МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

Если взять $a = x$, $b = \frac{1}{y}$, то:

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

Если взять $a = y$, $b = \frac{1}{y}$, то:

$f(1) = f(y) + f(\frac{1}{y})$, но при $a = y$, $b = 1$: $f(y) = f(y) + f(1)$,

т.е. $f(1) = 0$

$0 = f(y) + f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$. Если $f(\frac{x}{y}) < 0$, то: $f(y) > f(x)$.

Найдём значение функции от первых 28 натуральных чисел:

$f(1) = 0$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$

$f(12) = f(2) + f(6) = 0$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(2) + f(8) = 0$

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$

$f(20) = f(2) + f(10) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$

$f(24) = f(2) + f(12) = 0$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

$f(26) = f(2) + f(13) = 3$

$f(27) = f(3) + f(9) = 0$

$f(28) = f(2) + f(14) = 1$

Значение $f(x)$	0	1	2	3	4	5
Сколько раз она его принимает при $x \in [4; 28]$, $x \in N$	9	8	3	2	2	1

1) $f(x) = 0$, $f(y) = 1, 2, 3, 4$ или 5

$9 \cdot 16 = 144$ способа составить такую пару

2) $f(x) = 1$, $f(y) = 2, 3, 4$ или 5

$8 \cdot 8 = 64$ способа

3) $f(x) = 2$, $f(y) = 3, 4$ или 5

$3 \cdot 5 = 15$ способов

4) $f(x) = 3$, $f(y) = 4$ или 5

$2 \cdot 3 = 6$ способов

5) $f(x) = 4$, $f(y) = 5$

$2 \cdot 1 = 2$ способа

$144 + 64 + 15 + 6 + 2 = 231$ способ

Ответ: 231 способ

№1

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \left(\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} + \right.$

$\left. + \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\beta}{2} +$

$+ \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2\frac{\beta}{2} =$

$= \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right) + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$

$= \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\alpha + \sin\beta\right) \Rightarrow \sin\alpha + \sin\beta =$

$= 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Вернёмся к нашей задаче.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$-\frac{2}{17} = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

1) $\sin\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha+\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha$

$-1 = \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha$

$-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$3\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-5\cos^2\alpha=0$

$3tg^2\alpha-2tg\alpha-5=0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{5}{3}\end{array}\right.$

2) $\sin\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha-\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha$

$-1 = \sin 2\alpha-4\cos 2\alpha$

$-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$5\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$

$5tg^2\alpha+2tg\alpha-3=0$

$tg\alpha=-1$ или $tg\alpha=\frac{3}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Итого получим 3 возможных значение $tg\alpha$: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$

Ответ: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Rightarrow y-6x\geq 0$$

$$\begin{cases} (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $a=x-1$, $b=y-6$, тогда $y-6x=b-6a$

$$\begin{cases} (b-6a)^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$b^2+36a^2-12ab-ab=0$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$D=-144a^2+169a^2=25a^2$

$b=\frac{13a\pm 5a}{2}$

$$\left[\begin{aligned} b&=9a \\ b&=4a \end{aligned}\right.$$

Подставим во 2 уравнение: $9a^2+81a^2=90$ $\quad 9a^2+16a^2=90$

$a^2=1$ или $a^2=\frac{18}{5}$

$$\begin{cases} a=\pm 1 \\ b=\pm 9 \end{cases}$$

$a=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

$$\begin{cases} a=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ b=\pm 12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$$

Сделаем проверку на $b-6a=y-6x\geq 0$

1) $\begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases}$ $\quad 9-6=3>0$

2) $\begin{cases} a=-1 \\ b=-9 \end{cases}$ $\quad -9+6=-3<0$ не подходит

3) $\begin{cases} a=3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ b=12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$ $\quad 12\sqrt{\frac{2}{5}}-18\sqrt{\frac{2}{5}}=-6\sqrt{\frac{2}{5}}<0$ не подходит

4) $\begin{cases} a=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ b=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$ $\quad -12\sqrt{\frac{2}{5}}+18\sqrt{\frac{2}{5}}>0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Итак, $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=9\end{cases}\\ \begin{cases}a=-3\sqrt{\frac{2}{5}}\\ b=-12\sqrt{\frac{2}{5}}\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=15\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1\\ y=-12\sqrt{\frac{2}{5}}+6\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $(2;15)$ или $\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1;\ -12\sqrt{\frac{2}{5}}+6\right)$.

