МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2\cdot\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\Rightarrow\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ | $\Rightarrow \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$ | $\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$ | $2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1-2\sin^2\alpha=-1 \;|:2$ | $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-1+2\sin^2\alpha=-1 \;|:2$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=0$ | $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha=0$

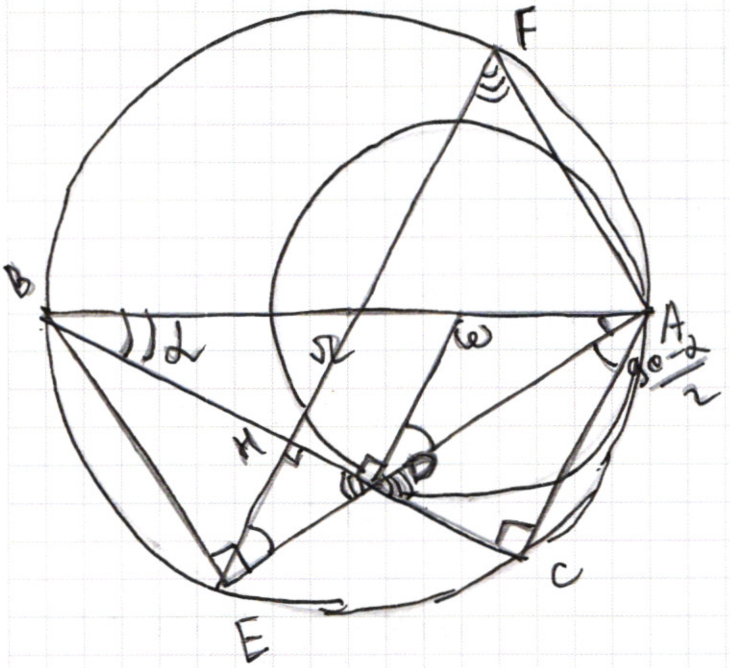
$\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0$ | $\sin\alpha(\sin\alpha+2\cos\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}\\ \cos\alpha=0\end{array}\right.$ | $\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0;\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=0\\ \operatorname{tg}\alpha=-2;\end{array}\right.$ ~~если $\operatorname{tg}\alpha=0$, то $\sin\alpha=0$~~

Ответ: $-\frac{1}{2}$; -2; 0

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

4



Дано:

$CD=8$; $BD=17$

Найти: $R=B\Omega$; $r=A\omega$

$\angle AFE$; $S_{\triangle AEF}$

1 из $\triangle CBA$ ($\angle C=90°$ (опирается на $D\Omega$))

$\angle \omega OB = 90°$ (CB – касательная к ω; ωO – радиус)

$$\frac{BD}{BC}=\frac{B\omega}{BA}=\frac{17}{17+8}=\frac{2R-r}{2R}$$

$$\frac{17}{25}=\frac{2R-r}{2R} \Rightarrow \frac{17}{25}\cdot 2R=2R-r \Rightarrow 2R=\frac{25}{8}r$$

2 из $\triangle BD\omega$

Т. Пиф: $B\omega^2=BD^2+D\omega^2$

$$(2R-r)^2=17^2+r^2$$

$$\left(\frac{17}{8}r\right)^2=17^2+r^2$$

$$r^2\left(\left(\frac{17}{8}\right)^2-1\right)=17^2$$

$$r^2\left(\frac{17+8}{8}\right)\left(\frac{9}{8}\right)=17^2$$

$$r=\frac{17\cdot 8}{3\cdot 5}=\frac{136}{15}=9\frac{1}{15} \Rightarrow R=\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{16}_{2}}\cdot\frac{\cancel{136}^{17}}{\cancel{15}_{3}}=$$

$$=\frac{85}{6}=14\frac{1}{6}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2 (Нумеровать только чистовики)

Ответ: $r = 9\frac{1}{15}$; $R = 14\frac{1}{6}$; $\angle AFE = 45^\circ - \arcsin\left(\frac{8}{17}\right)\cdot\frac{1}{2}$;
$S_{AEF} = 177\frac{1}{12}$

