МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№2}$. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$ ~~ограничения:~~

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ (x-2)^2-4+9(y-1)^2-9=12. \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$

Пусть $x-2=a \Rightarrow x=a+2$

$y-1=b, \Rightarrow y=b+1$

тогда $x-2y=a+2-2b-2=a-2b.$

Система имеет след. вид:

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} & (1) \\ a^2+9b^2=25 & (2) \end{cases}$

(1): ~~воз~~ $a-2b=\sqrt{ab}$

$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a\geq 2b \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab & (3) \\ a\geq 2b & (4) \end{cases}$

(3): $a^2-5ab+4b^2=0$

решим как квадратное относительно a.

$\left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right.$

Исходя из ограничения (4):

$a=b \Rightarrow b\geq 2b \quad b\leq 0.$

$a=4b \quad 4b\geq 2b \quad b\geq 0.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

т.е. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=b \\ b\le 0 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} a=4b \\ b\ge 0 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$

(г): решаем для условия (I).

$b^2+9b^2=25.$

$b^2=\frac{25}{10}>0 \Rightarrow$ не подходит.

решаем для условия (II):

$16b^2+9b^2=25.$

$\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \text{ - не подх.} \end{array}\right.$

Если $b=1$, то $a=4$.

$\begin{cases} x-2=4 \\ y=1+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

Ответ: $(6;2)$.

$\boxed{№3}$. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

Ограничение: $x^2+18x>0$. тогда $|x^2+18x|=x^2+18x$.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\geq(x^2+18x)^{\log_{12}13}$

Пусть $t=x^2+18x$, $t>0$.

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}\geq 13^{\log_{12}t} \quad \Big| : 13^{\log_{12}t}>0.$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t}\geq 1$

Введем $f(z)=\left(\frac{5}{12}\right)^z+\left(\frac{12}{13}\right)^z$.

Заметим, что $f(2)=\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1.$

~~Если~~ При $z<2$ $f(z)>1$

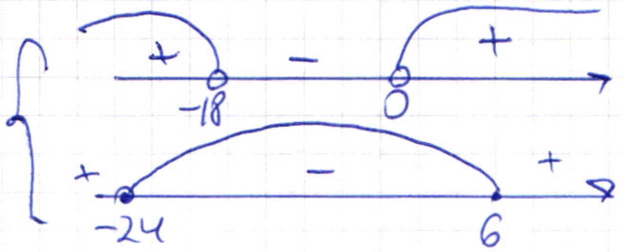
$z>2$ $f(z)<1.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит, $\log_{12} t \le 2$.

$t \le 144$.

$\begin{cases} t>0 \\ t\le 144 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x\le 144 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+18)>0 \\ (x-6)(x+24)\le 0 \end{cases}$



Ответ: $[-24;-18)\cup(0,6]$.

№6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$. $(a;b)$? верно для всех $[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}]$.

$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$

$g(x) = -8x^2-30x-17$ – парабола, ветви вниз

$x_B = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$.

$y_B = -8\cdot\frac{225}{64}+\frac{30\cdot 15}{8}-17 = \frac{225}{8}-17 = \frac{89}{8}$.

$f(-1) = 3+\frac{2}{-1} = 1$

$f(-2) = 3+\frac{2}{-5} = 2,6$

$f(-\frac{11}{4}) = 3+\frac{2}{-8} = 3-\frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

