МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{8}{17}\end{cases}\Rightarrow 2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{8}{17}\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}\Rightarrow|\sin 2\beta|=\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

I случай $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\,\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\quad |\cdot\sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$4\sin 2\alpha=-1-\cos 2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha=-1-(2\cos^2\alpha-1)=2\cos^2\alpha\quad |:\cos^2\alpha\neq 0$

Если $\cos^2\alpha=0\Rightarrow\cos\alpha=0\Rightarrow tg\,\alpha$ не определён $\Rightarrow$ противоречие

$8\,tg\,\alpha=2\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{1}{4}$

II случай $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\quad |\cdot\sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$

$4\sin 2\alpha=-1+\cos 2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha=-1+(1-2\sin^2\alpha)=-2\sin^2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha=0\Rightarrow 2\sin\alpha(4\cos\alpha+\sin\alpha)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\\ 4\cos\alpha+\sin\alpha=0\end{array}\right.\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0\\ \sin\alpha=-4\cos\alpha\ |:\cos\alpha\neq 0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=0\\ tg\,\alpha=-4\end{array}\right.$

Ответ: $tg\,\alpha\in\{0;\frac{1}{4};-4\}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}\, 2\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \; \frac{4}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$

$\cancel{\sin 2\alpha}\; \sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha + \cos^2 2\alpha \pm \cos 2\alpha = 0$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 4\sin 2\alpha = -1-\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha = 8\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos\alpha = 0$ - П.К

$tg\,\alpha = \frac{1}{4}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_4(x^2+6x)=t \quad f(x)=x^2+6x \quad x_B = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow f(x)_{min} = \\ (x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x)^{\log_4 4} - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0 \\ 3^t+4^t-5^t \geq 0 \Rightarrow 3^t+4^t \geq 5^t \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1 \Rightarrow t \leq 2 \end{array}}$$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \Rightarrow 4\sin 2\alpha = \cos 2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha - 2 = -2\sin^2\alpha = 8\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0$

$-2\sin\alpha = 8\cos\alpha \Rightarrow tg\,\alpha = -4$

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2 \\ 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0 \end{array}$$

$3xy-3y-2x+2 = 3y(x-1)-2(x-1) = (3y-2)(x-1)$

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \leq \frac{3y+x-3}{2} \Rightarrow 6y-4x \leq 3y+x+3 \\ \cancel{3(x-1)^2+3(y-1)^2 = -2-2y} \end{cases}$$

$y \leq -1$

$x \leq 1$

$9y-3x \leq 3 \Rightarrow 3y-x \leq 1$

$3y-2x \geq 0 \qquad 6y-2x \leq 2$

$\cancel{3x-3 \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1}$

$2-3y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{2}{3}$

$3(x-1)^2 + \frac{1}{3}(\overset{b}{3y-2})^2 = 4+3+\frac{4}{3} = \frac{25}{3}$

$\frac{1}{3}(3y-2)^2 = 3y^2-4y+\frac{4}{3}$

$$\begin{cases} b-2a = \sqrt{ab} \\ 3a^2+\frac{1}{3}b^2 = \frac{25}{3} \end{cases} \Rightarrow b+\sqrt{ab}-2\sqrt{ab}-2a=0$$

$(\sqrt{|b|}-2\sqrt{|a|})(\sqrt{|b|}+\sqrt{|a|}) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0 \text{ -П.К} \\ |b|=4|a| \\ b^2=16a^2 \end{array}\right.$

$3a^2+\frac{16}{3}a^2 = \frac{25}{3} = \frac{25}{3}a^2 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow b^2=16$

$(x-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$(3y-2)^2=16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3y-2=4 \\ 3y-2=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$

$\cancel{c^{\log_b a} = c^{\log}}$

$4^{\log_{64} 8} = 2 = 8^{\log_{64} 4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$3xy-2x-3y+2=3y(x-1)-2(x-1)=(3y-2)(x-1)$

$3x^2+3y^2-6x-4y=3x^2-6x+3-3+3y^2-4y+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=4$