5 1) Заметим, что любое $c \in N$, можно представить в виде суммы простых чисел $\Rightarrow f(c) = k_1(f(p_1)) + k_2 f(p_2) + \ldots f(p_n)$, где k_i это степени простых чисел, а p_i это простые числа, которые стоят в степени k_i $(c = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n})$

$$\Downarrow$$

$$f(c) = k_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + k_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + k_n\left[\frac{p_n}{4}\right]$$

2) т.к. все числа >0, то $\frac{p}{4} > 0 \Rightarrow f(c \in N) \geq 0$ (из 1)

3) Найдем все $f(c)$, для простых от 1 до 24

$f(1) = 0$ $\quad f(5) = 1$ $\quad f(13) = 3$ $\quad f(23) = 5$
$f(2) = 0$ $\quad f(7) = 1$ $\quad f(17) = 4$
$f(3) = 0$ $\quad f(11) = 2$ $\quad f(19) = 4$

4) Пусть: $f(1) = 0 = f(5) + f\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = 0 - 1 = -1$, аналогично со всеми числами, которые дают $f(n) \neq 0$ (вместо „5")

5) $f(4) = 2f(2) = 0$ $\quad f(9) = 2f(3) = 0$ $\quad f(14) = f(2) + f(7) = 1$
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$ $\quad f(10) = f(5) + f(2) = 1$ $\quad f(15) = f(5) + f(3) = 1$
$f(8) = 3f(2) = 0$ $\quad f(12) = f(3) + f(4) = 0$ $\quad f(16) = 4f(2) = 0$
$f(18) = 2f(3) + f(2) = 0$ $\quad f(21) = f(3) + f(7) = 1$ $\quad f(24) = 3f(2) + f(3) = 0$
$f(20) = 2f(2) + f(5) = 1$ $\quad f(22) = f(11) + f(2) = 2$

Все $f(n) = 0$; $n; n_2 \in N$ с $f(n_2) \neq 0$ будут давать отр числа $f\left(\frac{n}{n_2}\right)$ (из 4)
Все $f(n) = 1$ с $f(n_2) > 1$ будут давать отр числа
аналогично с $f(n) = 2$; $f(n) = 3$; $f(n) = 4$; $f(n) = 5$

$f(n) = 0: 11$
$f(n) = 1: 7$
$f(n) = 2: 2$
$f(n) = 3$; $f(n) = 4$; $f(n) = 5: 1$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. ~~из △ BDω~~
~~$\sin ABE =$~~
~~$\angle ABC = \alpha$~~
~~$\sin\alpha = \frac{2R-r}{17} \; 17 \; \frac{17}{2R-r} =$~~

3 из △ BDω

$\angle ABC = \alpha$

$\sin\alpha = \frac{r}{2R-r} = \frac{r}{\frac{R}{8}r} = \frac{8}{17}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{(17-8)(17+8)}{17^2}} = \frac{15}{17}$

4 из △ CBA

$\angle BAC = 90° - \alpha$

5 $\omega D \parallel AC$; (т.к $AC \perp BC$; $\omega D \perp BC$)

6 при $\omega D \parallel AC$ и секущей AD $\angle DAC = \angle AD\omega$

7 из △ $D\omega A$

$D\omega = A\omega = r \Rightarrow \angle \omega DA = \angle \omega AD$

8 из 6 и 7 $\angle \omega AD = \angle CAD = \frac{90° - \alpha}{2}$

9 $\angle ABE = \angle AFE$ (опир на $\smile EA$)

10 из △ ABE

$90° = \angle BEA$ (опир на D окр R) $\Rightarrow \angle EBA = 90° - \angle BAE = 90° - \frac{90° - \alpha}{2} =$

$= 45° - \frac{\alpha}{2} = 45° - \arcsin\left(\frac{8}{17}\right) \cdot \frac{1}{2}$

11 из △ ADC и △ EHD

$\angle ADC = \angle HDE$ (верт.)