№3

Св-во: $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$

Действительно, ведь если прологарифмировать: $\log_a\left(b^{\log_a c}\right)=$
$=\log_a\left(c^{\log_a b}\right)$

$\log_a c\cdot\log_a b=\log_a b\cdot\log_a c$ — верно.

Вернемся к задаче.

$|x^2-26x|^{\log_5 12}\geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

Пусть $t=26x-x^2$ $\cancel{(t\geq 0)}$

$|-t|^{\log_5 12}\geq -t+13^{\log_5 t}$

$\log_5 t$ существует $\Rightarrow t>0\Rightarrow |-t|=t$

$t^{\log_5 12}\geq -t+13^{\log_5 t}$

Применим свойство: $12^{\log_5 t}+t\geq 13^{\log_5 t}$

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t}\geq 13^{\log_5 t}$

Пусть $a=\log_5 t$. $\cancel{(a}$

$12^a+5^a\geq 13^a$

При $a=2$ достигается равенство. Пусть $a>2$,
(a=2 подходит) $a=2+x,\ x>0$

$12^a + 5^a < 13^a$ – докажем это

$12^{2+x} + 5^{2+x} < 13^{2+x}$

$\cancel{144^x + 25^x < 169^x}$ $\quad 144 \cdot 12^x + 25 \cdot 5^x < 169 \cdot 13^x$

$x > 0 \Rightarrow 13^x > 12^x$ и $13^x > 5^x$. Если увеличить 12^x и 5^x до 13^x, неравенство превратится в равенство. Значит действительно $144 \cdot 12^x + 25 \cdot 5^x < 169 \cdot 13^x$ и $a > 2$ нам не подходит.

Пусть $a < 2$, $a = 2 + x$, $x < 0$.

Докажем $12^a + 5^a > 13^a$

$$144 \cdot 12^x + 25 \cdot 5^x > 169 \cdot 13^x$$

$x < 0 \Rightarrow$ $\cancel{5^x <}$ $5^x > 13^x$ и $12^x > 13^x$, поэтому мы можем уменьшить 5^x и 12^x до 13^x и тогда получим равенство. Значит действительно $144 \cdot 12^x + 25 \cdot 5^x > 169 \cdot 13^x$ и $a < 2$ нам подходит.

Нам подходят $a \leq 2$

$$\log_5 t \leq 2$$

$$t \in (0; 25]$$

$\begin{cases} 26x - x^2 > 0 \\ 26x - x^2 \leq 25 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - 26x < 0 \\ x^2 - 26x + 25 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (0; 26) \\ x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty) \end{cases}$