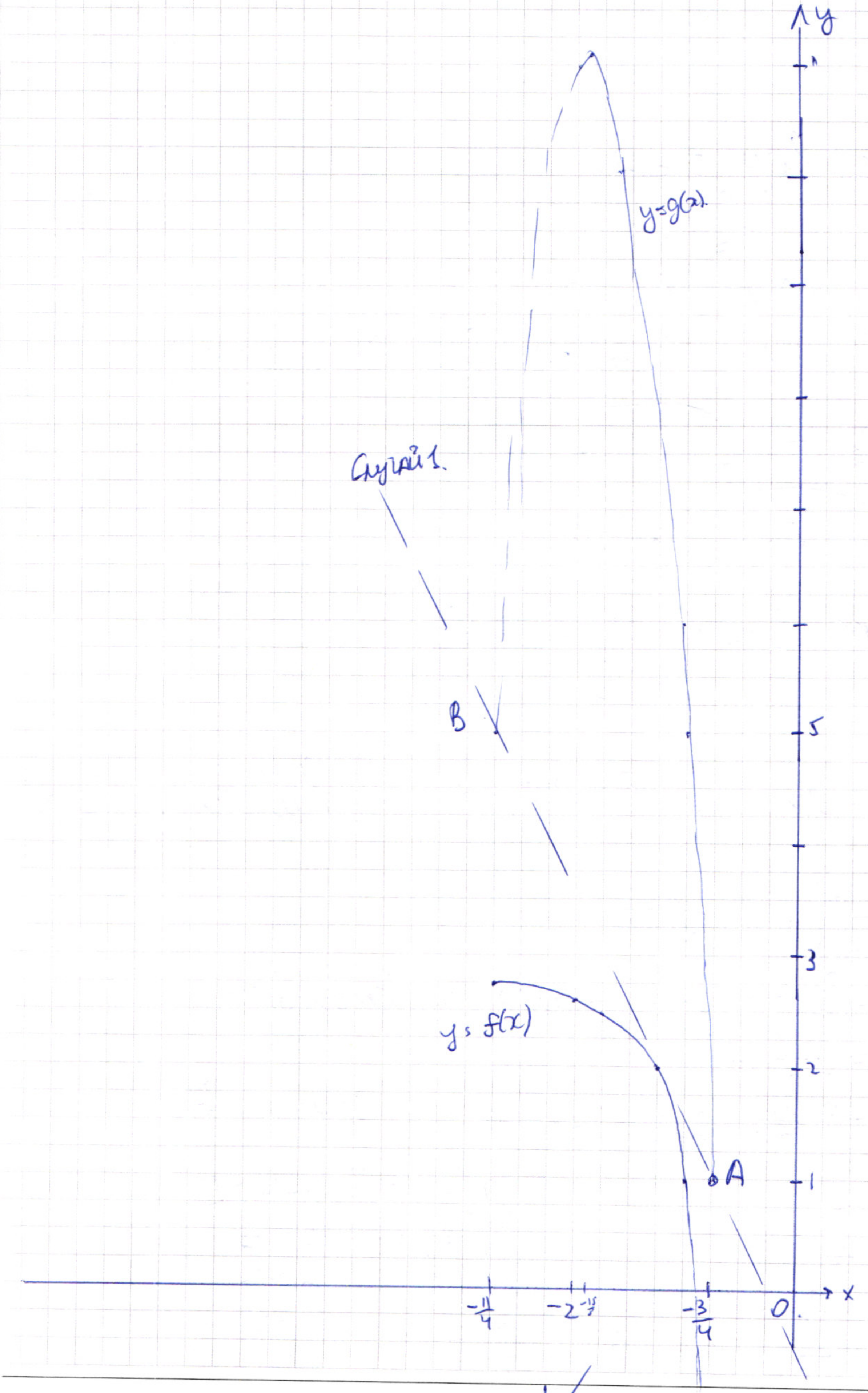
$f(-\frac{3}{2}) = 3+\frac{2}{4\cdot(-\frac{3}{2})+3} = 3-\frac{2}{3} = \frac{7}{3}$.

$g(-1) = -8+30-17 = 5$

$g(-\frac{3}{4}) = -8\cdot\frac{9}{16}+\frac{30\cdot 3}{4}-17 = 1$

$g(-2) = -8\cdot 4+60-17 = 11$

$g(-\frac{11}{4}) = -8\cdot\frac{121}{16}+\frac{30\cdot 11}{4}-17 = 5$



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Случай 1: $h(x)=ax+b$ проходит через $A(-\frac{3}{4};1)$ $B(-\frac{11}{4};5)$.

$$\ominus\begin{cases} -\frac{3}{4}a+b=1 \\ -\frac{11}{4}a+b=5 \end{cases}$$

$2a=-4$

$a=-2.$

$b=1+\frac{3}{4}a=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}.$

При этом b. нам подходят ~~...~~ a, до тех пор, пока $h(x)$ не будет касаться $f(x)$.