△ ADC - прямоуг ; △ EHD - прямоуг

$\Rightarrow \angle HED = \angle DAC = \frac{90 - \alpha}{2}$

12 из △ FAD $\angle FAE = 180° - \frac{90-\alpha}{2} - 90 + \frac{90 - \alpha}{2} = 90° \Rightarrow \angle FAE$ опир на D окр R

13 из △ AFE

$S_{AFE} = 2R \cdot \sin\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) \cdot R \cdot \cos\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) = FA \cdot AE =$

$= R^2 \cdot \sin(90 - \alpha) = R^2 \cdot \cos\alpha = \frac{(85)^2}{6^2} \cdot \frac{15}{17} = \frac{17^2 \cdot 5^2 \cdot 15 5}{12\, 36 \cdot 17} = \frac{125 \cdot 17^2}{12} = \frac{2125}{12} = 177\frac{1}{12}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_0 = 11\cdot(7+2+1+1+1) = 11\cdot 12 = 132$

$S_1 = 7\cdot 5 = 35$

$S_2 = 2\cdot 3 = 6$

$S_3 = 1\cdot 2 = 2$

$S_4 = 1\cdot 1 = 1$

$S_{об} = 132+35+6+2+1 = 176$

Ответ: 176.

⑥

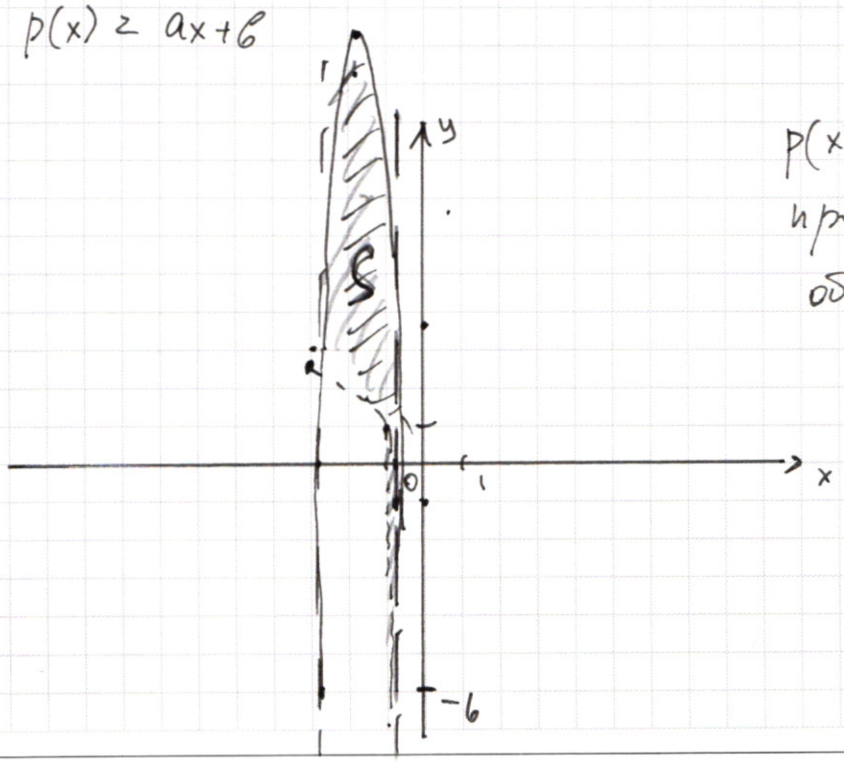
$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$f(x) = \frac{12x+4}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$ $f\left(-\frac{4}{4}\right) = \frac{22}{9}$; $f\left(-\frac{3}{4}\right) = \varnothing$

$g(x) = -8x^2-30x-17$ $x_0 = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$; $y_0 = 11\frac{1}{8}$ $g\left(-\frac{4}{4}\right) = -6$