$x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

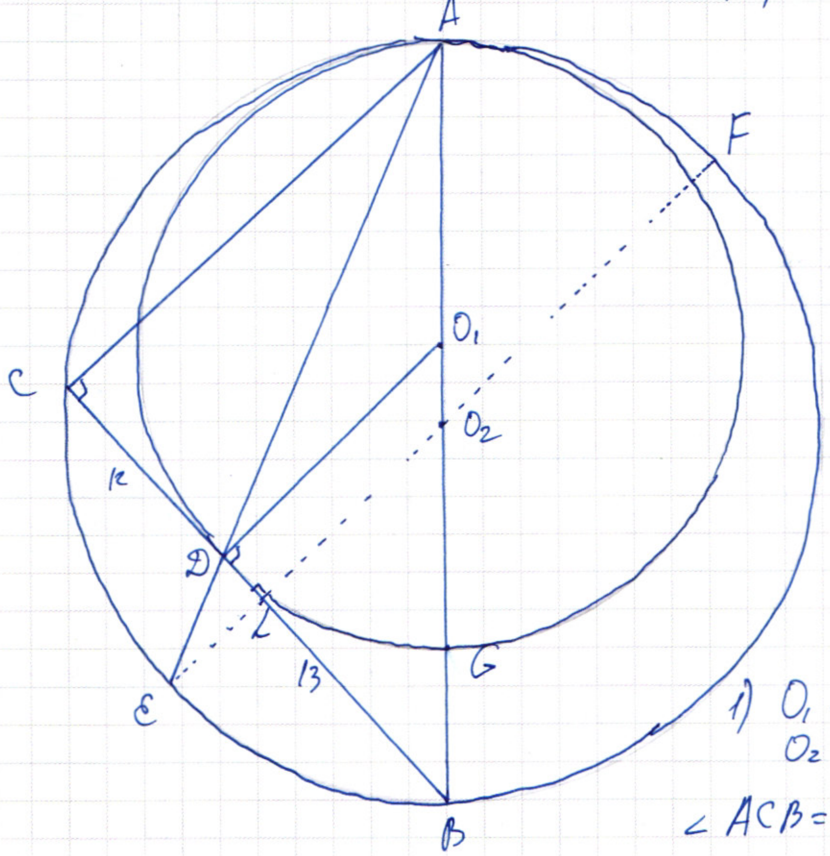
Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано:

$CD = 12$

$BD = 13$

Найти:

$R - ?$

$r - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AEF} - ?$

Решение:

1) O_1 – центр ω, радиус r

O_2 – центр Ω, радиус R

$\angle ACB = 90°$, т.к. опирается на AB – диаметр Ω. $\angle O_1DB = 90°$, т.к. BC – касат.

$\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ по 2 углам. $O_1B = 2R - r$, $AB = 2R$

$\frac{BD}{O_1B} = \frac{BC}{AB}$ $\quad \frac{13}{2R-r} = \frac{25}{2R}$ $\quad 26R = 50R - 25r$

$24R = 25r$

$r = \frac{24}{25}R = 0{,}96R$

Степень точки B относительно ω:

$BD^2 = BG \cdot BA$, $BG = 2R - 2r$

$13^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$169 = 0{,}08R \cdot 2R = 0{,}16R^2$

$R^2 = \frac{13^2 \cdot 10^2}{4^2}$ $\quad R = \frac{13 \cdot 10}{4} = 32{,}5$

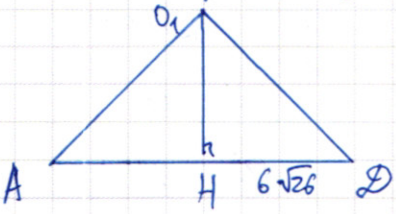
$r = \frac{24}{25} \cdot \frac{65}{2} = \frac{156}{5} = 31{,}2$

2) Из $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 3600 + 144 = 3744$

$AD = 12\sqrt{26}$

$\triangle AO_1D$ равнобедренный:



O_1H – высота $\Rightarrow$ медиана, $HD = 6\sqrt{26}$

$O_1D = r = 31,2$

$O_1H^2 = O_1D^2 - HD^2 = 31,2^2 - 36 \cdot 26 =$

$= 973,44 - 936 = 37,44$

$ctg \angle O_1AD = \cancel{\dfrac{\sqrt{37,44}}{\frac{\sqrt{3744}}{2}}} = \dfrac{AH}{O_1H} = \dfrac{\frac{\sqrt{3744}}{2}}{\sqrt{37,44}} = 5$

$\angle AEB = 90°$, т.к. опирается на диаметр Ω.

Тогда из $\triangle AEB$ $tg \angle ABE = ctg \angle BAE = ctg \angle O_1AD =$

$= 5$.

$\angle AFE$ и угол ABE опираются на одну дугу в окружности Ω. $\angle AFE = \angle ABE = arctg\, 5$.

3) По лемме Архимеда E – середина $\smile BC$ (не содержащей A). F симметрична E относительно BC, поэтому F – середина другой $\smile BC$ и EF – диаметр Ω. $\angle EAF = 90°$.