Касание: $\begin{cases} h(x_0)=f(x_0) \\ h(x_0)'=f(x_0)' \end{cases}$

$$\begin{cases} ax_0 - \frac{1}{2} = 3+\frac{2}{4x_0+3} \\ a = -\frac{2}{(4x_0+3)^2} \end{cases}$$

$$-\frac{2x_0}{(4x_0+3)^2}-\frac{1}{2}=3+\frac{2}{4x_0+3} \quad \Big| \cdot 2(4x_0+3)^2 \neq 0$$

$-4x_0-(4x_0+3)^2=6(4x_0+3)^2+4(4x_0+3).$

$7(4x_0+3)^2+4(4x_0+3)+4x_0=0.$

$7(16x_0^2+24x_0+9)+16x_0+12+4x_0=0.$

$112x_0^2+168x_0+63+16x_0+12+4x_0=0.$

$112x_0^2+196x_0+75=0.$

Найдя x_0, подставим его в $h(x_0)=ax_0-\frac{1}{2}$ и найдем крайнее зн-ие a для $b=-\frac{1}{2}$.

№5. $f(2)=f(3)=0$.

$f(5)=f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=f(15)=3$

$f(17)=f(19)=4$

$f(23)=5$.

$f(2)=f(1)+f(2) \Rightarrow f(1)=0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

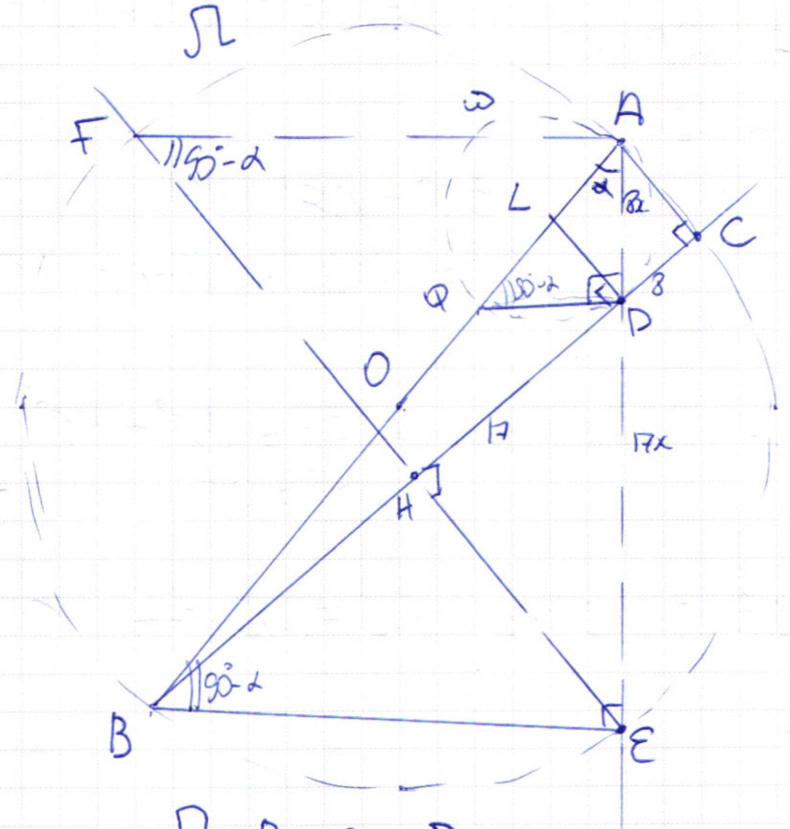
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№4}$



Пусть радиус Ω R, а $\omega - r$.

BC касается $\omega \Rightarrow LD = r \perp BC$ ($\angle LDB = 90°$)

$\angle ACB = 90°$ т.к. опирается на диаметр AB

$\angle ABC$ - общий

} по двум углам $\Rightarrow$ ~~$\Delta ALD \sim \Delta$~~ $\Delta BLD \sim \Delta BAC$.

тогда $\dfrac{AB}{BL} = \dfrac{CB}{DB}$.

$\dfrac{2R}{2R-r} = \dfrac{25}{17}$

$34R = 50R - 25r$

$16R = 25r$

$\dfrac{R}{r} = \dfrac{25}{16}$.

Пусть $AB \cap \omega = Q$.

AQ - диаметр $\omega \Rightarrow \angle ADQ = 90°$ опир. на диаметр.

$\angle AEB = 90°$ опир. на диаметр Ω

Тогда по двум углам $\Delta ADQ \sim \Delta AEB$:

$\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{AD}{DE}$; $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DC}{DB}$, как отрезки пересек. хорд.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{AD}{AB} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R} = \frac{AD}{AD+DE}$.

$\frac{r}{R} = \frac{8}{25}$

в $\triangle AQD$: пусть $\angle QAD = \alpha$.

