# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина $P$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $PQ$. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра $RS$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

(2):

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{8}{17}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

Подставим (1):

$$-2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Значит, $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

(1):

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

Подставим полученные $\sin 2\beta$ и $\cos 2\beta$:

$$\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad |\cdot\sqrt{17}$$

$$4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha + 1 = 0$$

$$8\sin\alpha\cos\alpha \pm(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \\ 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \end{array}\right.$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~cos2α(~~

$$\left[\begin{array}{l} \cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad |: \sin^2\alpha \ (\text{т.к. } \sin\alpha\neq 0, \text{ иначе бы } \cos\alpha=0 \text{ и } \sin\alpha=0) \\ \sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha=0 \quad |:\cos^2\alpha \ (\text{т.к. } \cos\alpha\neq 0, \text{ иначе бы } \cos\alpha=0 \text{ и } \sin\alpha=0) \end{array}\right.$$

$$\cancel{\begin{cases} ctg^2\alpha+4ctg\alpha=0 \\ \sin\alpha\neq 0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \cancel{tg^2\alpha}+4tg\alpha=0 \\ \cos\alpha\neq 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} ctg^2\alpha+4ctg\alpha=0 \\ tg^2\alpha+4tg\alpha=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} ctg^2\alpha(ctg\alpha+4)=0 \\ tg\alpha(tg\alpha+4)=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} ctg\alpha=0 \\ ctg\alpha=-4 \\ tg\alpha=0 \\ tg\alpha=-4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=0 \\ tg\alpha=-4 \\ tg\alpha=-\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ответ: $0; -4; -\frac{1}{4}$

2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ (3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3(x^2-2x+1)-3+3(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9})-\frac{4}{3}=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ (3y-2x)^2=(3y-2)(x-1) \\ 3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{3} \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $a = y - \frac{2}{3}$, $b = x - 1$

Тогда:

$$\begin{cases} 3a - 2b \geq 0 \\ (3a-2b)^2 = 3ab \\ b^2 + a^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b \geq 0 \\ 9a^2 - 12ab + 4b^2 = 3ab \\ a^2 + b^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b \geq 0 \\ 9a^2 - 15ab + 4b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{3}b \geq 0 \\ (a - \frac{b}{3})(a - \frac{4b}{3}) = 0 \\ a^2 + b^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} a = \frac{b}{3} \\ \frac{1}{3}b \leq 0 \\ \frac{b^2}{9} + b^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{4b}{3} \\ \frac{2}{3}b \geq 0 \\ \frac{16b^2}{9} + b^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} a = \frac{b}{3} \\ b \leq 0 \\ b^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{4b}{3} \\ b \geq 0 \\ b^2 = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} a = \frac{b}{3} \\ b = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{4b}{3} \\ b = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \\ b = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Вернемся к x:

$$\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} y - \frac{2}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \\ x - 1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} y - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ x - 1 = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = \frac{4 - \sqrt{10}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(1 - \sqrt{\frac{5}{2}};\ \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$; $(2; 2)$

3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

Заметим, что из ОДЗ: $x^2+6x>0$, тогда

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$$

Рассм. $f(t)=3^{\log_4 t}+t-t^{\log_4 5}$, $t>0$

$$\cancel{f'(t)}= f(t)=4^{\log_4 3\cdot\log_4 t}+t-t^{\log_4 5}=t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}+t$$

$$f'(t)=\log_4 3\, t^{\log_4\frac{3}{4}}-\log_4 5\, t^{\log_4\frac{5}{4}}$$

~~При $t\geq 1$: $f'(t)\leq 0 \Rightarrow f(t)\downarrow\downarrow$~~

при ~~$t\in 0<t<1$~~:

При $t\geq 1$: $t^{\log_4\frac{3}{4}}\downarrow\downarrow$

$-t^{\log_4\frac{5}{4}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

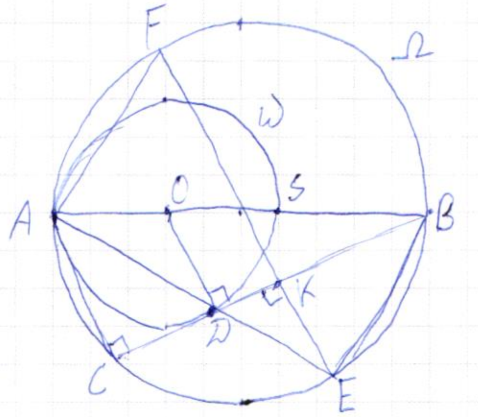
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.