$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$

$p(x) = ax+b$



$p(x)$ – прямая, вся прямая лежит в области S

$$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

$\times\ 17$
8
136

3-

$\times\ 15$
15
72
16
225

$\times\ 8$
$~~32~~$
17
$~~224~~$
32

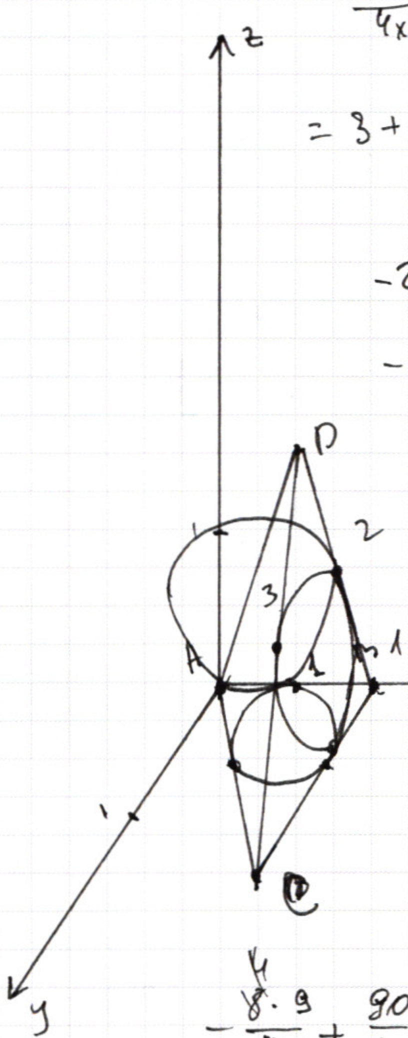
$-2\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4}$

$-8x^2-30x-17 = 8x^2+30x+17$

$D = 225-136 = \sqrt{89}$

$125-36 = 89$



$x = \frac{30 \pm \sqrt{89}}{-8} \approx \left[\begin{array}{l} -4{,}8 \\ - \end{array}\right.$