$3(x-1)^2+\frac{1}{3}(3y-2)^2=4+3+\frac{4}{3}=\frac{25}{3}$

$3y-2x=(3y-2)-2(x-1)$

Замена $\begin{cases} a=x-1 \\ b=3y-2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \quad (1) \\ 3a^2+\frac{1}{3}b^2=\frac{25}{3} \end{cases}$

(1) $b-2a=\sqrt{ab} \Rightarrow b-\sqrt{ab}-2a=0 \Rightarrow b+\sqrt{ab}-2\sqrt{ab}-2a=0$

$\sqrt{|b|}\left(\sqrt{|b|}+\sqrt{|a|}\right)-2\sqrt{|a|}\left(\sqrt{|b|}+\sqrt{|a|}\right)=0 \Rightarrow \left(\sqrt{|b|}-2\sqrt{|a|}\right)\left(\sqrt{|b|}+\sqrt{|a|}\right)=0$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{|b|}-2\sqrt{|a|}=0 \\ \sqrt{|b|}+\sqrt{|a|}=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |b|=4|a| \\ a=b=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=16a^2 \\ a^2=b^2=0 \end{array}\right.$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2=b^2=0 \\ b^2=16a^2 \end{array}\right. \\ 3a^2+\frac{1}{3}b^2=\frac{25}{3} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2=b^2=0 \\ 0=\frac{25}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} b^2=16a^2 \\ 3a^2+\frac{16}{3}a^2=\frac{25}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=16a^2 \\ \frac{25}{3}a^2=\frac{25}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=16 \\ a^2=1 \end{cases} \end{array}\right.$

Обратная замена

$\begin{cases} (x-1)^2=1 \\ (3y-2)^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3y-2=4 \\ 3y-2=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3y=6 \\ 3y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-\frac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases}$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}\geq 0 \Rightarrow 2x\leq 3y$

Если $y=-\frac{2}{3} \Rightarrow 2x\leq -2 \Rightarrow x\leq 1<0<2 \Rightarrow$ противоречие

$3xy-2x-3y+2=(3y-2)(x-1)\geq 0$

Если $x=0;\ y=2 \Rightarrow (3\cdot 2-2)(0-1)=4\cdot(-1)<0 \Rightarrow$ противоречие

N2 (продолжение)

Если $x=y=2$

$3\cdot 2-2\cdot 2=\sqrt{3\cdot 2\cdot 2-2\cdot 2-3\cdot 2+2}$

$6-4=\sqrt{12-4-6+2}$

$2=\sqrt{4}$

$3\cdot 2^2+3\cdot 2^2-6\cdot 2-4\cdot 2=3\cdot 4+3\cdot 4-12-8=4$

Значит $x=y=2$ - решение системы

Ответ: $\{(2;2)\}$.

N3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x)^{\log_4 4}\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}$

Так как $\log_4(x^2+6x)$ определён $\Rightarrow |x^2+6x|=x^2+6x$

Так как на ОДЗ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\Rightarrow(x^2+6x)^{\log_4 4}=4^{\log_4(x^2+6x)}$

$|x^2+6x|^{\log_4 5}=5^{\log_4(x^2+6x)}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}\geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

Замена $t=\log_4(x^2+6x)$

$3^t+4^t\geq 5^t \quad |:5^t>0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\geq 1$

1). Введём $f(t)=\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t$

$g(t)=1$

2). $f(t)$ убывает ~~при~~ ~~на~~

3). $g(t)$ - константа

4). из 2 и 3 п $\Rightarrow$ что функции разной монотонности пересекаются не более одного раза

5). $t=2\Rightarrow f(2)=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1=g(t)$

6). из 4 и 5 п $\Rightarrow t=2$ единственный корень $f(t)=g(t)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3 (продолжение)

Так как $f(t)$ убывает $\Rightarrow f(t) \geq g(t)$ при $t \leq 2$

Обратная замена

$\log_4(x^2+6x) \leq 2$

$0 < x^2+6x \leq 16 \Rightarrow \begin{cases} x^2+6x>0 \ (1) \\ x^2+6x \leq 16 \ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-6 \end{array}\right. \\ -8 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

(1) $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$+ \quad -6 \quad - \quad 0 \quad +$

$\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-6 \end{array}\right.$

(2) $x^2+6x \leq 16$

$x^2+6x-16 \leq 0$

$x^2+8x-2x-16 \leq 0$

$x(x+8)-2(x+8) \leq 0$

$(x-2)(x+8) \leq 0$

$+ \quad -8 \quad - \quad 2 \quad +$

$-8 \leq x \leq 2$

Ответ: $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$.

