МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$
выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$ $\quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$.

(2) $\Rightarrow -\frac{2}{17} = \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = \frac{\cos(4\beta) - \cos(4\alpha+4\beta)}{2}$

$\cos(4\beta) = -\frac{4}{17} + \frac{15}{17} = \frac{11}{17}$.

$\cos(4\alpha+4\beta) = 1 - 2\sin^2(2\alpha+2\beta) = 1 - 2\cdot\frac{1}{17} = \frac{15}{17}$.

$\cos 4\beta = 1 - 2\sin^2 2\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{3}{17}} \qquad \cos 2\beta = \pm\sqrt{\frac{14}{17}}$

	$\sin 2\beta$	$\cos 2\beta$	
1в.	$+\sqrt{\frac{3}{17}}$;	$+\sqrt{\frac{14}{17}}$	$\Rightarrow \sin 4\beta = \frac{2\sqrt{42}}{17}$
2в	$+\sqrt{\frac{3}{17}}$;	$-\sqrt{\frac{14}{17}}$	$\sin 4\beta = -\frac{2\sqrt{42}}{17}$
3в	$-\sqrt{\frac{3}{17}}$;	$+\sqrt{\frac{14}{17}}$	$\sin 4\beta = -\frac{2\sqrt{42}}{17}$
4в.	$-\sqrt{\frac{3}{17}}$;	$-\sqrt{\frac{14}{17}}$	$\sin 4\beta = +\frac{2\sqrt{42}}{17}$.

1в. $\begin{cases} \sqrt{14}\sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos 2\alpha = -1. \\ 11\sin 2\alpha + 2\sqrt{42}\cos 2\alpha = -2 \end{cases} \Bigg| \cdot 2\sqrt{14}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} 28\sin 2\alpha + 2\sqrt{42}\cos 2\alpha = -2\sqrt{14} \\ 11\sin 2\alpha + 2\sqrt{42}\cos 2\alpha = -2 \end{cases}$

$17\sin 2\alpha = -2\sqrt{14} + 2.$

$\sin 2\alpha = \frac{2-2\sqrt{14}}{17}.$

$\sqrt{3}\cos 2\alpha = -1 - \sqrt{14}\cdot\frac{2-2\sqrt{14}}{17} =$

$= \frac{-17 - 2\sqrt{14} + 28}{17} = \frac{11-2\sqrt{14}}{17}.$

$\cos 2\alpha = \frac{11-2\sqrt{14}}{17\sqrt{3}}$

$tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1} = \frac{2-2\sqrt{14}}{17} : \left(\frac{11-2\sqrt{14}}{17\sqrt{3}} + 1\right)$

$= \frac{2-2\sqrt{14}}{\cancel{17}} \cdot \frac{\cancel{17}\sqrt{3}}{11-2\sqrt{14}+17\sqrt{3}}$

1в. $tg_\alpha = \dfrac{2-2\sqrt{14}}{11-2\sqrt{14}+17\sqrt{3}}$

2в. $\begin{cases} -\sin 2\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{14}{17}} + \sqrt{\dfrac{3}{17}}\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha \cdot \dfrac{11}{17} - \dfrac{2\sqrt{42}}{17}\cos 2\alpha = -\dfrac{2}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} -\sqrt{14}\sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos 2\alpha = -1 \\ 11\sin 2\alpha - 2\sqrt{42}\cos 2\alpha = -2 \end{cases} \Bigg| 2\sqrt{14}$

$\begin{cases} -28\sin 2\alpha + 2\sqrt{42}\cos 2\alpha = -2\sqrt{14} \\ 11\sin 2\alpha - 2\sqrt{42}\cos 2\alpha = -2 \end{cases}$

$-17\sin 2\alpha = -2 + 2\sqrt{14}$ $\quad \sin 2\alpha = \dfrac{2+2\sqrt{14}}{17}$

$\sqrt{3}\cos 2\alpha = -1 + \dfrac{(2+2\sqrt{14})\sqrt{14}}{17} = \dfrac{-17+28+2\sqrt{14}}{17}$

$= \dfrac{11+2\sqrt{14}}{17}$

$\cos 2\alpha + 1 = \dfrac{11+2\sqrt{14}+17\sqrt{3}}{17\sqrt{3}}$

$tg_\alpha = \dfrac{2+2\sqrt{14}}{17} : \dfrac{(11+2\sqrt{14}+17\sqrt{3})}{17\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}(2+2\sqrt{14})}{11+2\sqrt{14}+17\sqrt{3}}$