$x_0 = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8} = -1\frac{7}{8}$

$y_0 = -\frac{225}{8} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17$

$\frac{225}{8} - 17 =$

$= 28\frac{1}{8} - 17 = 1\frac{1}{8}$

$-\frac{121 \cdot 8}{16} + \frac{330 \cdot 4}{4} - 17 =$

$= ~~\frac{208}{4} - 17 = 52\frac{1}{4} - 17 =~~$

$~~-\frac{968 + 330}{4}~~ - 17 =$

$= -\frac{638}{4} - 17 = -15\ldots$

$-\frac{8 \cdot 9}{16} + \frac{90}{4} - 17 =$

$= -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 =$

$= 16 - 17$

$\frac{-968+1320}{16} - 17$

$\frac{352}{16} - 17$

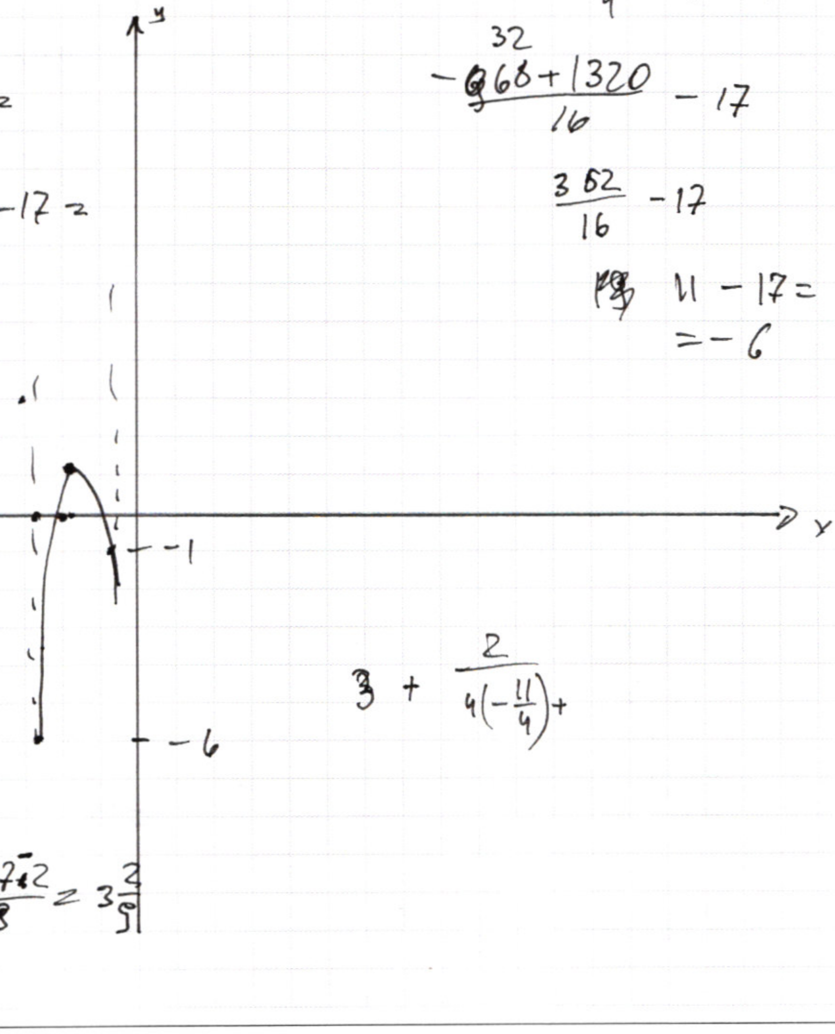
$11 - 17 =$

$= -6$

$\frac{12\left(-\frac{11}{4}\right)+11}{4 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right)+3} =$

$= \frac{-33+11}{-11+3} =$

$= \frac{-22}{-8} =$



$3 + \frac{2}{4\left(-\frac{11}{4}\right)+}$

$3 + \frac{2}{-11+3} = \frac{27+2}{9} = 3\frac{2}{9}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

$$\begin{cases} \frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \\ -8x^2-30x-17 \ge ax+b \end{cases}$$

Найти $(a;b)$, где $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

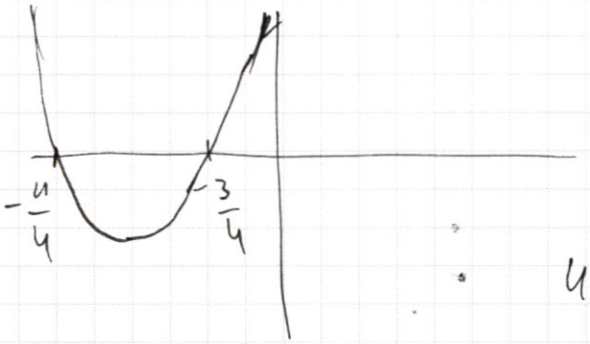
$$\begin{cases} 3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \\ 8x^2+30x+17 \le -ax-b \end{cases}$$

$$8x^2+x(30+a)+17+b \le 0$$

$$D = (30+a)^2-4(b+17)\cdot 8 = 900+60a+a^2-32b-544 =$$

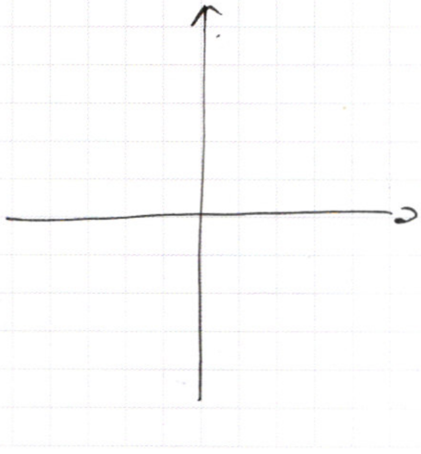
$$= 356+a^2+60a-32b$$

$\times\begin{array}{r}17\\32\end{array}$
34
51
544



$D = 9a^2+16b^2+144+24ab-72a-96b-48ab$

$4ax^2+x(3a+4b-12)+3b-11 \le 0$



$$\frac{12x+11-4ax^2-3ax-4bx-3b}{4x+3} \le 0$$

$$\frac{4ax^2+x(3a+4b-12)+3b-11}{4x+3} \ge 0$$

на $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right) \ge 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\angle ABC = \frac{2R-r}{} \quad \frac{r}{2R-r} = \alpha \Rightarrow \angle BAC = 90-\alpha \Rightarrow \angle BAE = \frac{90-\alpha}{2}$

$\angle ABE = \angle AFE = 90° - \frac{90-\alpha}{2} = 45° - \frac{\alpha}{2}$

$\sin\alpha = \frac{\cancel{17}\ 8 \cdot r}{} \quad \frac{r}{\frac{17}{8}r} = \frac{8}{17} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{8}{17}$