$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$

Пусть $r, R$ – радиусы $\omega$ и $\Omega$

1) $\angle ACB = 90^\circ$ (т.к. $AB$ – диам.)
$\angle ODB = 90^\circ$ (т.к. $OD \perp BC$ как рад. в т. кас.) $\Bigg\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle OBD$ (по 2 углам)

Значит, $\frac{AC}{OD} = \frac{BC}{BD} = \frac{18}{13} \Rightarrow AC = \frac{18DO}{13} = \frac{18r}{13}$

$AODC$ – п/у трап. $\Rightarrow AO^2 = DC^2 + (AC - OD)^2$

$$r^2 = \frac{25}{4} + \left(\frac{5r}{13}\right)^2$$

$$r^2\left(1 - \frac{25}{169}\right) = \frac{25}{4}$$

$$r^2 \cdot \frac{144}{169} = \frac{25}{4} \Rightarrow \boxed{r = \frac{65}{24}}$$

2) $\triangle ABC \sim \triangle OBD$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{BC}{BD} = \frac{18}{13}$

$$\frac{2R}{2R - r} = \frac{18}{13}$$

$$26R = 36R - 18r \Rightarrow 10R = 18r$$

$$\boxed{R = \frac{39}{8}}$$

3) ~~По т. об~~
$AD \cdot DE = CD \cdot BD = \frac{65}{4}$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\triangle ADS \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AS}{AB} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R} = \frac{5}{9}$

$\frac{AE}{AD} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{AD+DE}{AD} = \frac{9}{5} \ \Big|-1$

$\frac{DE}{AD} = \frac{4}{5} \Rightarrow AD = \frac{5DE}{4}$

$\cancel{DE^2 = 13}$ $AD \cdot DE \cdot \frac{DE}{AD} = \frac{4}{5} \cdot \frac{65}{4} = 13$, т.е. $DE = \sqrt{13} \Rightarrow AD = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

$AE = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

4) По обобщ. теор. синусов в $\triangle AFE$: $\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R \Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\boxed{\angle AFE = \arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}}$

5) $\frac{CD}{DK} = \frac{AD}{DE}$ (т.к. $\triangle ADC \sim \triangle EDK$) $\Rightarrow \frac{CD}{DK} = \frac{5}{4}$

$\frac{DK}{CD} = \frac{4}{5} \ \Big|+1$

$\frac{CK}{CD} = \frac{9}{5} \Rightarrow CK = \frac{CD \cdot 9}{5} = \frac{9}{2} \Rightarrow K$ - ср. $BC$ (т.к. $BC = 9$)

Значит, $FE$ - диаметр $\Rightarrow \triangle AFE$ - п/у ($\angle FAE = 90°$)

$\sin\angle AFE = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{FE}$ $\Rightarrow FE = \frac{AE\sqrt{13}}{3} = \frac{\cancel{9}^{3}\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}{4\cdot \cancel{3}_{1}} = \frac{39}{4}$

По т. Пифагора $AF = \sqrt{\frac{1521}{16} - \frac{81\cdot 13}{16}} = \sqrt{\frac{13\cdot 13\cdot 9 - 13\cdot 9\cdot 9}{16}} = \sqrt{\frac{13\cdot 9\cdot 4}{16}} =$

$= \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$\boxed{S(\triangle AFE) = \frac{1}{2} AF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{4} = \frac{27\cdot 13}{16}}$ Ответ: $\frac{65}{24}$; $\frac{39}{8}$; $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\frac{27\cdot 13}{16}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

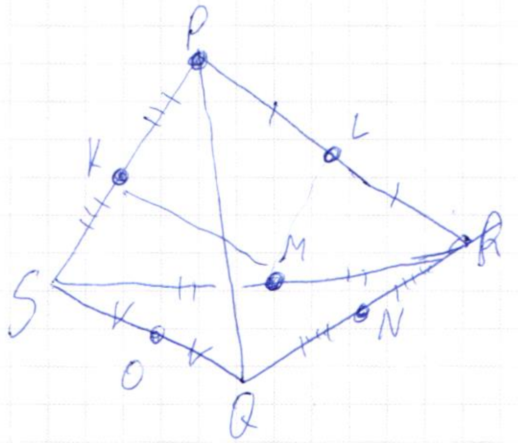
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.