3в. $\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{14}{17}} - \cos 2\alpha \sqrt{\dfrac{3}{17}} = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \dfrac{11}{17}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \dfrac{2\sqrt{42}}{17} = \dfrac{-2}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{14}\sin 2\alpha - \sqrt{3}\cos 2\alpha = -1 \\ 11\sin 2\alpha - 2\sqrt{42}\cos 2\alpha = -2 \end{cases}$

3в. очевидно что

$\sin 2\alpha_{3в} = \sin 2\alpha_{1в} = \dfrac{2-2\sqrt{14}}{17}$

$\cos 2\alpha = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{14}-28}{17}+1}{\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{2\sqrt{14}-11}{17\sqrt{3}}$

$\cos 2\alpha + 1 = \dfrac{2\sqrt{14}-11+17\sqrt{3}}{17\sqrt{3}}$

$tg_\alpha = \dfrac{2-2\sqrt{14}}{17} \cdot \dfrac{17\sqrt{3}}{2\sqrt{14}-11+17\sqrt{3}} = \dfrac{(2-2\sqrt{14})\sqrt{3}}{2\sqrt{14}-11+17\sqrt{3}}$

4в. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{14}{17}}\sin 2\alpha - \sqrt{\dfrac{3}{17}}\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha \cdot \dfrac{11}{17} + \cos 2\alpha \cdot \dfrac{2\sqrt{42}}{17} = -\dfrac{2}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} +\sqrt{14}\sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos 2\alpha = +1 \\ 11\sin 2\alpha + 2\sqrt{42}\cos 2\alpha = -2 \end{cases} \Bigg| 2\sqrt{14}$

$17\sin 2\alpha = 2\sqrt{14}+2$

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\sqrt{14}+2}{17}$

$\sqrt{3}\cos 2\alpha = 1 - \dfrac{28+2\sqrt{14}}{17} = \dfrac{-11-2\sqrt{14}}{17}$

$\cos 2\alpha + 1 = \dfrac{-11-2\sqrt{14}+17\sqrt{3}}{17\sqrt{3}}$

$tg_\alpha = \dfrac{(2\sqrt{14}+2)\sqrt{3}}{17\sqrt{3}-11-2\sqrt{14}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

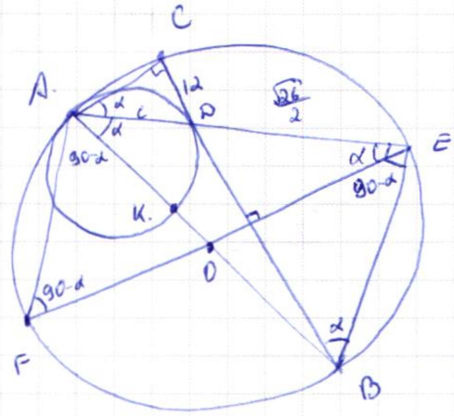
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$CD = 12$

$BD = 13$

Согласно лемме Архимеда

$\angle CAD = \angle DAB = \angle CBE$

AB диаметр $\Rightarrow \angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$

$AD = L \Rightarrow AC = \sqrt{L^2 - 144}$

$AB = \sqrt{L^2 - 144 + 625} = \sqrt{L^2 + 481}$

согласно свойству биссектрисы

$\frac{\sqrt{L^2+481}}{\sqrt{L^2-144}} = \frac{13}{12}$ $\quad (L^2+481)144 = 169L^2 + 169 \cdot 144$

$25L^2 = 481 \cdot 144 + 169 \cdot 144$

$25L^2 = 144 \cdot 650$

$L = \frac{12}{5}\sqrt{650} = 12\sqrt{26}$

$AB = 5 \cdot 13 = 65 = \sqrt{4225} \Leftarrow$

$DE \cdot AD = 12 \cdot 13$

$\cancel{12\sqrt{26} \cdot DE = 12 \cdot 13}$

$12\sqrt{26} \cdot DE = 12 \cdot 13$

$DE = \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2} \Rightarrow AE = 12{,}5 \cdot \sqrt{26}$

~~AB~~

R = радиус Ω

r = радиус $\triangle DK(\omega)$

$\angle ADK = 90^\circ$ (AK диаметр) $\Rightarrow \triangle ADK \sim \triangle AEB$