$CE = BE$, т.к. стягивают равные дуги

EL – высота в $\triangle CEB \Rightarrow$ медиана, $CL = BL = \frac{BC}{2} = \frac{25}{2}$

$EF \perp BC$ и $AC \perp BC \Rightarrow EF \parallel AC$, поэтому $CL =$ высоте $\triangle AFE$, проведённой к EF. $h = \frac{25}{2}$.

$EF = 65$ как диаметр Ω.

$S_{AFE} = \frac{1}{2} h \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 65 = 406,25$

Ответ: 1) радиусы 31,2 и 32,5
2) $\angle AFE = arctg\, 5$
3) $S = 406,25$

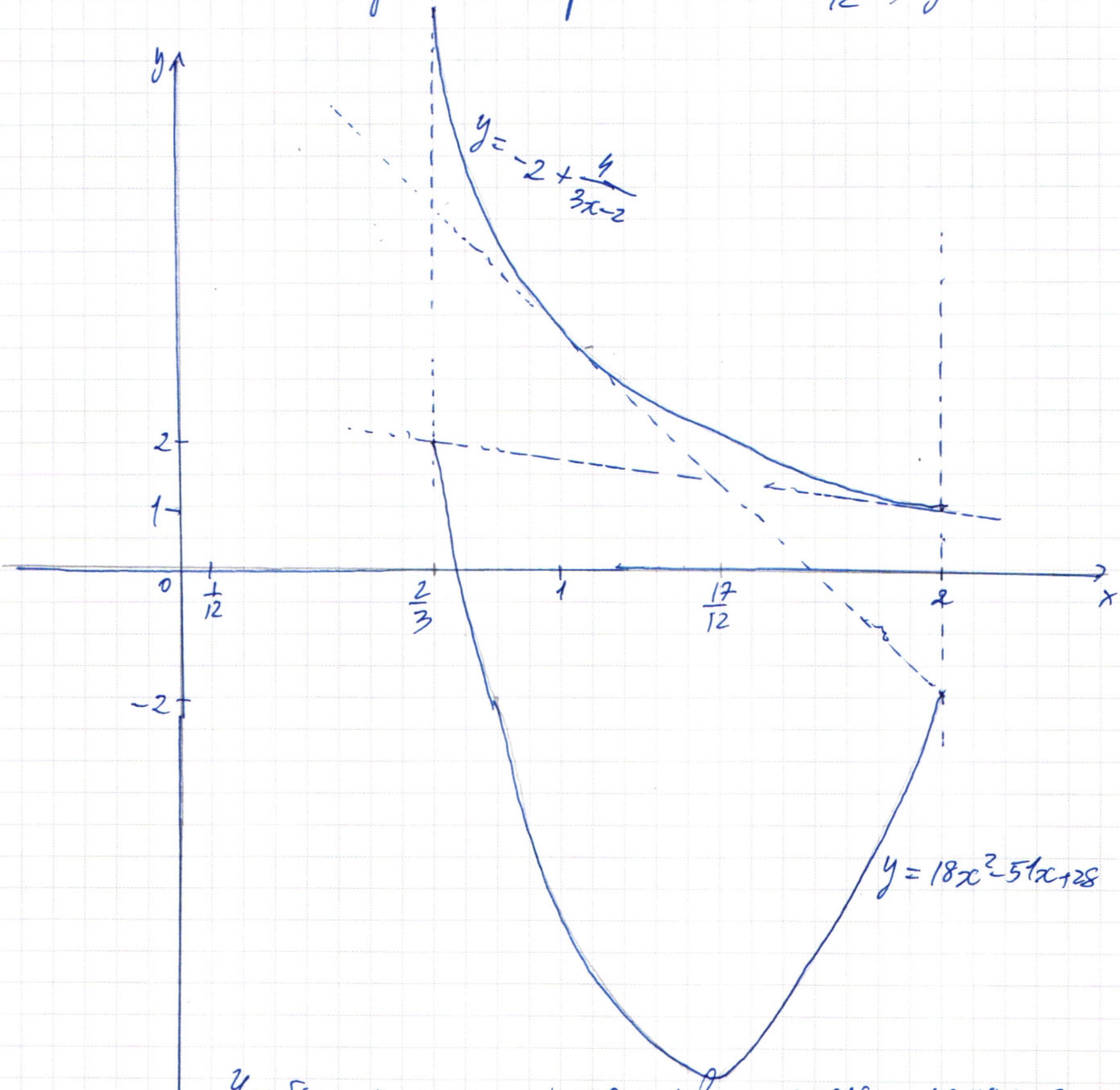
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$ - гипербола, асимптоты $x=\frac{2}{3}$ по вертикали и $y=-2$ по горизонтали.