P, L, M, K лежат в одной плоскости =>

а сфера пересекает её по окр. =>

=> PLMK – впис. 4-уг-к.

KM – ср. линия $\triangle SPR$ => $KM \parallel PL$, $KM = PL$ =>

=> PLMK – пар-мм => прямоуг-к.

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

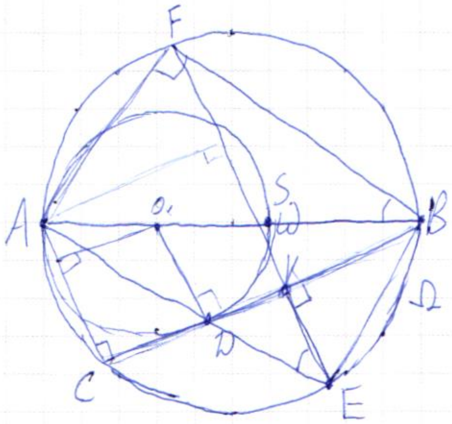
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.




$r, R, \angle AFE, S(AEF) - ?$

$CD = \frac{5}{2}, BD = \frac{13}{2}$

$BC = 9 \quad CK = BK = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow KD = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$

$BD^2 = BS \cdot AB = (2R-2r)(2R)$

$\cancel{= (2R-r)^2 - r^2}$

$\cancel{4R^2 - 4rR = 4R^2 - 4Rr}$

$4R^2 - 4rR = \frac{169}{4}$

$8R^2 - 8rR - 13 = 0 \qquad \cancel{\frac{D}{4} = 16 + 13 \cdot 8 = 15 \cdot 8 = 30 \cdot 4}$

$169 \cdot 9 = 1521$

$\cancel{BD^2 + r^2 = (2R-r)^2}$

$\cancel{\frac{169}{4} = 4R^2 - 4Rr}$

$\frac{AC}{DO_1} = \frac{BC}{BD} = \frac{18}{13} \Rightarrow \boxed{AC = \frac{18r}{13}} = \frac{18 \cdot 65}{13 \cdot 24} = \frac{15}{4}$

$AO_1^2 = CD^2 + (AC - O_1D)^2$

$AO_1^2 = \frac{25}{4} + \left(\frac{18r}{13} - r\right)^2$

$r^2 = \frac{25}{4} + \left(\frac{5r}{13}\right)^2$

$r^2 \cdot \left(1 - \frac{5}{13}\right)\left(1 + \frac{5}{13}\right) = \frac{25}{4}$

$r^2 \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{18}{13} = \frac{25}{4}$

$8R^2 - \frac{65}{3}R - 13 = 0$

$\cancel{24R^2 - 65R - 39 = 0}$

$\cancel{D = 25 \cdot 169 + 96 \cdot 39 = 25 \cdot 13 \cdot 13 + 96 \cdot 3 \cdot 13 = 13(13 \cdot 25 + 288) =}$

$r^2 = \frac{25 \cdot 169}{4 \cdot 16 \cdot 9} \Rightarrow \boxed{r = \frac{5 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{65}{24}}$

$4R^2 = \frac{225}{16} + 81 = \cancel{\frac{1296}{16}} = \frac{1521}{16} \Rightarrow \boxed{R = \frac{39}{4 \cdot 2} = \frac{39}{8}}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\triangle ACD \sim \triangle EKD \Rightarrow \frac{AC}{EK} = \frac{CD}{KD} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow KE = \frac{4AC}{5} = \frac{\cancel{4} \cdot 15}{5 \cdot \cancel{4}} = 3$