$\frac{AD}{AK} = \frac{AE}{AB}$ $\quad AK = \frac{AD \cdot AB}{AE} = \frac{12\sqrt{26} \cdot 65}{12{,}5\sqrt{26}} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 65}{25} = \frac{312}{5} = 2r$

$AB = 2R = 65$ $\quad R = \frac{65}{2}$ $\quad r = \frac{156}{5}$

$BE = \sqrt{13^2 - \frac{26}{4}} = \sqrt{169 - \frac{13}{2}} = \sqrt{13 \cdot 12{,}5} = \sqrt{\frac{13}{2}} \cdot 5 = \frac{5\sqrt{26}}{2} = 13 \cdot \cos\alpha$. $\quad \cos\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{13 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{26}}{26} = \sin(90-\alpha)$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{26}}{2 \cdot 13} = \frac{1}{\sqrt{26}} = \sin(AEF) \Rightarrow AEF = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

заметим, что $\angle FAB = 90 - \alpha$ $\angle BAE = \alpha \Rightarrow \angle FAE = 90^\circ \Rightarrow FE = 2R = AB = 65.$

$$S_{AEF} = \sin\alpha \cdot \frac{AE \cdot EF}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{26}} \cdot 12{,}5 \cdot \sqrt{26} \cdot 65}{2} = \frac{65 \cdot 25}{4} = \frac{1625}{4}$$

Ответ $r = \frac{156}{5}$; $R = \frac{65}{2}$; $\angle AEF = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

$(AEF) = \frac{1625}{4}$

5.

$a; b \in \mathbb{Z}_+$

$f(ab) = f(a) + f(b).$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ если p - простое.

$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$

$f(1) = \cancel{f(1)} = f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a).$

$f(1) = 0$ $f(2) = 0$ $f(3) = 0$ $f(4) = 2f(2) = 0$; $f(5) = 1$; $f(6) = 0$; $f(7) = 1$; $f(8) = 0$; $f(9) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$; $f(11) = 2$; $f(12) = 0$; $f(13) = 3$; $f(14) = 1$; $f(15) = 1$ $f(16) = 0$; $f(17) = 4$

$f(18) = 0$; $f(19) = 4$; $f(20) = 1$; $f(21) = 1$; $f(22) = 2$; $f(23) = 5$; $f(24) = 0$;

$f(25) = 2$; $f(26) = 3$; $f(27) = 0$; $f(28) = 1$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0.$$

$4 \le x \le 28$
$4 \le y \le 28$

0 $A = \{4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 27\}$ - 9

1 $B = \{5; 7; 10; 14; 15; 20; 21; 28\}$. 8

2 $C = \{11; 22; 25\}$ 3

3 $D = \{13; 26\}$. 2

4 $E = \{17; 19\}$. 2

5 $F = \{23\}$. 1.

1в. $x \in A$ $f(x) = 0. \Rightarrow y \in B \cup C \cup D \cup E \cup F$
$9 \cdot 16$

2в. $x \in B \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow y \in C \cup D \cup E \cup F$
$8 \cdot 8 = 64$

3в $x \in C$ $f(x) = 2 \Rightarrow y \in D \cup E \cup F$
$3 \cdot 5 = 15$

4в. $x \in D \Rightarrow y \in E \cup F$
$2 \cdot 3 = 6$

5в $x \in E$ $y \in F \Rightarrow 2$;

6в. $x \in F$ $y \in \varnothing$
0.

Ответ $144 + 64 + 15 + 6 + 2 = 231.$

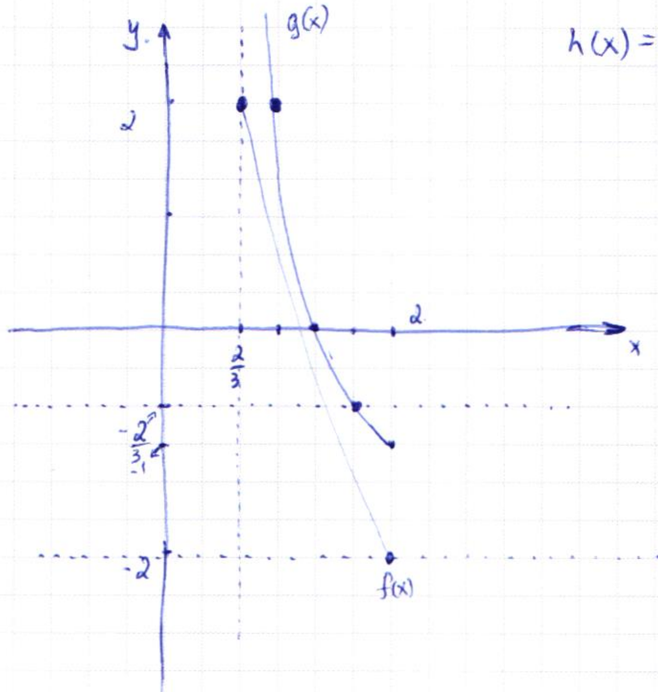
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