$18x^2-51x+28$ - парабола, вершина в $x=\frac{17}{12}$, $y=-\frac{65}{8}$



Чтобы прямая $y=ax+b$ лежала между гиперболой и параболой, можно выбрать точку на прямой $x=2$ при $y \in [-2; \cancel{2} 1]$ и вторую точку на прямой $x=\frac{2}{3}$ от $y=2$ до некоторой точки, где прямая $y=ax+b$ коснётся гиперболы.

Производная гиперболы $y'=\frac{-3}{(3x-2)^2}$ в точке 2 равна $-\frac{3}{16}$, но чтобы не задеть параболу нам нужен коэф. $\leq -\frac{12}{16}$, т.е. мы не можем проводить прямую через точку $(2;1)$. Крайнее сверху значение a будет задаваться, когда $y=ax+b$ проходит через $(\frac{2}{3};2)$ и касается гиперболы. А крайнее снизу, когда проходит через $(2;-2)$ и касается гиперболы.

Док-ть, что $12^a+5^a \ge 13^a$

для $a \le 2$: $12^{2-x}+5^{2-x} > 13^{2-x}$

$144 \cdot 12^{-x} + 25 \cdot 5^{-x} > 169 \cdot 13^{-x}$

$a \le 2$

$18 \cdot \frac{17^2}{144} - 51 \cdot \frac{17}{12} + 28 =$

$\log_5 t \le 2$

$t \le 25$, но $t \ge 0$

$= \frac{289}{8} - \frac{289 \cdot 2}{8} + \frac{288}{8}$