$\sin\left(\cancel{45°} - \frac{\alpha}{2}\right) = \quad \angle AFE = 45° - \arcsin\frac{8}{17}$

3) Через sin стороны и через $a \cdot b \cdot \sin$

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\sin(2\alpha + 4\beta - 2\beta)$

$\sin\alpha + \sin\beta$
$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$

$= \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + 2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)\cdot$
$\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)$

$\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin\beta\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} +$
$+ \sin\beta\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}$

α

из $\triangle AEB$

$AE = 2R\cdot\sin\angle$

$\angle FEA = \angle BAF$

$\angle ABE$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha =$

$=$

$125 \cdot 17$:
875
125
2125

$2125 : 12 = 177$
12
92
84
85
84
1

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $a; b \in \mathbb{R}$ $a; b > 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ для любых простых p

$1 \le x \le 24$

$1 \le y \le 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$x \in N$

$y \in N$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0;$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0;$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

~~$f(6) =$~~

$f(7) = 1$

$f(8) =$

1) т. к. любое непростое число a можно разложить на ~~$f(a_1) + f(b_1)$~~ a_1 и b_1, тогда $f(a) = f(a_1) + f(b_1) = 0$

функция f от любого непростого числа представляется как сумма f его простых множителей на степень этих множителей

Значит в конце $f(c) = k_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + k_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \dots k_n\left[\frac{p_n}{4}\right]$

7 $f(1{,}5)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)$ $\frac{x}{y}$ — не целое число

$f(\text{целого}) \ge 0$

$f(1) = \underset{=0}{f(0{,}5)} + \underset{=0}{f(2)} = 0$

$f(0{,}5) = 0$

$f(5) = 1 = f(2) + f(3{,}5) =$

$f(3) = f(1{,}5) + f(2) = 0$

~~$f(2) + f(3)$~~ $= f(4) + f(1{,}5) = f(2) + f(2) + f(1{,}5) = 0$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(1)=0$ $\quad f(5)=1$ $\quad f(13)=3$

$f(2)=0$ $\quad f(7)=1$ $\quad f(17)=4$

$f(3)=0$ $\quad f(11)=2$ $\quad f(19)=4$

$f(23)=5$

$f(5)=1=\overset{=0}{f(2)}+f(2,5)=1$

$f(2,5)=1$

$f(24)=3f(2^3)+f(3)=0$

Если меньше нуля, то

Мы можем разложить любое число, не любые

$f(5)=f$

сост.

$f(3)=0=f(5)+f\left(\frac{3}{5}\right)$ $\quad \overset{=1}{} \quad \overset{=-1}{}$; ~~котрр~~ составим все возможные такие комбинации, до

$f(3)=f(5)+\overset{-1}{f\left(\frac{3}{5}\right)}$ $\qquad f(13)+\overset{-3}{f\left(\frac{3}{13}\right)}$ $\qquad f\left(\frac{1}{24}\right)$

$f(7)+\overset{-1}{f\left(\frac{3}{7}\right)}$ $\qquad f(17)+\overset{-4}{f\left(\frac{3}{17}\right)}$

$f(11)+\overset{-2}{f\left(\frac{3}{11}\right)}$ $\qquad f(19)+f\left(\frac{3}{19}\right)$

$f($

Любое число, которое раскладывается в 0 $(f(a)=0)$, можно подставить вместо тройки

Если число раскладывается в 1; то работает только $f(11); f(13) \dots f(23)$

Если в 2; то $f(13) \dots f(23)$

Если в 4; то $f(23)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$ $tg\alpha \geq 3$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta-\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)$

$\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}>0 \Rightarrow \sin 2\alpha>0$

$\cos 2\beta \neq 0$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$

$\cancel{2}\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta=+\frac{\cancel{4}\,2}{5}$

$\cos 2\beta=+\frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\cos^2\beta}-1=tg^2\beta$

$2\cos^2\beta-1=-\frac{2}{\sqrt5}$

$2\cos^2\beta=\frac{\sqrt5-2}{\sqrt5}=\frac{5-2\sqrt5}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos^2\beta=\frac{5-2\sqrt5}{10}$