$h(x) = ax+b.$

$g(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$g(\frac{2}{3}) = +\infty$

$g(1) = 2$

$g(\frac{4}{3}) = 0$

$g(\frac{5}{3}) = -\frac{2}{3}$

$g(2) = -1$

$f(x) = 18x^2 - 51x + 28$

$f(2) = -2$

$f(\frac{2}{3}) = 2$

очевидно, что график $ax+b$ стоит выше $18x^2-51x+28$;

или же выше линии соединяющую $f(2)$ и $f(\frac{2}{3})$ ($f(x)$ монотонен в $(\frac{2}{3}; 2]$

есть две крайние случи, 1. когда $h(x)$ проходит через $(\frac{2}{3}; 2)$ и касается $g(x)$; и 2. когда проходит через $(2;-2)$ и касается $g(x)$, все промежуточные линии удовлетворяют условиям задачи.

1 вариант $\frac{2}{3}a + b = 2.$ $b = 2 - \frac{2}{3}a$ $g'(x) = -4 \cdot \frac{1}{(3x-2)^2} \cdot 3 = -\frac{12}{(3x-2)^2}$ $h(x)$ касается $g(x)$ в x_0.

$-(x-x_0)\frac{12}{(3x_0-2)^2} + \frac{4}{3x_0-2} - 2 =$

заметим, что уровнение линии проходящую через $(2;-2)$ и $(\frac{2}{3}; 2)$ ~~из~~ $= -3x+4.$

заметим так же, что $3x-4 = \frac{8-6x}{3x-2} \iff (3x-2)(-3x+4) = 8-6x$ $\Updownarrow$ $(3x-4)^2 = 0$

$-3x+4$ касается $g(x)$ $\Leftarrow$ имеет 1 решений $\Leftarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~сли~~ От факта касания => что единственная линия удовлетворяющая условиям и есть $-3x+4$. $\Rightarrow a=-3$ $b=4$
в

Ответ $a=-3$
$b=4.$

2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$y-6x \geq 0$

$$\begin{cases} y^2+36x^2-12xy=xy-6x-y+6 \\ 9x^2-18x+\cancel{36}^{9}+y^2-12x+36=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+y+36x^2+6x-13xy=6 \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

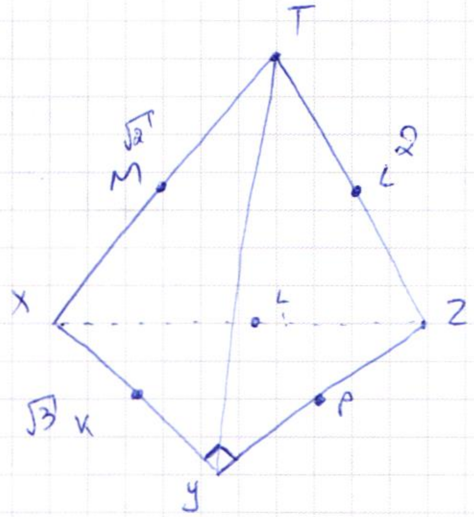
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.



$XY = \sqrt{3}$

$TX = \sqrt{2}$

$TZ = 2$

заметим, что $KLPY \in$ ~~α~~ сферу

$\in \alpha_{XYZ}$

⇓

через $KLPY$ проходит

окружность

⇓

$\angle Y + \angle KLP = 180°$

$\angle KLP = 180 - \angle XLK - \angle PLZ = 180 - \angle X - \angle Z = \angle XYZ$

⇓

$\angle XYZ + \angle XYZ = 180° \Rightarrow \angle XYZ = 90°$

заметим, что $MK \parallel TY \parallel LP \Rightarrow MK \parallel LP$ $\Rightarrow$ $MLPK$ на одной плоскости $MK = LP = \frac{TY}{2}$