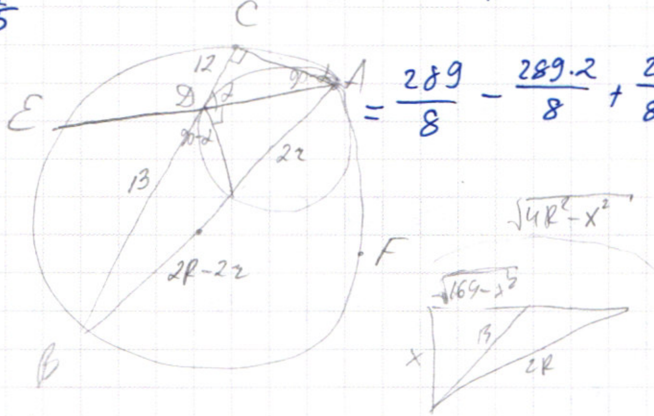
$26x - x^2 \le 25$

$x^2 - 26x + 25 \ge 0$

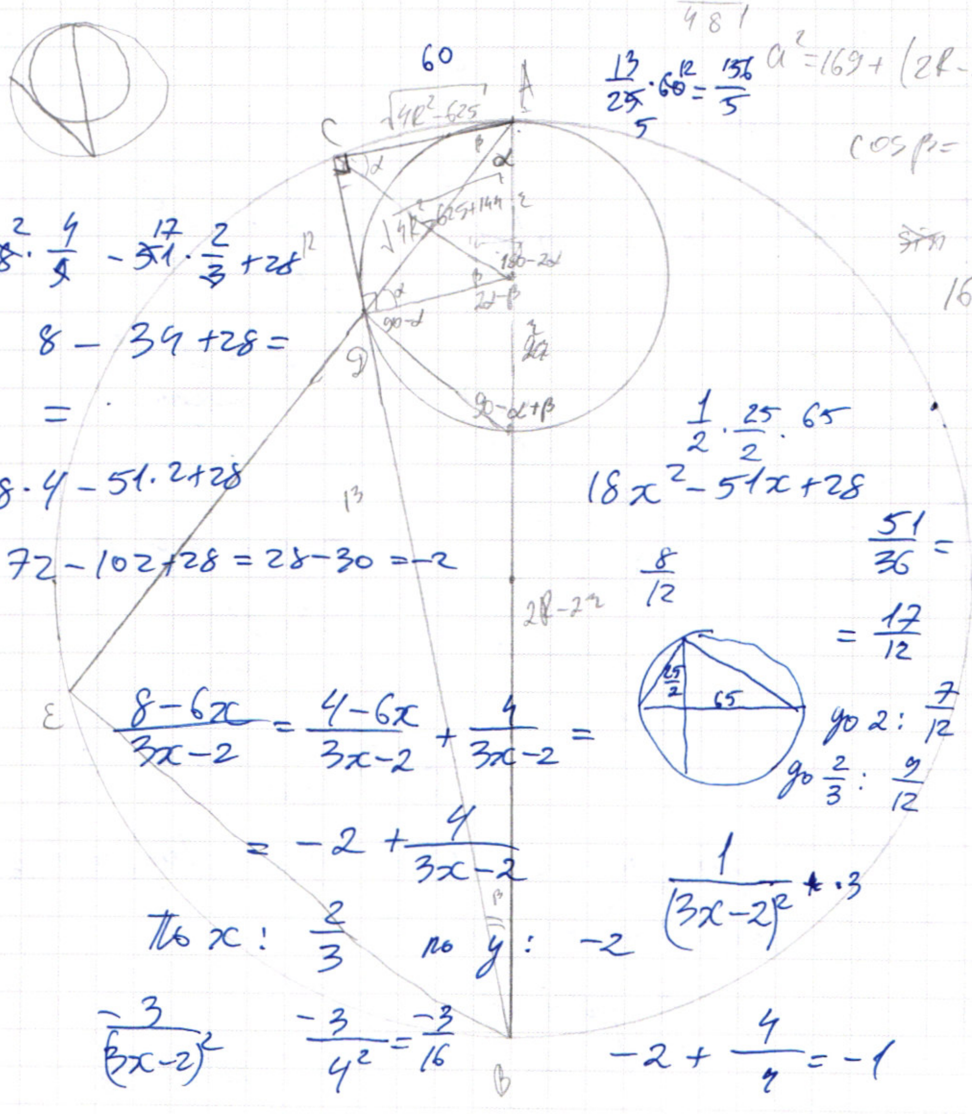
$x^2 - 26x \le 0$

$\begin{cases} x \in [0; 26] \\ x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty) \end{cases}$

$x \in [0; 1] \cup [25; 26]$



$(2R-2r) \cdot 2R = 169$



$a^2 = 169 + (2R-2r)^2 - 2 \cdot 13 \cdot (2R-2r) \cdot \cos\beta$

$\cos\beta = \frac{25}{2R}$

$\frac{13}{25} \cdot 60 = \frac{156}{5}$

$18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28$

$8 - 34 + 28 =$

$=$

$18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28$

$72 - 102 + 28 = 28 - 30 = -2$

$169 + 4R^2 + 4r^2 - 8Rr -$

$- 52(R-r) \cdot \frac{25}{2R} =$

$= 4r^2 - 4R^2 + 625 - 144$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 65$

$18x^2 - 51x + 28$

$\frac{51}{36} =$

$= \frac{17}{12}$

$\frac{8}{12}$

$3600 + 144 = 3744$

$3744 : 144 = 26$

до 2: $\frac{7}{12}$

до $\frac{2}{3}$: $\frac{9}{12}$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4-6x}{3x-2} + \frac{4}{3x-2} =$