$CK^2 = FK \cdot KE \Rightarrow FK = \frac{CK^2}{KE} = \frac{81}{3 \cdot 4} = \frac{27}{4} \Rightarrow FE = \frac{27}{4} + 3 = \frac{39}{4}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

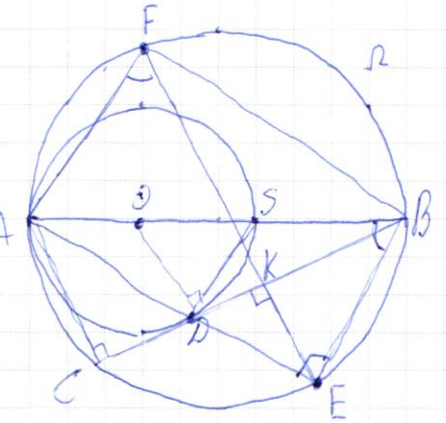
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.




• $\frac{AC}{DO} = \frac{BC}{BD} = \frac{9\cdot 2}{13} = \frac{18}{13} \Rightarrow AC = \frac{18DO}{13} = \frac{18r}{13}$

$BD^2 = (2R-2r)\cdot 2R$

$\frac{169}{4} = 4R^2 - 4rR$

$AO^2 = DC^2 + (AC-DO)^2$

$r^2 = \frac{25}{4} + \left(\frac{5r}{13}\right)^2$

$r^2\left(1-\frac{25}{169}\right) = \frac{25}{4}$

$r^2\cdot\frac{144}{169} = \frac{25}{4} \Rightarrow r\cdot\frac{12}{13} = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{65}{24}}$

• $\Delta ABC \sim \Delta OBD \Rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{BC}{BD} = \frac{18}{13}$ ~~⇔~~ $\frac{2R}{2R-r} = \frac{18}{13}$

$26R = 36R - 18r$  9.

$10R = 18r$

$\boxed{R = \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{65}^{13}}{\cancel{24}_8} = \frac{39}{8}}$

• $\boxed{AD\cdot DE = CD\cdot BD = \frac{65}{4}}$

$\Delta ADS \sim \Delta AEB \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AS}{AB} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R} = \frac{\cancel{65}^5\cdot\cancel{8}^1}{\cancel{24}_3\cdot\cancel{39}_3} = \frac{5}{9}$

$\frac{AE}{AD} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{AD+DE}{AD} = \frac{9}{5} \Big| -1$   $\boxed{\frac{DE}{AD} = \frac{4}{5}} \Rightarrow AD = \frac{5DE}{4}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$DE^2 = 13 \Rightarrow \boxed{DE=\sqrt{13}} \Rightarrow AD = \frac{5\sqrt{13}}{4} \Rightarrow AE = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

По теор. синусов в $\triangle AFE$: $\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R \Rightarrow \boxed{\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{\cancel{9}^{3}\sqrt{13}\cdot\cancel{8}}{\cancel{4}\cdot 2\cdot \cancel{39}_{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}}$

• $BE = \sqrt{4R^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{1521}{16} - \frac{13\cdot 81}{16}} = \sqrt{\frac{13\cdot 13\cdot 9 - 13\cdot 9\cdot 9}{16}} = \sqrt{\frac{13\cdot 9(13-9)}{16}} = \sqrt{\frac{13\cdot 9}{4}} =$

$= \frac{3\sqrt{13}}{2}$

• $CK$ - ?

$\frac{CD}{DK} = \frac{AD}{DE} = \frac{5}{4}$

$\frac{DK}{CD} = \frac{4}{5} \quad \Big| +1$

$\frac{CK}{CD} = \frac{9}{5} \Rightarrow CK = \frac{9CD}{5} = \frac{9}{2}$

---

5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$, $p$ - простое

$$\begin{cases} 3 \le x \le 27 \\ 3 \le y \le 27 \\ f(\frac{x}{y}) < 0 \end{cases}$$

$f(\frac{x}{y}) = f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(1\cdot\frac{x}{y}) = f(1) + f(\frac{x}{y}) < 0$