N5

$f(ab)=f(a)+f(b) \Rightarrow$ если $a=b=1 \Rightarrow f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(\frac{a}{a})=f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})=f(1)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a)$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(y)>f(x)$

Посчитаем значения $f(x)$ при $x \in [1; 27]$

$f(1)=0$

~~$f(2)=f(2)$~~

$f(2)=[\frac{2}{4}]=0$

$f(3)=[\frac{3}{4}]=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=[\frac{5}{4}]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=[\frac{7}{4}]=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=[\frac{11}{4}]=2$

$f(12)=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=[\frac{13}{4}]=3$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(17)=[\frac{17}{4}]=4$

$f(18)=f(3)+f(6)=0$

$f(19)=[\frac{19}{4}]=4$

$f(20)=f(4)+f(5)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

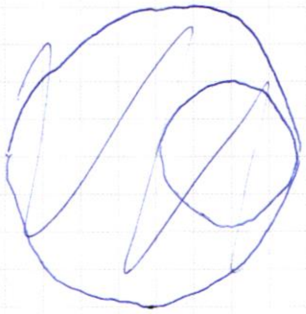
$f(23)=[\frac{23}{4}]=5$

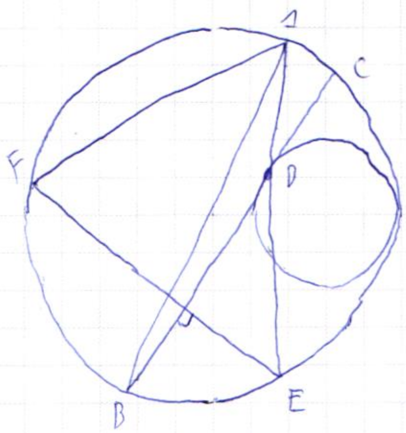
$f(24)=f(4)+f(6)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$





$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

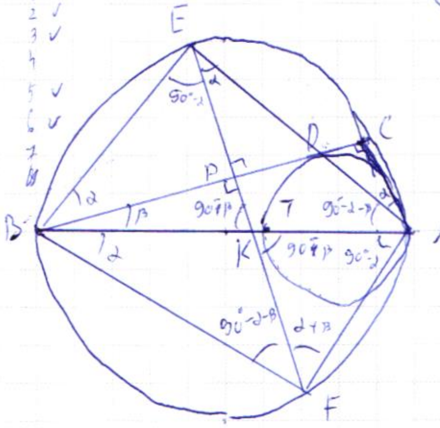
$AD \cdot DE = CD \cdot BD = \frac{65}{4}$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$

$BC = 9$ $\quad \frac{4x-3-2ax^2+2bx+2ax+2b}{2x-2} \geq 0$

$-2ax^2 + x(-2a+P_2b+4) - 3 + 2b \geq 0$ $\quad x \in (1;3]$

$x_{13} = \frac{2a+2b-4}{4} = \frac{a+b-2}{2}$



1 ✓
2 ✓
3 ✓
4
5 ✓
6 ✓
7
8

~~$BT \cdot BA = CD \cdot BD = \frac{65}{4}$~~

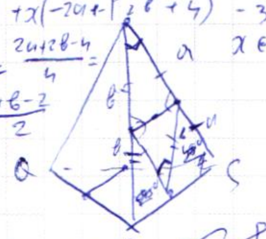
$BT \cdot TA = k \cdot BD^2 = \frac{169}{4}$