$AD = 2r \cdot \cos\alpha$

в $\triangle ABE$ ~~$\triangle$~~ $AE = 2R\cos\alpha$ $\quad \Rightarrow DE = 2\cos\alpha\,(R-r)$.

$BE = 2R\sin\alpha$.

$\triangle BDE$: т. Пифагора $BD^2 = DE^2 + BE^2$.

$17^2 = 4\cos^2\alpha\,(R-r)^2 + 4R^2\sin^2\alpha$

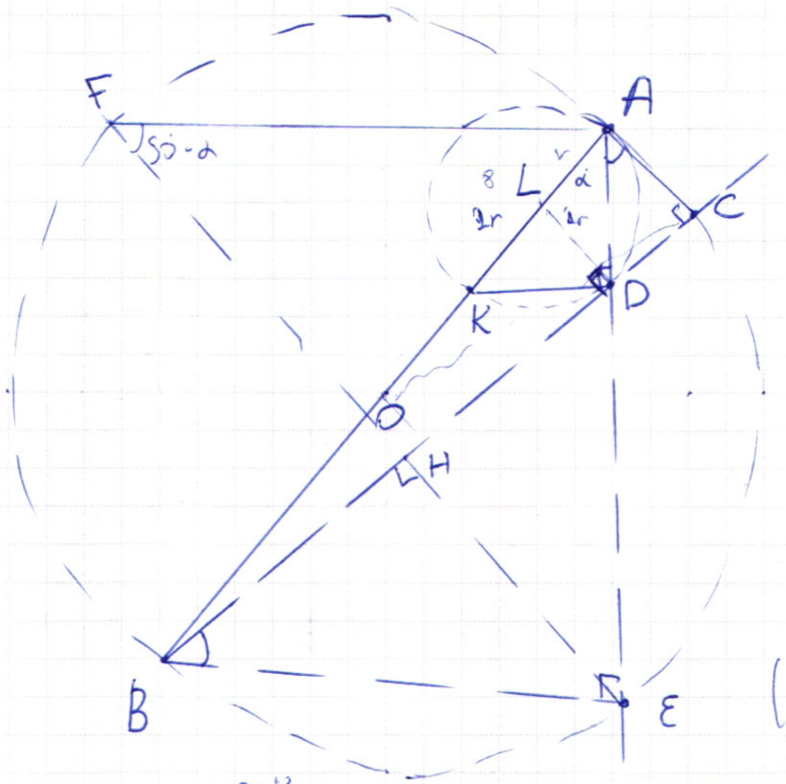
$\angle AFE = 90° - \alpha$.

Из $\triangle ABC$ по т. Пифагора $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

$4R^2 = 25^2 + AC^2$.

Из подобия $\triangle BLD$ и $\triangle BAC$ $AC = LD \cdot \frac{25}{17} = r \cdot \frac{25}{17}$.

4



R r

$\angle AFE$?

S_{AEF}?

CD = 8

BD = 17.

$\triangle ABE$ – п/у

$\triangle ACB$ – п/у

$\triangle ADK$ – п/у

$\triangle AKD \sim \triangle ABE$ $k = \frac{8}{25}$

$\angle AFE = 50° - \alpha$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{BD}{BD+CD}$$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25}$$

$34R = 50R - 25r$

$25r = 16R$

$\frac{R}{r} = \frac{25}{8}$

$R = \frac{25}{8}r$

$\triangle ABE$: Т.sin $2R =$

$AD = 2r\sin\alpha$

$DE = 2\cos\alpha(R-r)$

$BE = 2\sin\alpha(R-r)$

$BD^2 = 4(R-r)^2$

$17^2 = 4\cdot\frac{17^2}{8^2}r^2$

$\frac{64}{4} = r^2$

$r = 4$

$R = \frac{25}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Д7. $f(ab) = f(a)+f(b)$. $f(\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3})+f(1)$

$f(p) = [p/4]$. $f(\frac{1}{x}) = f(y)$ $f(\frac{x}{y}) = f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(2) = [\frac{1}{2}] = 0$. $f(\frac{5}{6}) = f(5)+f(\frac{1}{6})$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$. $f(xy) = f(x)+f(y)$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$ $f(\frac{x}{y}) = f(xy^{-1}) = f(x)+f(\frac{1}{y}) < 0$.