$\Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(3) + f(2) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a-\frac{2}{3}b\ge 0 \\ (a-\frac{b}{3})(a-\frac{4b}{3})=0 \\ a^2+b^2=\frac{25}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=\frac{b}{3} \\ a-\frac{2}{3}b\ge 0 \\ a^2+b^2=\frac{25}{9}\end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{4b}{3} \\ a-\frac{2}{3}b\ge 0 \\ a^2+b^2=\frac{25}{9}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=\frac{b}{3} \\ -\frac{1}{3}b\ge 0 \\ \frac{b^2}{9}+b^2=\frac{25}{9}\end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{4b}{3} \\ \frac{2b}{3}\ge 0 \\ \frac{16b^2}{9}+b^2=\frac{25}{9}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=\frac{b}{3} \\ b\le 0 \\ \frac{10b^2}{\cancel{9}}=\frac{25}{\cancel{9}}\end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{4b}{3} \\ b\ge 0 \\ \frac{25b^2}{9}=\frac{25}{9}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=\frac{b}{3} \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{4b}{3} \\ b=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}=\frac{4-\sqrt{10}}{6}$$

$$3^{\log_4 t}=4^{\log_4 3\cdot\log_4 t}=$$
$$=t^{\log_4 3}$$

---

3. $$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\ge|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\ge(x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x-(x^2+6x)^{\log_4 5}\ge 0$$

$$\cancel{f(t)=3^{\log_4 t}+t-t^{\log_4 5}},\ t>0$$

$$f'(t)=\left(t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}+t\right)'=$$

$$=\cancel{(\log_4 3-1)t}=\log_4 3\, t^{(\log_4 3-1)}-\log_4 5\cdot t^{(\log_4 5-1)}=$$

$$=\log_4 3\cdot t^{\log_4\frac{3}{4}}-\log_4 5\cdot t^{\log_4\frac{5}{4}}$$

$\cancel{(e^x)'=e^x}$

$a=e^{\ln a}$

$a^x=e^{x\ln a}$

$\cancel{(a^x)'=}$

$\cancel{=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}}\cdot\ln a=$

$\cancel{=a e^x}$

$a^x=e^{\ln a\cdot x}$

$(e^{\ln a\cdot x})'=e^{\ln a\cdot x}\cdot\ln a=$

$=a^x\cdot\ln a$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$= \frac{\ln 3}{\ln 4} \cdot t^{\log_4 \frac{3}{4}} - \frac{\ln 5}{\ln 4} \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}} = 0$$

$$\ln 3 \cdot t^{\log_4 \frac{3}{4}} - \ln 5 \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}} = 0 \quad \Big| : t^{\log_4 \frac{5}{4}}$$

$$\cancel{t^{\log_4 \frac{3}{4}}} =$$

$$\ln 3 \cdot \frac{t^{\log_4 \frac{3}{4}}}{t^{\log_4 \frac{5}{4}}} - \ln 5 = 0$$

$$t^{\log_4 \frac{3}{5}} = \cancel{\log_3} \frac{\ln 5}{\ln 3}$$

$$t =$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times\ 3 \\ \hline 288 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \times\ 13 \\ \hline 75 \\ +25\ \ \\ \hline 325 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -1296 & 16 \\ 128\ \ & \overline{81} \\ \hline 16 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times\ 39 \\ \hline 351 \\ +117\ \ \\ \hline 1521 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 325 \\ +288 \\ \hline 613 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 16 \\ \hline 486 \\ +81\ \ \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1296 \\ +225 \\ \hline 1521 \end{array}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\sin$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2} \sin 2\beta = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\sin 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\pm\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$\pm 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cancel{\pm 2\sin\alpha\cos\alpha}$ $3\sin^2\alpha \mp 2\sin\alpha\cos\alpha - 5\cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha \neq 0$

$3tg^2\alpha \mp 2tg\alpha - 5 = 0$

I. $3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 15 = 16 \Rightarrow tg\alpha = \frac{1\pm4}{3} = -1; \frac{5}{3}$

II. $3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 5 = 0$

$\frac{D}{4} = 1+15 = 16 \Rightarrow tg\alpha = \frac{-1\pm4}{3} = 1; -\frac{5}{3}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$2)\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$3y-2x\geq 0$