$= -2 + \frac{4}{3x-2}$

$\frac{1}{(3x-2)^2} \cdot 3$

По x: $\frac{2}{3}$ по y: -2

$\frac{156^2}{25} - 36 \cdot 26$

$31,2 \cdot 31,2 = 973,44$

$973,44 - 936 = 37,44$

$\frac{-3}{(3x-2)^2}$ $\frac{-3}{4^2} = \frac{-3}{16}$

$-2 + \frac{4}{4} = -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$\log_5 12 \qquad |x^2-26x|^{\log_5 12}+26x$

$x-26=a$

$|ax|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5 \cancel{26}\cdot(-ax)}$

$(-ax)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(-ax)}$

$\cancel{x^2-26x=t} \qquad 26x-x^2=t$

$(-t)^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5(-t)} \qquad \cancel{t<0} \quad \cancel{t\geq 0} \quad t\leq 0$

$\cancel{t\left(t^{\log_5 12-1}-1\right)} \qquad t\geq 0$

$t^{\log_5 12} \geq -t+13^{\log_5 t} \qquad a\geq b-c$

$5^{\log_5\left(t^{\log_5 12}\right)}=5^{\log_5 12\cdot\log_5 t}=12^{\log_5 t} \qquad 5^a \geq 5^b-5^c$

$5^a \geq 5^{b-c}$

$5^{\log_5\left(-t+13^{\log_5 t}\right)}$

$5^2 \geq 5^3-5^1$

неверно

$\frac{12^a+5^a}{2} \geq \sqrt{12^a\cdot 5^a} \qquad a+b\geq c$

$5^{a+b}\geq 5^c$

$12^a+5^a \geq 2\cdot\sqrt{60^a} \qquad 5^a\cdot 5^b \geq 5^c \qquad 5+3\geq \cancel{9}\ 7$

$5^a+5^b \overset{?}{\geq} 5^c \qquad 5^5+5^3\geq 7$

неверно

$\cancel{5^a}\cdot$

$12^{\log_5 t}=t^{\log_5 12}$

$\cancel{5^{13}}^{10} \qquad 5 \qquad 5^{\log_5 t}$

$\log_5 t\cdot\log_5 12=\log_5 12\cdot\log_5 t$

$12^{2+x}+5^{2+x}\leq 13^{2+x}$

$12^a \geq 13^a-5^a \qquad 144\cdot 12^x+25\cdot 5^x\leq 169\cdot 13^x$

$12^a+5^a\geq 13^a \qquad$ при 2 равенство

$12^a\cdot\ln 12+5^a\cdot\ln 5 \quad \vee \quad 13^a\cdot\ln 13$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$169+4R^2-8Rz-26\cdot25+\frac{26\cdot25z}{R}=-4R^2+481$

$8R^2-8Rz-481+\frac{650z}{R}-481=0$

$\frac{2R-2z}{13}=\frac{2R}{25}$

$50R-25z=26R$

$24R=25z$

$R=\frac{25}{24}z$

$z=\frac{24}{25}R$

$169=(2R-2z)2R=(2R-1{,}92R)2R=0{,}08R\cdot2R=0{,}16R^2$

$16900=16R^2$

$R^2=\frac{13^2\cdot10^2}{4^2}$

$R=\frac{13\cdot10}{4}=\frac{65}{2}=32{,}5$

$z=\frac{24}{25}\cdot\frac{65}{2}=\frac{156}{5}=31{,}2$

$65^2=4225$; $4225-481=3744$; $625-144=481$; $42^2=1764$; $62^2=3844$

$\frac{65^2}{4}-36\cdot26$; $36\cdot26=936$

$1600+\frac{225}{4}$; $64+56=120{,}25$

$25\cdot65=25\cdot4\cdot16+25=1600+25$

$\sqrt{65^2-625+144}$

$\frac{12\cdot13^2}{\sqrt{1744}}=\frac{156^2}{1744}$

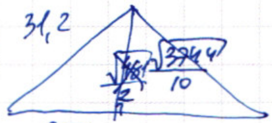
$\sqrt{120{,}25}=\frac{\sqrt{12025}}{10}=\frac{\sqrt{481}}{2}$