$+\frac{2}{\cancel{\sqrt5}}\sin 2\alpha\pm\frac{1}{\cancel{\sqrt5}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\cancel{\sqrt5}}$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$2\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-1$

$2\sin 2\alpha\pm(1-2\sin^2\alpha)=-1$

$\cancel{4}\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cancel{1}+2\sin^2\alpha=-\cancel{1}$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha-\sin\alpha)=0$

$tg\alpha=2$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1-2\sin^2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\sin^2\alpha+2=0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin^2\alpha+\underbrace{1}_{=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} \cdot \sin 2\alpha + \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2 \cdot 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha = -1 \quad |:2$

$2\cos\alpha \cdot \sin\alpha + \underbrace{1 - \sin^2\alpha}_{\cos^2\alpha} = 0$

$\cos\alpha(2\sin\alpha - \cos\alpha) = 0 \quad |:\cos\alpha$

$\cancel{tg\alpha = \frac{1}{2}}$

$\cos\alpha(2tg\alpha - 1) = 0$ при $\cos\alpha = 0$

$tg\alpha = \frac{1}{2}$ $tg\ \varnothing$

$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$4\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cancel{1} + 2\sin^2\alpha = -\cancel{1}$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \quad |:\cos\alpha \quad \cos\alpha \neq 0$

$\cancel{\sin\alpha =}$

$\sin\alpha(2 + tg\alpha) = 0$

$tg\alpha = -2$

Если $\sin\alpha = 0$, то $tg\alpha = 0$

Ответ: $\boxed{0; -2; \frac{1}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$y = \frac{1}{2}x$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \Rightarrow x \geq 2y \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$(x-2y)^2 = (y-1)(x-2)$

$6(x-2y)^2 = 6(x-1)(x-2)$

$\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} = \sqrt{(y-1)(x-2)} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 1 \\ x < 2 \end{cases} \end{array}\right.$

$x-2y = \sqrt{(y-1)(x-2)}$

$(x^2+9y^2+6xy)-6xy-4x-18y-12=0$

$x^2-4xy+4y^2 = xy-2y-x+2$

$x^2-5xy+4y^2+2y+x-2=0$

$(x+3y)^2 - 6y(x+3)-4(x+3)=0$

$\cancel{x^2+x-4\frac{1}{4}}$

$\underset{\geq 0}{(x+3y)^2} - \left[(x+3)\underset{\geq 0}{\left(y+\frac{4}{6}\right)}\cdot 6\right] = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -3 \\ y > -\frac{4}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3 \\ y < -\frac{4}{6} \end{cases} \end{array}\right.$

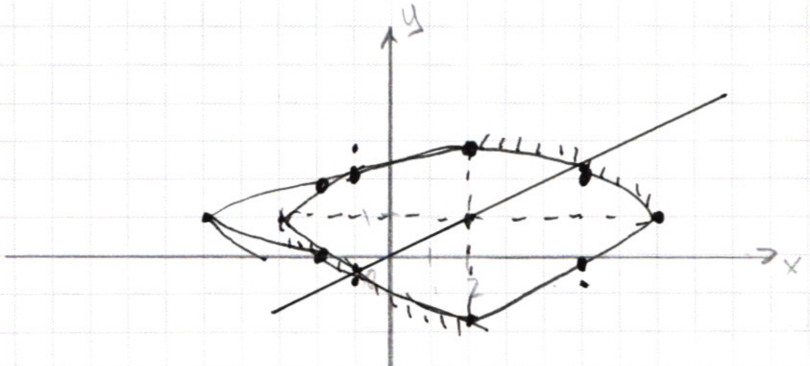
$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x+3y)^2 = (x+3)(6y-4) \end{cases}$$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9 = \overset{-13}{}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