$9y^2-12xy+4x^2=(x-1)(3y-2)$

$\cancel{3y^2+3y^2}$ x

$\cancel{3x^2+3y^2-y-8}$

$3(x^2-2x+1)-3+3(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9})-\frac{4}{3}=4$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=7+\frac{4}{3}$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{3}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

Пусть $b=x-1$, $a=y-\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} 3a-2b\geq 0 \\ 3ab=(3a-2b)^2 \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b\geq 0 \\ 3ab=9a^2-12ab+4b^2 \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b\geq 0 \\ 9a^2-15ab+4b^2=0 \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\cancel{a^2-\frac{4ab}{3}+\frac{ab}{3}+\frac{4b^2}{3}=0}$

$a^2-\frac{5ab}{3}+\frac{4b^2}{9}=0$

$(x-1)(3y-2)=(3y-2x)^2$

$(x-1)(3y-2)=(3y-2+2-2x)^2=$

$\cancel{=(3y-2-2x+}$

$3(x-1)(y-\frac{2}{3})=(3(y-\frac{2}{3})-2(x-1))^2$

$\cancel{30y^2+15x^2-45xy+5y-10=0}$

$\cancel{6y^2+3x^2-9xy+y-2=0}$

$-5x^2-15xy+20x+15y+10=0$

$x^2+3xy-4x-3y+2=0$

$3xy-2x-3y+2$

$3y(x-1)-2(x-1)=(x-1)(3y-2)$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$3(x^2-2x+1)-3+3y^2-4y-4=0$

$\cancel{3(x-1)^2-3}$

$3(x-1)^2+3y^2-4y-7=0$

$3(x-1)^2+(y+1)(y-\frac{7}{3})=0$

$D=225-144=$
$=81$
$x=\frac{15\pm 9}{18}=\frac{4}{3};\frac{1}{3}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(10)=f(5)+f(2)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=$

6.

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$$

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geq 8x^2-34x+30$$

$\frac{D}{4}=289-240=49$

$x=\frac{17\pm 7}{8}=3;\frac{5}{4}$

$$\cancel{\frac{4x-3}{2x-2}\geq\frac{16x^3-68x^2+60x-16x^2+68x-60}{2x-2}}$$

$$\begin{cases}\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\\ ax+b\geq 8x^2-34x+30\end{cases}$$

$$\begin{cases}8x^2-(a+34)x+30-b\leq 0\\ \frac{4x-3-2ax^2-2bx+2ax+2b}{2x-2}\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{-2ax^2+x(2a-2b+4)+2b-3}{2x-2}\geq 0\\ 8x^2-(a+34)x+30-b\leq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{2ax^2-2x(a-b+2)-2b+3}{x-1}\leq 0\\ 8x^2-(a+34)x+30-b\leq 0\end{cases}$$

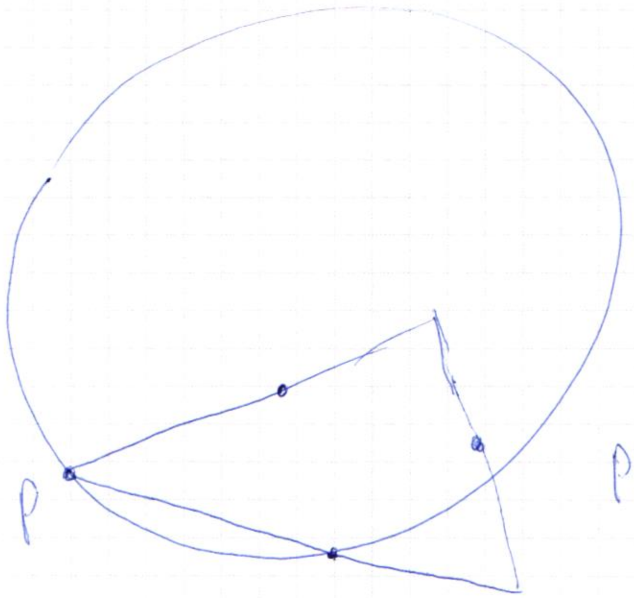
☒ черновик ☐ чистовик

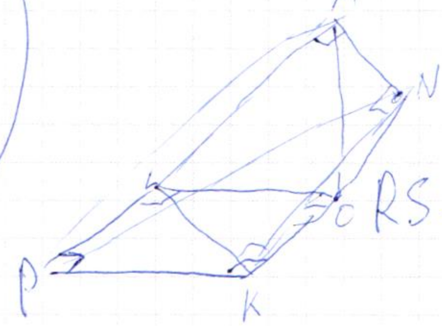
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

7.