$CA \parallel EF$

$\triangle AKF \sim \triangle BEK$

$\frac{KF}{BK} = \frac{AK}{KE} = \frac{AF}{BE}$

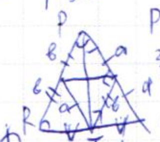
$\frac{KF}{AK} =$



$QP = 2$ $\quad$ $RS = PS\cos 45^\circ = 1$

$QS = 1$ $\quad$ $PT = \sqrt{a^2+b^2}$

$PS = \sqrt{2}$

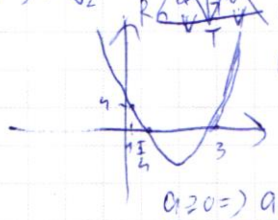


$\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = \frac{PT}{RT} =$

$S = \frac{TS}{PT}$

$PT^2 = TS \cdot RT = RT^2$

$PT = RT$



$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30$ $\quad$ $\begin{array}{r} 2560 \\ +24733 \\ \hline 27293 \end{array}$

~~$4x-a$~~ $\; 2 + \frac{1}{2(x-1)} \geq ax+b \geq 8\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$

$8x^2 - 34x + 30 = 0 \Rightarrow 2(4x-5)(x-3) = 8\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$

~~D~~ $4x^2 - 17x + 15 = 0$

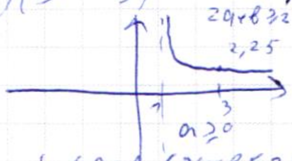
~~D~~ $4x^2 - 12x - 5x + 15 = 0$

$4x(x-3) - 5(x-3) = 0$

$a \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 4$

$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b \geq 4 \\ 3a+b \geq 0 \\ 2a+b \geq 2 \end{cases}$

$2{,}25$



$a \geq 0$

$4 \leq a+b \quad 3a+b \leq 2{,}25$

$a < 0$

$\begin{array}{r} 137 \\ \times 201 \\ \hline 137 \\ 27400 \\ \hline 27537 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 27537 \\ \times 10 \\ \hline 275370 \\ -27537 \\ \hline 247833 \end{array}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

27293

$f(1) = 0$	$f(4) = 0$	$f(21) = 1$
$f(2) = 0$	$f(6) = 0$	$f(22) = 2$
$f(3) = 0$	$f(8) = 0$	$f(24) = 0$
$f(5) = 1$	$f(16) = 0$	$f(25) = 2$
$f(7) = 1$	$f(9) = 0$	$f(26) = 3$
$f(11) = 2$	$f(10) = 1$	$f(27) = 0$
$f(13) = 3$	$f(12) = 0$	
$f(17) = 4$	$f(14) = 1$	
$f(19) = 4$	$f(15) = 1$	
$f(23) = 5$	~~$f(16)$~~ $f(18) = 0$	
	$f(20) = 1$	

$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) =$ ~~$-A$~~ $f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

$\Omega = (x - R_\Omega)^2 + y^2 = R_\Omega^2$

$\omega = (x - R_\omega)^2 + y^2 = R_\omega^2$

$A(0;0)$

$B(-2R;0)$

$2 + \frac{1}{2(x-1)} = 0$

$f^*(x_0) = 2 + \frac{1}{2(x_0-1)}$

$f'(x_0) = 2 - \frac{1}{2(x_0-1)^2}$

$\begin{array}{r} 169 \\ \times 9 \\ \hline 1521 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 169 \\ \times 5 \\ \hline 845 \end{array}$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x) = 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} + \left(2 - \frac{1}{2(x_0-1)^2}\right)(x - x_0) =$ ~~$2 - 2x_0 +$~~ $\left(2 - \frac{1}{2(x_0-1)^2}\right)x +$

$+ 2 - 2x_0 + \frac{2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2} \geq ax_0 + b$

$\begin{array}{r} 137 \\ \times 9 \\ \hline 1233 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 32 \\ \times 9 \\ \hline 288 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 1521 \\ -288 \\ \hline 1233 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

Таким образом среди натуральных чисел $x \in [3; 27]$

$f(x)=0$ при $x \in \{3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 27\}$, то есть в 10 значениях

$f(x)=1$ при $x \in \{5; 7; 10; 14; 15; 20; 21\}$, то есть в 7 значениях

$f(x)=2$ при $x \in \{11; 22; 25\}$, то есть в 3 значениях

$f(x)=3$ при $x \in \{13; 26\}$, то есть в 2 значениях

$f(x)=4$ при $x \in \{17; 19\}$, то есть в 2 значениях

$f(x)=5$ при $x=23$, то есть в 1 значении

$\left[\begin{array}{l} f(x)>5 \\ f(x)<0 \end{array}\right.$ не имеет решений.