$f(7) = 1$ $f(\frac{2}{5}) = f(2)+f(\frac{1}{5}) = 0 + f(\frac{1}{5}) =$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$. $f(1\cdot 5) = f(1)+\underbrace{f(5)}_{=1} = 1$

$f(1) = 0$.

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$ $f(4) = f(2)+f(2) = 0$.

$f(23) = 5$. $f(6) = 0$.

$f(8) = 0$. $x=2$ $y=5$

$f(9) = 0$ $f(10) = f(2)+f(5)$

$f(10) = 1$. $f(\frac{2}{5}) = f(2)+f(\frac{1}{5})$

$f(24) = 0$. $f(xy) = f(x)+f(y)$

$f(\frac{24}{4}) = f(6) = 0$. $f(\frac{x}{y}) = f(x)+f(\frac{1}{y})$.

$f(\frac{1}{2}) = f(1)+f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$ $f(x) = f(xy)-f(y)$

$f(\frac{2}{3}) = f(\frac{?}{?})$ $f(\frac{x}{y}) = \underbrace{f(xy)}_{f(x)+f(y)} - f(y) + f(\frac{1}{y})$.

$f(\frac{1}{y}) = f(\frac{x}{y}) - f(xy) + f(y)$.

пусть $x=24$ $y=4$. $f(\frac{1}{4}) = f(6) - f$

$f(\frac{x}{y})$ $f(xy) = f(x)+f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x)+f(\frac{1}{y})$.

$f(y) - f(\frac{1}{y}) = f(xy) - f(\frac{x}{y})$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad tg\alpha = ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\cancel{225}$ $\quad 8+5=13$

$\times\frac{17}{8}{136}$ $\qquad 225-136=89$

$\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cancel{\cos^2 2\alpha}\, 2\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cancel{\sin 2\alpha}$

$5^z + 12^z = 13^z$

$\left(\frac{5}{13}\right)^z + \left(\frac{12}{13}\right)^z = 1$ $\qquad \frac{5^2+12^2}{13^2}$

$x^2+18x-144=0$

$(x+12)(x$

$\frac{D}{4} = 81+144 = 225$

$x = -9+15 = 6$

$x = -9-15 = -24$

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $\quad |^2 \quad y \geq 4$

$x(x-4)+9y(y-2) =$

$\cancel{(x-2y)^2}$ $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$(x-2y)^2$

$f(-\frac{5}{4}) = 3+\frac{2}{-5+3} = 2$

$f(-\frac{7}{4}) = 3+\frac{2}{-7+3} = 3-\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}-13^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq 0$

$x^2+18x = t.$

$5^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t} \geq -t.$

$\cancel{t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13} \geq -t.}$

$\cancel{t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}+t^{\log_{12}12} \geq 0}$

$\cancel{t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}}$

$\cancel{t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12} \geq t^{\frac{1}{2}\log_{12}(12^2+5^2)}}$

$\cancel{t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}12\cdot\log_{12}5}}$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$

$f(z) = 5^z+12^z$

$f(t) = 13^z$

$5^z+12^z \geq 13^z$ если $z \geq 2.$

$\log_{12}t \geq 2.$

$t \geq 144$

$x^2+18x-144 \geq 0.$

$h(x) \leq 5.$

$h(-\frac{1}{4}) \leq 5.$

$h(-\frac{1}{4}) \geq -$

---

81. ~~sin 2α~~

$\sin y - \sin z$

$\cancel{y = \frac{y+z}{2} - \frac{z-y}{2}}$

$\sin a - \sin b$

$a = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}$

$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$

$\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{b-a}{2} - \sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{a+b}{2} - \left(\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\right) =$

$= \cancel{\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} + \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} - \cancel{\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} + \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$

$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$

(2-1)

$\sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) - \sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta + \sin 2\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $\frac{11}{4} \le h(-\frac{11}{4}) \le 5$

$\frac{11}{4} \le \overset{-\frac{11}{4}a}{\cancel{ax}} + b \le 5.$

$h(-\frac{3}{4}) \le 1$

$-\frac{3}{4}a + b \le 1.$

$-\begin{cases} -\frac{11}{4}a + b \le 5 \\ -\frac{3}{4}a + b \le 1 \end{cases}$

$-2a \le 4$

$a \ge -2.$

$f(x) = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$f'(x) = -\frac{2}{(4x+3)^2} < 0.$