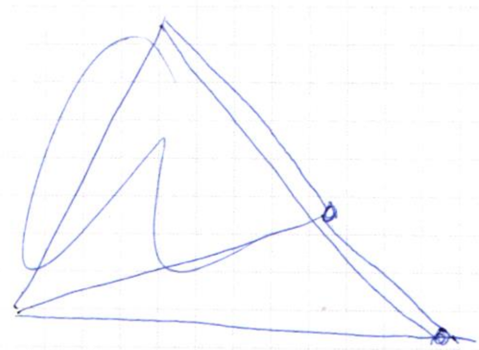



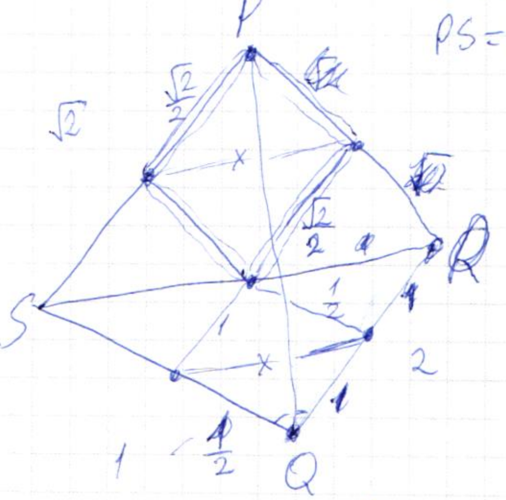

RS – ?

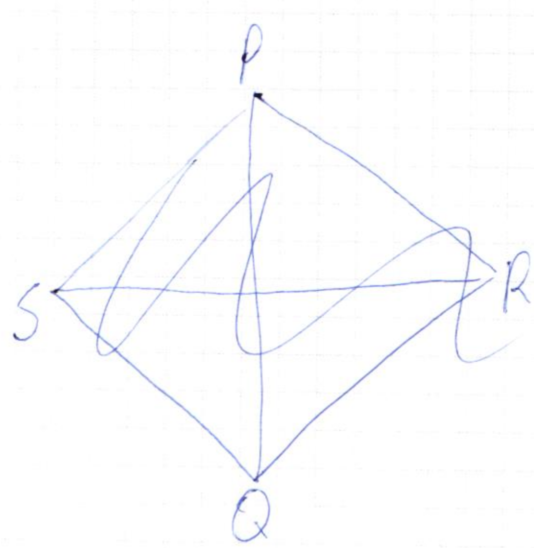
QR = 2

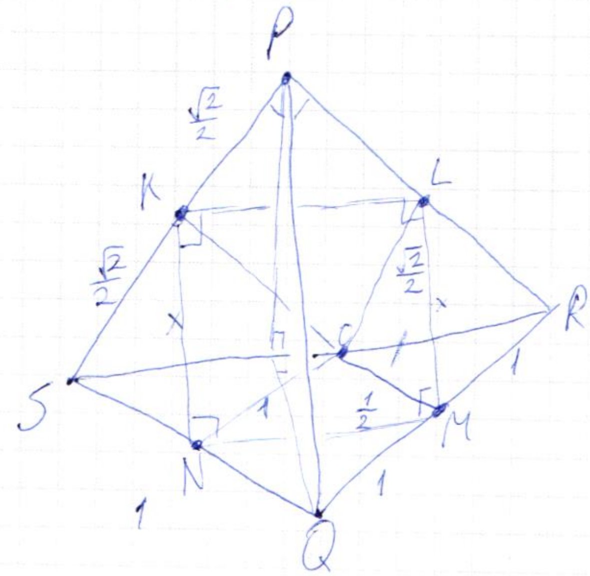
QS = 1

PS = $\sqrt{2}$






KLMN – пар-мм., а т.к. KLMN лежит в сеч. сферы, то KLMN – п/у

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)