$f(y)>f(x)$

Если $f(y)=5 \Rightarrow f(x) \in \{0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ так как $f(y)=5$ в 1 случае, $f(x)<5$ в 24 значениях $(10+7+3+2+2=24)$, то всего случаев $1 \cdot 24 = 24$

Если $f(y)=4 \Rightarrow f(x)<4 \Rightarrow f(y)=4$ – 2 решения; $f(x)<4$ – 22 решения $(10+7+3+2=22)$, то всего $2 \cdot 22 = 44$ случая

Если $f(y)=3 \Rightarrow f(x)<3 \Rightarrow f(y)=3$ – 2 решения; $f(x)<3$ – 20 решений $(10+7+3=20)$, то всего $2 \cdot 20 = 40$ случаев.

Если $f(y)=2 \Rightarrow f(x)<2 \Rightarrow f(y)=2$ – 3 решения; $f(x)<2$ – 17 решений $(10+7=17)$, то всего $3 \cdot 17 = 51$ случай

Если $f(y)=1 \Rightarrow f(x)<1 \Rightarrow f(y)=1$ – 7 случаев; $f(x)<1$ – 10 решений, то всего $7 \cdot 10 = 70$ случаев

Если $f(y)=0 \Rightarrow f(x)<0 \Rightarrow$ нет решений.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5 (продолжение)

Итого пар решений $f(\frac{x}{y})<0$ при $x\in[3;27]$, $y\in[3;27]$

$24+44+40+51+70=108+121=229$

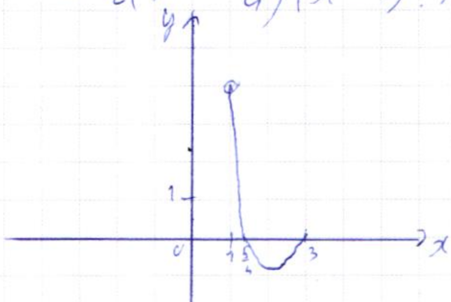
Ответ: 229 пар.

№6

$ax+b\geq 8x^2-34x+30$

$8x^2-34x+30=8x^2-24x-10x+30=8x(\cancel{8}x-3)-10(x-3)=$

$=8(x-\frac{5}{4})(x-3)$. Пусть $f(x)=8(x-\frac{5}{4})(x-3)$



$x=1 \Rightarrow f(x)=8(1-\frac{5}{4})(1-3)=8(-\frac{1}{4})(-2)=4$

$f(3)=0$

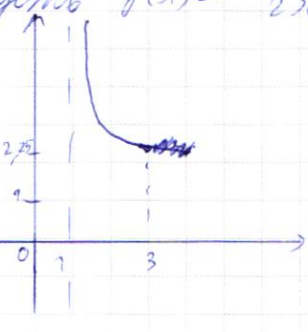
Если $a\geq 0 \Rightarrow f(1)\leq ax+b=a+b \Rightarrow 4\leq a+b$

Если $a<0 \Rightarrow \begin{cases} f(1)\leq ax+b=a+b \Rightarrow 4\leq a+b \\ f(3)\leq ax+b=3a+b \Rightarrow 0\leq 3a+b \end{cases}$

~~f(3)=0~~

$\begin{cases} f(x)=8(x-\frac{5}{4})(x-3) \\ x\in(1;3] \end{cases}$

Пусть $g(x)=\frac{4x-3}{2x-2} \Rightarrow g(x)=2+\frac{1}{2(x-1)}$



Если $a\geq 0 \Rightarrow f(3)\geq ax+b=3a+b$

$f(3)=2+\frac{1}{2(3-1)}=2,25\geq 3a+b$

Так как $a\geq 0 \Rightarrow 2,25\geq 3a+b\geq a+b\geq 4$ – противоречие $\Rightarrow a\geq 0$ не содержит подходящих решений

Введем $h(x)=g(x)-ax-b=\frac{4x-3}{2x-2}-ax-b=\frac{-2ax^2+x(-2a-2b+4)+2b-3}{2x-2}\geq 0$