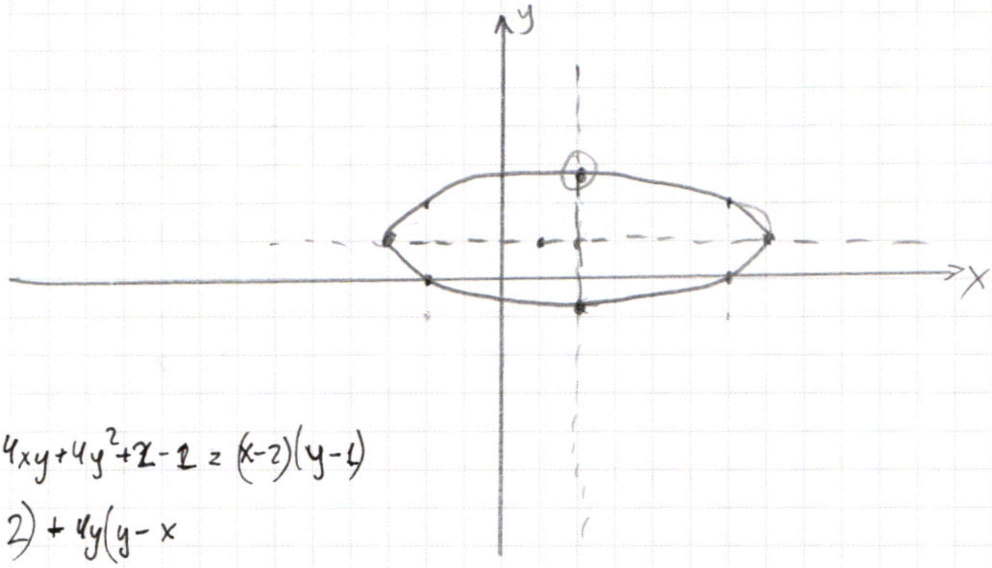
$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$(x-2+3y-3)^2 -$



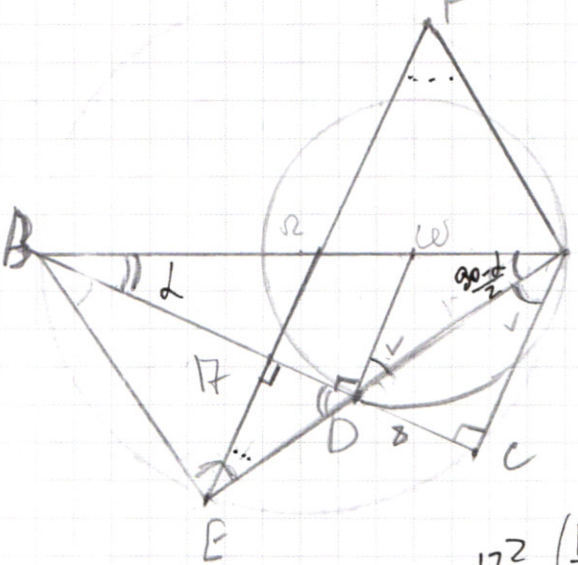
$x^2-4x+1+9(y^2-2y+1)=25$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$



$x^2-4xy+4y^2+2-2=(x-2)(y-1)$

$(x-2)+4y(y-x$



$CD=8$ Найти: $R; r$

$BD=17$ $\angle AFE$ и S_{AEF}

из $\triangle CBA$

$$\frac{17}{25}=\frac{B\omega}{BA}=\frac{2R-r}{2R}$$

$$\frac{17}{25}=\frac{2R-r}{2R}$$

$$17^2=\left(\frac{17}{8}-\frac{8}{8}\right)\left(\frac{25}{8}\right)r^2 \qquad \frac{r}{2R}=\frac{8}{25} \Rightarrow 2R=\frac{25}{8}r$$

из $\triangle BD\omega$

$$17^2+r^2=(2R-r)^2$$

$$17^2+r^2=\left(\frac{25}{8}r-r\right)^2=\left(\frac{17}{8}r\right)^2$$

$$r^2=\frac{8\cdot 8\cdot 17^2}{9\cdot 25} \qquad R=\frac{16}{25}=0{,}64$$

$$r=\frac{8\cdot 17}{3\cdot 5}=\frac{136}{15}=9\frac{1}{15} \Rightarrow R=\frac{16\cdot 136}{25\cdot 15}$$

$$\frac{136\cdot 25}{16\cdot 15}=\frac{170}{...}=\frac{85}{...}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)