$12025:25=481$; $481:13=37$; $1744:4=438$; $3744:13=288$; $225:4=56{,}25$; $1625:4=406{,}25$; $1525:4=381$

$f(5)=1$

$f(7)$

$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=2$

$f(26)=3$

$f(1)=f(a)+f(b)$

$0=f(\cancel{x}\cdot y)+f(\frac{1}{y})$

$f(x)-f(y)<0$

$f(27)=0$

$f(28)=1$

0	1	2	3	4	5
12	8	3	2	2	1

$20 \quad \underbrace{3 \quad 2}_{5} \quad \underbrace{2 \quad 1}_{3}$

9 8 3 2 2 1

$9\cdot 16+8\cdot 8+3\cdot 5+$

$$\begin{array}{r} 144 \\ +\ 64 \\ \hline 208 \\ +\ 23 \\ \hline 231 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2)

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \sin 2\alpha - \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha$

$-1 = 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sqrt{17}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$\sqrt{17}\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sqrt{13}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$(\sqrt{13}+1)\,tg^2\alpha + 4\,tg\alpha - (\sqrt{13}-1) = 0$

$D = 4(\sqrt{13}+1)(\sqrt{13}-1) + 16 = 4 \cdot 12 + 16 = 64$

$tg\alpha = \frac{-4 \pm 8}{2(\sqrt{13}+1)} = \frac{-2 \pm 4}{\sqrt{13}+1}$ $\quad -6 \quad -2 \quad 6$

№2

$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$

$9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$y^2 + 36x^2 - 12xy = xy - 6x - y + 6$

$(y-6x)^2 = x(y-6) - (y-6) = (x-1)(y-6)$

$x - 1 = a \qquad x = a+1$

$y - 6 = b \qquad y = b+6$

$y - 6x = b + 6 - 6(a+1) = b - 6a$

$\begin{cases} 9a^2 + b^2 = 90 \\ (b-6a)^2 = ab \end{cases}$

$x \geq 1,\ y \geq 6$

$a \geq 0,\ b \geq 0$

$b^2 - 12ab + 36a^2 - ab = 0$

$b^2 - 13ab + 36a^2 = 0$

$D = -144a^2 + 169a^2 = 25a^2$

$b = \frac{13a \pm 5a}{2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} b = 9a \\ b = 4a \end{array} \right.$

$-13ab + 27a^2 = -90$

$27a^2 + 90 = 13ab$

$b = \frac{27a^2 + 90}{13a}$

1) $9a^2 + 81a^2 = 90$

$90a^2 = 90$

$a = 1 \quad b = 9$

2) $9a^2 + 16a^2 = 90$

$25a^2 = 90$

$a^2 = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}$

$a = \sqrt{\frac{18}{5}} = 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$b = 12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\left(6\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = 36 \cdot \frac{2}{5}$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1 \\ y = 12\sqrt{\frac{2}{5}} + 6 \end{cases}$ – плохо

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)\cdot$

$\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right) = 2\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+\right.$

$\left.+\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}\right)=$

$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

$-\frac{2}{17} = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{13}{17}}$

$D = 4(\sqrt{13}-1)(\sqrt{13}+1)+16 =$

$=4(13-1)+16=$

$=48+16=64$

$tg\alpha = \frac{4\pm 8}{2(\sqrt{13}-1)} = \frac{2\pm 4}{\sqrt{13}-1}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha+\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha$

$-1 = 2\sin 2\alpha+\sqrt{13}\cos 2\alpha$

$\frac{-1-2\sin 2\alpha}{\sqrt{13}} = \cos 2\alpha$

$-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sqrt{13}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$\sqrt{13}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sqrt{13}\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=0$

$\sqrt{13}+1+4\cancel{\sin\alpha}\,tg\alpha-(\sqrt{13}-1)tg^2\alpha=0$

$(\sqrt{13}-1)tg^2\alpha-4tg\alpha-(\sqrt{13}+1)=0$

$\Sigma = \frac{2}{3} \quad -\frac{2}{5}$

$p = -\frac{5}{3} \quad -\frac{3}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)