Так как $x\in(1;3] \Rightarrow 2x-2>2-2=0 \Rightarrow$

$k(x)=-2ax^2+x(-2a-2b+4)+2b-3\geq 0$

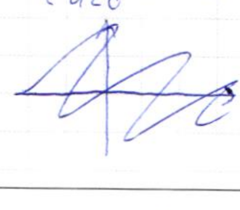
гр. кв. гр. пар. ветви ↑

$x_B=\frac{2a+2b-4}{2a} \Rightarrow$ ТК $a<0 \Rightarrow 2a<0$, так $a+b\geq 4 \Rightarrow 2a+2b-4\geq 4$ $\Rightarrow x_B<0 \Rightarrow k(x)$ возрастает при $x\in(1;3]$

$\begin{cases} k(1)\geq 0 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow -2a+4-2a-2b+2b-3\geq 0$

$1-4a\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a\leq \frac{1}{4} \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow a<0$

$\begin{cases} a+b\geq 4 \\ a<0 \\ 3a+b\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\geq 4-a \\ a<0 \\ b\geq -3a \end{cases}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

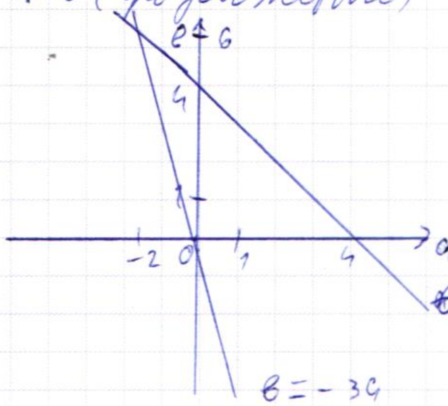
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6 (продолжение)



$\begin{cases} b=-3a \\ b=4-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-a=-3a \\ b=-3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=6 \end{cases}$

$\begin{cases} a \geq -2 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow b \geq 4-a$

$a \leq -2 \Rightarrow b \geq -3a$

Ответ: при $a \in (-\infty; -2]$ $b \in [-3a; +\infty)$

при $a \in [-2; 0)$ $b \in [4-a; +\infty)$.

N 4

Дано:

$\omega \cap \Omega = A$

AB - диам Ω

BC - хорда Ω

$BC \cap \omega = D$

$AD \cap \Omega = E$

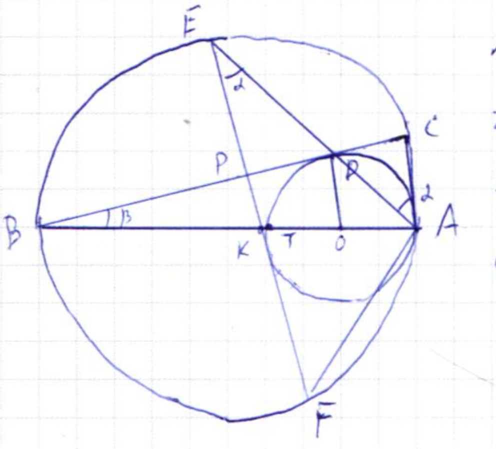
$EF \perp BC$

$EF \cap \Omega = F$

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$R_\omega; R_\Omega; \angle AFE; S_{\triangle AEF}$ - ?



1). Т.к. AB - диам $\Rightarrow \angle ACB = 90° \Rightarrow AC \perp BC$

2). Т.к. $BC \perp AC$; $BC \perp EF \Rightarrow EF \parallel AC$

3). Пусть $AB \cap \omega = T$

$BC \cap EF = P$; $EF \cap AB = K$

4). $BD^2 = BT \cdot BA = \frac{169}{4}$

5). $BD \cdot DC = ED \cdot DA = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{65}{2}$

6) $BC = BD + CD = 9$

7). $\triangle BDO \sim \triangle BCA$ (по 2 ∠)

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BA} = \frac{\frac{13}{2}}{9} = \frac{13}{18}$

