 5)} = \frac{2\sqrt{3} - 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y + \frac{1}{2}\cos y\right)}{2\sqrt{3}\sin y\cos y - 5\sin y} = \frac{2\sqrt{3} - 10\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}\sin 2y - 5\sin y}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$ctg\,x+ctg\,y=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos y}{\sin y}=\frac{\cos x\sin y+\cos y\sin x}{\sin x\sin y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}$$

$$2\sqrt{3}\cos(x+y)=5\sqrt{3}\cos x-5\sin x$$

$$12\cos^2(x+y)=75\cos^2x-50\sqrt{3}\sin x\cos x+25\sin^2x$$

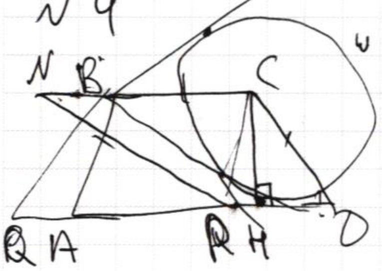
$$12-12\sin^2(x+y)=50\cos^2x-50\sqrt{3}\sin x\cos x+25$$

$$-12\sin^2(x+y)=50-50\sin^2x-50\sqrt{3}\sin x\cos x+25-12$$

$$12\sin^2(x+y)=-63+50\sin^2x+50\sqrt{3}\sin x\cos x$$

$$\sin(x+y+y)\ ?$$

№4



№6

$$\frac{12x-14}{2x-3}\leqslant ax+b\leqslant 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$$

$$x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{12x-14-4+4}{12x-18}=6+\frac{4}{2x-3}\leqslant ax+b\leqslant$$

$$\frac{12x+14}{2x-3}-ax-b\leqslant 0$$

$$\frac{12x+14-(ax+b)(2x-3)}{2x-3}\leqslant 0$$

$$\frac{12x+14-(2ax^2-3ax+2bx-3b)}{2x-3}\leqslant 0$$

$$\frac{12x+14-2ax^2+3ax-2bx+3b}{2x-3}\leqslant 0$$

$$(-2ax^2+x(12+3a-2b)+14+3b)(2x-3)\leqslant 0$$

$$-2ax^2+x(12+3a-2b)+14+3b \qquad x=\frac{3}{2}$$

$$D=144+9a^2+4b^2-72a-12ab-48b+4\cdot 2a\cdot(14+3b)=$$
$$8a$$