$f'(x) = a.$ $\quad -\frac{2}{(4x+3)^2} = a.$

$3 + \frac{2}{4x+3} = ax + b.$

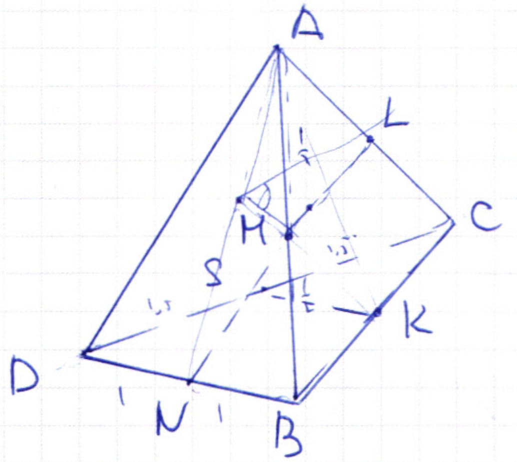
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6.



$\cos a - \sin b.$

$a = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}$

$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$

$\cos a$

$\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} -$

$-\left(\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\right).$

$\cos\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a-b}{2}\right) - \sin\frac{a+b}{2}$

$\left(\sin\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a-b}{2}\right),$

$=\left(\sin\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a-b}{2}\right)\left(\cos\frac{a+b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\right).$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$

$\cos(2\alpha + 2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$

$f(y) = f(xy) - f(x)$

$f(2) = f(3) = 0.$

$f(5) = f(7) = 1$

$f(11) = \cancel{f(13)} =$

$f(13) = 3$

$f(17) = f(19) = 4$

$f(23) = 5.$

$f(1) = 0.$

$f(4) = 0$

$f(6) = 0$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(12) = 0$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(18) = 0$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(2w) = 0.$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0.$

$f\left(\frac{1}{y}\right) < -f(x)$

$f(xy)$

$f(2) = f(1) + f(2)$

$f(1) = 0.$

$f\left(\frac{23}{5}\right) = f(23) - f\left(\frac{1}{5}\right) = 5 - f\left(\frac{1}{5}\right).$

$5 = f\left(\frac{23}{5}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right)$

$23 - 1 = 22.$

$f\left(\frac{21}{5}\right) = f(21) - f\left(\frac{1}{5}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{5}\right)$

$f\left(\frac{21}{5}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right) = 1.$

$\frac{21-1}{2} = 10.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x(y-1)+2(1-y)$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \quad x(x-4)+9y(y-2)=12.$$

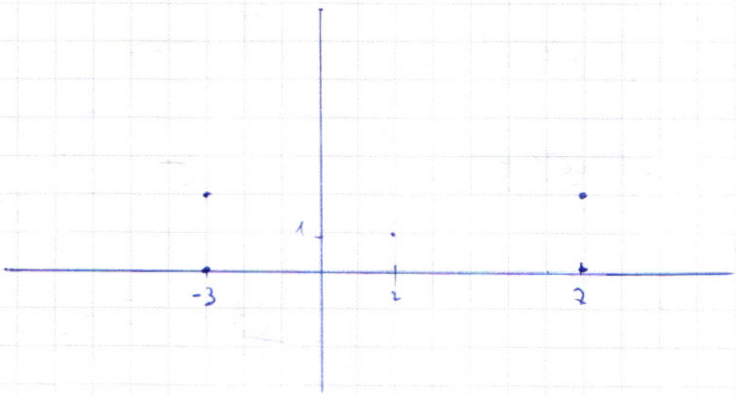
$$\begin{cases} x^2-5xy+y^2+x+2y-2=0. \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$t^2=xy-x-2y+2$

$xy-x-2y+2=x(y-1)-2(y-1)=(y-1)(x-2).$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}. \\ (x-2)^2-4+\cancel{9\,Bury}\ 9(y^2-2y+1)-9=12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}, \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$$



$x-2=a$
$y-1=b.$
$x=a+2.$
$y=b+1.$
$x-2y=a+2-2b-2=a-2b.$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab}. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad a^2-4ab+4b^2=ab. \quad a^2-5ab+4b^2=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=4. \end{array}\right.$$

$b^2=\frac{25}{10}$

$b=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$

$a=$

$a=1:\ 9b^2=24$

$a=4:\ 9b^2=$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $f(x) = -8x^2 - 30x - 17.$