$ML \parallel XZ \parallel KP$ $ML = KP = \frac{XZ}{2}$, ~~заметим, что~~

⇓

$MLPK$ параллелограм, и через

$TY \perp XZ$. $XZ = TY$ $\Leftarrow$ ~~$ML = LP$~~ $MLPK$ квадрат $\Leftarrow$ $MLPK$ проходит окружность

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\log_5(26x-x^2) \Longrightarrow 26x-x^2>0$

$\Downarrow$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|x^2-26x| = 26x-x^2$

$\Downarrow$

$x(26-x)>0$

$x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty)$

$12^{\log_5(26x-x^2)}-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq x^2-26x$

$-x^2+26x=t.$

$t\geq 0$

$12^{\log_5 t}-13^{\log_5 t} \geq -t$

$t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13} \geq -t$

~~$t^{\log_5 12-\log_5}$~~

$t^{\log_5 12}\left(1-t^{\log_5 13-\log_5 12}\right)$ ~~$= t^{\log_5 12}\left(1-t^{\log_5 1}\right) = t^{\log_5 12}\cdot(1-t)\geq -t$~~

~~$t^{\log_5 12}(1-t)+t\geq 0.$~~

~~$t\left(t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 12}+1\right)\geq 0$~~

$t\geq 0$

~~$\Downarrow$~~

~~$t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 12}+1\geq 0$~~

$= t^{\log_5 12}\left(1-t^{\log_5 \frac{13}{12}}\right) \geq -t$

$t\geq 0$

$t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}+t = t\left(t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 13-1}+1\right)\geq 0$

$\Downarrow$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}}-t^{\log_5 \frac{13}{5}}+1\geq 0$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}}+1\geq t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

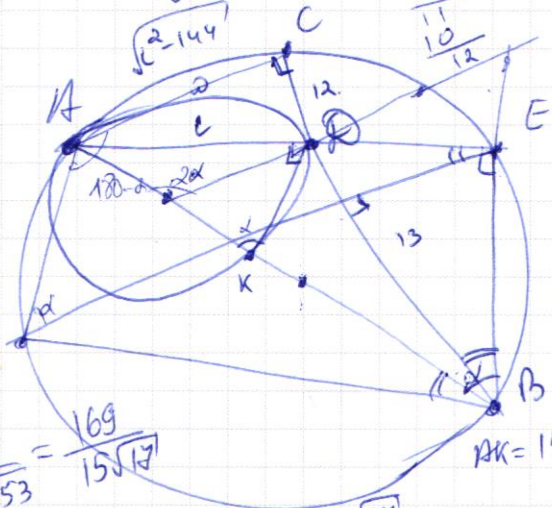
$(y^2-12y+36)+(9x^2-18x+9)=90$

$(y-6)^2+(3x-3)^2=90$

$144\cdot26=864+288=3744$; $3744+81=3825$; $3825:25=153$

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26\geq x^{\log_5(26x-x^2)}+13^{\log_5(26x-x^2)}$

4.



$R_{оп}$; $R_{впис}$ – ?

$\angle AFE$ – ? $S(AEF)$ – ?