8) $BO = 2R_\Omega - R_\omega$

$BA = 2R_\Omega$

$BT = 2R_\Omega - 2R_\omega$

9). $\begin{cases} \frac{2R_\Omega - R_\omega}{2R_\Omega} = \frac{13}{18} \Rightarrow \frac{R_\omega}{2R_\Omega} = \frac{5}{18} \Rightarrow \frac{R_\omega}{R_\Omega} = \frac{5}{9} \Rightarrow R_\omega = \frac{5}{9}R_\Omega \\ \frac{169}{4} = BT \cdot BA = (2R_\Omega - 2R_\omega)\, 2R_\Omega \end{cases}$

$\frac{169}{4} = 4R_\Omega(R_\Omega - R_\omega) = 4R_\Omega(R_\Omega - \frac{5}{9}R_\Omega) = R_\Omega 4 \frac{16}{9}$

$R_\Omega = \frac{169 \cdot 9}{4 \cdot 16} = \frac{1521}{64} \Rightarrow R_\omega = \frac{5}{9} R_\Omega = \frac{169 \cdot 5}{4 \cdot 16} = \frac{845}{64}$

N4 (продолжение)

10). тк $CA \parallel EF \Rightarrow \angle AEF = \angle CAD = \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$

11). $AB = 2R_\Omega = \frac{1521}{32}$

12). по т Пиф в $\triangle ABC$

$AC^2 = AB^2 - BC^2 = (AB - BC)(AB + BC) = \left(\frac{1521}{32} - 9\right)\left(\frac{1521}{32} + 9\right) =$

$= \frac{1809}{32} \cdot \frac{1233}{32} = \left(\frac{9}{32}\right)^2 201 \cdot 137 \Rightarrow AC = \frac{9}{32}\sqrt{201 \cdot 137}$

13). $tg\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{5}{2} \cdot \frac{32}{9\sqrt{201 \cdot 137}} = \frac{80}{9\sqrt{201 \cdot 137}}$

14). $\beta = \angle CBA \Rightarrow \sin\beta = \frac{CA}{AB} = \frac{9\sqrt{201 \cdot 137}}{32} \cdot \frac{32}{1521} = \frac{\sqrt{201 \cdot 137}}{169}$

$\cos\beta = \frac{BC}{AB} = 9 \cdot \frac{32}{1521} = \frac{9 \cdot 32}{9 \cdot 169} = \frac{32}{169}$

15). $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{6400}{81(201 \cdot 137)}}} =$

$= \sqrt{\frac{81 \cdot 201 \cdot 137}{81 \cdot 201 \cdot 137 + 6400}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{6400}{81 \cdot 201 \cdot 137 + 6400}}$

16). $\angle AFE = \alpha + \beta = \arcsin(\sin(\alpha + \beta)) =$

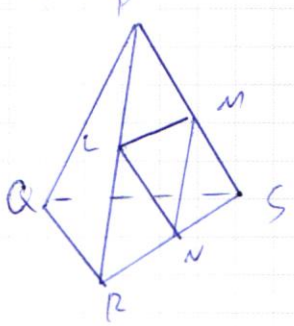
$= \arcsin(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{6400}{81 \cdot 201 \cdot 137 + 6400}} \cdot \frac{32}{169} + \sqrt{\frac{81 \cdot 201 \cdot 137}{81 \cdot 201 \cdot 137 + 6400}} \cdot \frac{\sqrt{201 \cdot 137}}{169}\right) = \arcsin\left(\frac{80 \cdot 32}{169\sqrt{81 \cdot 201 \cdot 137 + 6400}} +\right.$

$\left. + \frac{9 \cdot 201 \cdot 137}{169\sqrt{81 \cdot 201 \cdot 137 + 6400}}\right) = \arcsin\left(\frac{250393}{169\sqrt{81 \cdot 201 \cdot 137 + 6400}}\right)$

Ответ: $R_\Omega = \frac{1521}{64}$; $R_\omega = \frac{845}{64}$; $\angle AFE = \frac{80 \cdot 32 + 9 \cdot 201 \cdot 137}{169\sqrt{81 \cdot 201 \cdot 137 + 6400}} =$

$= \arcsin\left(\frac{250393}{169\sqrt{81 \cdot 201 \cdot 137 + 6400}}\right)$

N 7



1). PMNL - квадрат. тк центр сферы равноудален от P, M, N, L