$17 \cdot 8 = 136$ $\quad 225 - 136 = 91$

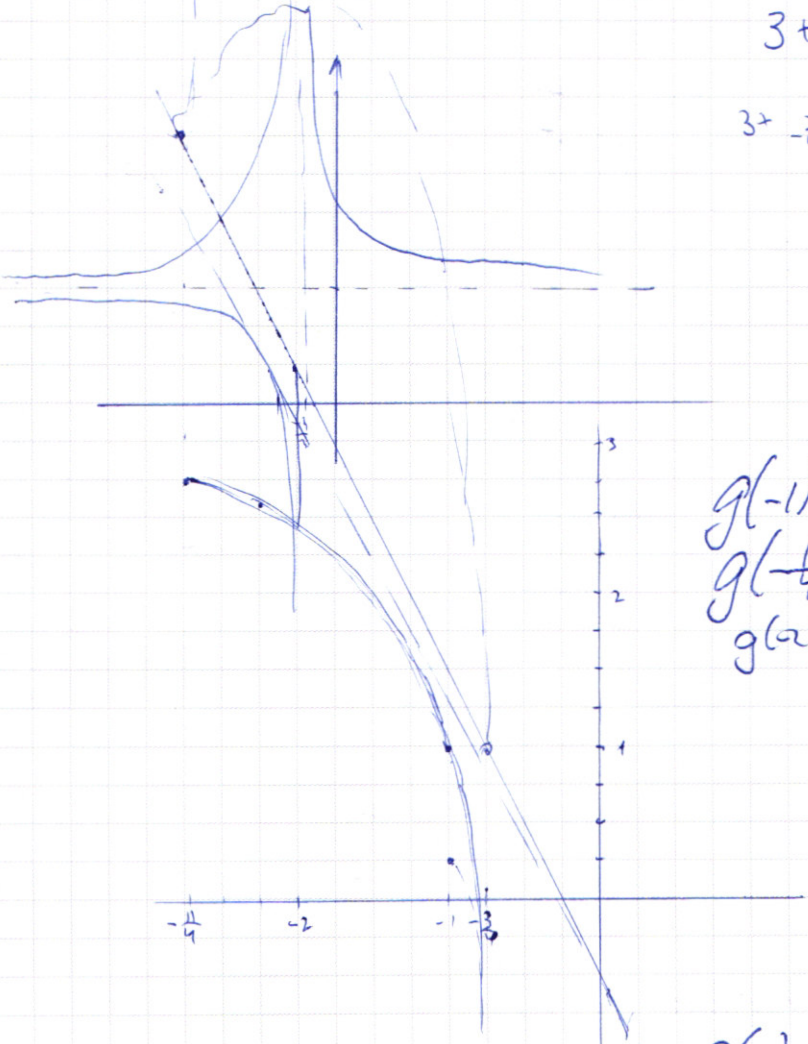
$x_B = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}.$

$y_B = -8 \cdot \frac{225}{64} + 30 \cdot \frac{15}{8} - 17 = -\frac{225}{8} + \frac{225 \cdot 2}{8} - 17 = \frac{225}{8} - \frac{136}{8}$ $\quad 17 \cdot 8 = 136$

$g(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{4x+3+8x+8}{4x+3} = \cancel{\frac{8(x+1)}{4x+3}}.$ $\quad \frac{12x+9}{4x+3} +$ $\quad 225 - 136 = 89$

$3 + \frac{2}{4x+3}.$

$3 + \frac{2}{-8+3} = 3 - \frac{2}{5}.$



$g(-1) = 3 + \frac{2}{-1} = 1$

$g\left(-\frac{11}{4}\right) = 3 + \frac{2}{-8} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}.$

$g(a) = 3 + \frac{2}{-8+3} = 3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - \frac{34}{2} = 1$

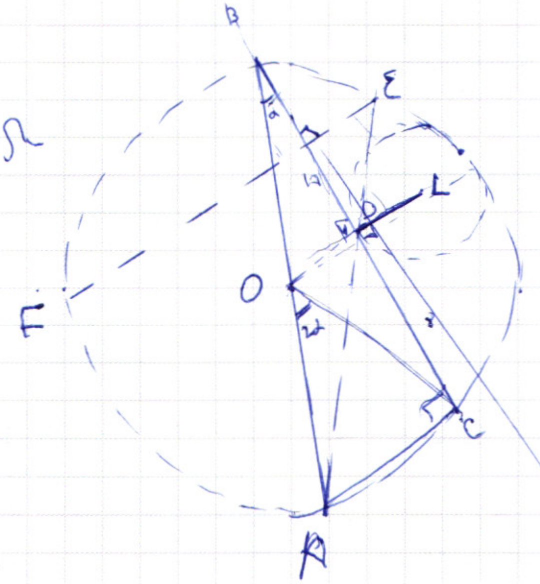
$f(x) = -8x^2 - 30x - 17.$

$x_B = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}.$

$y_B = -8 \cdot \frac{225}{64} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 = \frac{225 - 17 \cdot 8}{8} = \frac{89}{8}$