$CD=12$ $BD=13$

$x\cdot12\sqrt{26}=13\cdot12$

$x=\frac{13}{\sqrt{26}}$

$x=\sqrt{\frac{13}{2}}$

$DK\parallel BE$

$AC\parallel FE$

$\frac{AK}{AB}=\frac{r}{R}=\frac{AD}{AE}$

$AB\cdot KB=169$

$KB=\frac{169}{5\sqrt{153}}=\frac{169}{15\sqrt{17}}$

$AK=15\sqrt{17}-\frac{169}{15\sqrt{17}}$

$AB=15\sqrt{17}$

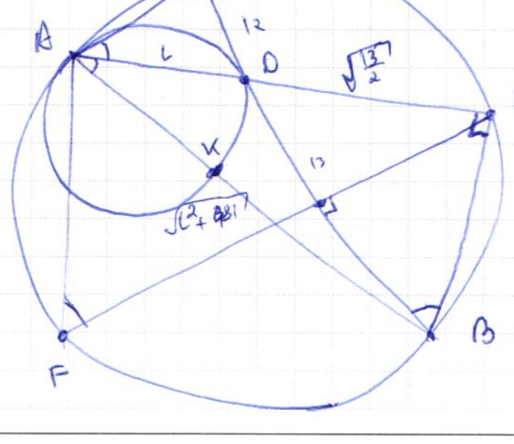
$\sqrt{l^2+625-144}=AB$

$AK=\frac{3656}{15\sqrt{17}}$

$l^2\cdot25=144\cdot650$

$l^2=\sqrt{26}\cdot12$

$l^2=144\cdot26$



$3825-169=3656$

$\frac{\sqrt{l^2-144}}{12}=\frac{\sqrt{l^2+381}}{13}$

$\frac{l^2-144}{144}=\frac{l^2+381}{169}$

$l^2\cdot25=144\cdot$

$l^2\cdot169-169\cdot144=l^2\cdot144+381\cdot144$

$l^2(169-144)=144\cdot(381+169)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

6.

5. $a; b \in \mathbb{Z}_+$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$. p - простч.

$4 \le x \le 28$. $4 \le y \le 28$ $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$y = \frac{1}{b}$ $x = a$. $\frac{x}{y} = a \cdot b$.

$f(ab) = f(a) + f(b) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$0 = f\left(7 \cdot \frac{1}{7}\right) = f\left(\frac{1}{7}\right) + f(7) =$

$f(7) = -f\left(\frac{1}{7}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$9 \cdot 16$

$(3 \cdot 4)^2 = 144$

$144 + 64 + 15 + 6 + 2$

$2601 - 2016$

$601 - 16 = 585$

$208 + 23 = 211 + 20 = 231$.

$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

$f(2) = \cancel{f(1) + f(2)} \left[\frac{2}{4}\right] = 0$.

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$ $18 + 15 = 33$.

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$.

$x; y - \in \mathbb{N}$.

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$.

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$.

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$72 \cdot 28 =$ $f(13) = 3$.

$= (100-28)28 = 2800 - 28^2 = 2016$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(27) = 0$

$f(28) = 1$.

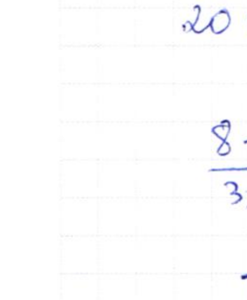
$D = 51^2 - 4 \cdot 18 \cdot 28 = \boxed{585}$

$(30-2)^2 = 900 - 2 \cdot 2 \cdot 30 + 4 =$
$= 900 - 120 + 4 = 784$.

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$ при $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2 \geq ax + b$ $4 > 3x - 2 > 0$ $2a + b \le -1$

$\frac{28}{22}$



$\frac{51 \pm \sqrt{585}}{36} = \frac{17 \pm \sqrt{65}}{12}$

$\frac{17 + \sqrt{65}}{12} < \frac{17+8}{12} < 2$.

$2800 - 784 = 2016$

$585 : 5 = 117$

$117 : 9 = 13$

$\frac{2}{3} < \frac{17 - \sqrt{65}}{12}$ $8 < 17 - \sqrt{65}$

$8 + \sqrt{65} < 17$ ✓.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

(1) $\cos 4\beta = 1 - 2\sin^2 2\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$tg\,\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$

$\cos 2\beta + 1 = 2\cos^2\beta$

$(2 + 2\sqrt{14})^2 = 4 + \cancel{2}\overset{4}{}8 + 2\cdot2\cdot2\sqrt{14} =$

$= 36 + 8\sqrt{14} =$

$\cancel{= 8(4+\sqrt{14})}$

$\frac{11}{17} = 1 - 2\sin^2 2\beta$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$2\sin^2 2\beta = 1 - \frac{11}{17} = \frac{6}{17}$

$2\cos^2 2\beta = \frac{11}{17} + 1 = \frac{11+17}{17} = \frac{28}{17}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{3}{17}}$

$\cos^2 2\beta = \frac{14}{17}$ $\cos 2\beta = \pm\sqrt{\frac{14}{17}}$

$\sin 2\beta$ $\cos 2\beta$

1в. $+\sqrt{\frac{3}{17}}$; $+\sqrt{\frac{14}{17}}$ $\Rightarrow \sin 4\beta = \frac{2\sqrt{42}}{17}$

1в. $\sin 2\alpha\cdot\sqrt{\frac{14}{17}} + \cos 2\alpha\sqrt{\frac{3}{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