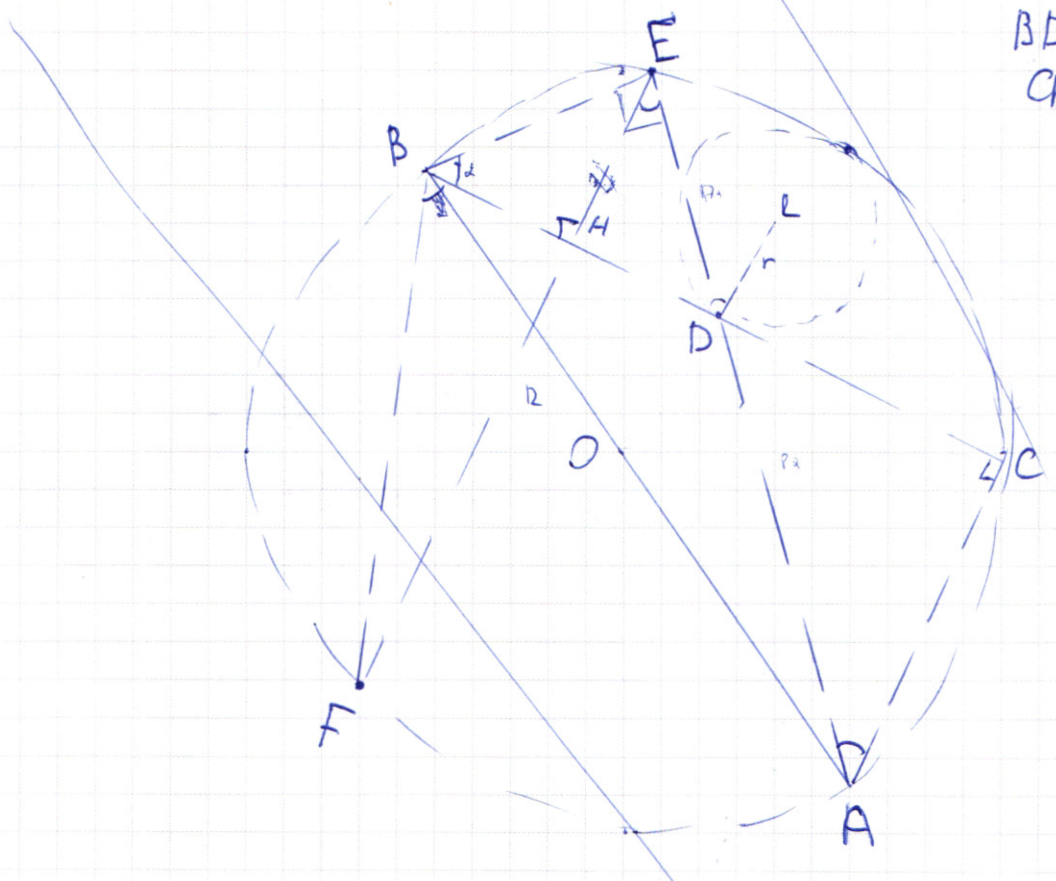
$f\left(-\frac{11}{4}\right) = -8 \cdot \frac{121}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 = -\frac{11 \cdot 11 + 15 \cdot 11}{2} - 17 = \frac{4 \cdot 11}{2} - 17 = \frac{44-34}{2} = 5.$

8ч.



OL = R−r

∠D ∥ EF.



ΔEH

BD = Δ

CD = 8.

$AC = \frac{EF}{2}$.

∠HED = ∠DAC т.к. подобие

∠EBD = α опир. на ∪EC.

∠EBF = 2α опир. на FE = 2∪EC.

∠FBH = α => FBE − р/б.

FH = EH.

ΔBED − п/у ∠E = 90°?

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)