2в $+\sqrt{\frac{3}{17}}$; $-\sqrt{\frac{14}{17}}$ $-$

3в $-\sqrt{\frac{3}{17}}$; $+\sqrt{\frac{14}{17}}$ $-$

$\frac{4\cancel{x}}{\cancel{3x-2}} - 2$

$x = \cancel{2}\cdot\frac{2}{3}$

$\begin{cases} \sin 2\alpha\sqrt{14} + \sqrt{3}\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha\cdot\frac{11}{\cancel{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt{42}}{\cancel{17}} = -\frac{2}{\cancel{17}} \end{cases}$

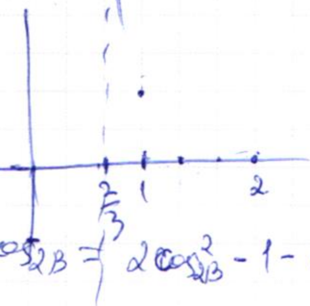
4в $-\sqrt{\frac{3}{17}}$; $-\sqrt{\frac{14}{17}}$ $+$

$\frac{4}{4} - 2 = -1$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} =$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$= -2 + \frac{4}{3x-2}$



$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 4\beta - \cos 2\beta = 2\cos^2 2\beta - 1 - \cos 2\beta$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = \overset{2}{18}\cdot\frac{4}{\cancel{9}} - \overset{17}{51}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} + 28 = 8 - 34 + 28 =$

$= 2$

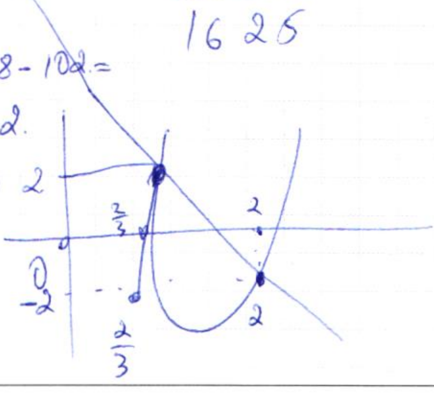
$\begin{array}{r} 65 \\ 25 \\ \hline 325 \\ 130 \\ \hline 1625 \end{array}$

$36{,}56 \,|\, 4$ — $9\,1\,4$; 36, 5, 4, 16

$g(2) = 18\cdot4 - 51\cdot2 + 28 = 72 + 28 - 102 =$

$= -2.$

$\frac{\cancel{4}}{3}$ $-2 + \frac{4}{2} = 0$



$914 \,|\, 4$; 22 ; 8 ; 11 ; 8 ; $3\,4$

$-2 + \frac{4}{5-2} =$

$= \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-9x^2+12x+6x-8=8-6x.$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $(3x-4)^2=0$

$b-2=2$ $b=4$

$-9x^2+24x-16=0$ $3\cdot4\cdot2$

$9x^2-24x+16=0$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\left(\frac{2}{3};2\right)$ $(2;-2)$

$\cancel{ax+b}$ $\frac{2}{3}a+b=2$ $\frac{4}{3}a=-4$

$2a+b=-2$ $\boxed{a=-3}$ $b=4$

$\sin 2\alpha\left(\cos 4\beta+2\cos 2\beta\cos 2\alpha+1\right)=-\frac{2}{17}$

$\cos 4\beta=2\cos^2 2\beta-1.$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\left(2\cos^2 2\beta+2\cos 2\beta\cos 2\alpha\right)=-\frac{2}{17}\\ \sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta\left(\cos 2\beta+\cos 2\alpha\right)=-\frac{1}{17}\\ \sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$$

$-3x+4=\frac{8-6x}{3x-2}$

$144+12=156\cdot2=312.$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\cancel{\sin(2^2\beta)=}$

$(3x-2)(-3x+4)=8-6x$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$

$-\frac{2}{17}=\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\frac{\cos(4\beta)-\cos(4\alpha+4\beta)}{2}.$

$\cos(4\beta)=-\frac{4}{17}+\cos(4\alpha+4\beta)=$

$=-\frac{4}{17}+\frac{15}{17}=\boxed{\frac{11}{17}}$

$\cos(4\alpha+4\beta)=1-2\sin^2(2\alpha+2\beta)=1-2\cdot\frac{1}{17}=\boxed{\frac{15}{17}}$

$\sin 4\beta=\pm\sqrt{\frac{168}{17}}$

$289-121=168$

$\cancel{168|17}$

$168|4$, 16, 42, 8

$3744+481=4225$

$4225|25=169$, 25, 172, 150, 225

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)