

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 25$, $2 \leq y \leq 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN . Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\mu \perp$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha (1 + \cos 4\beta) + 2 \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha (1 + 2\cos^2 2\beta - 1) + 2 \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2 \cos 2\beta (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$$

$$2 \cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$2 \cos 2\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha + 2 \cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 \cos^2 \alpha - 2 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 1 = 0 \\ -4 \cos^2 \alpha + 2 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 1 = 0 \quad | : \cos \alpha \\ -4 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3 = 0 \quad | : \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + 2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0 \\ -4 + 2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{3}{\cos^2 \alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = 0 \\ -4 + 2 \operatorname{tg} \alpha + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 \Rightarrow \begin{cases} -\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha + 3 = 0 \quad * \\ 3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - 3 = 0 \quad ** \end{cases}$$

* ~~Кор~~ Замена $t \rightarrow 1/t$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Оберт: $s; -1; \frac{1 + \sqrt{101}}{3}; \frac{-1 - \sqrt{101}}{3}$

$$3t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{101}}{6} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{101}}{3} \\ \frac{-1 - \sqrt{101}}{3} \end{cases}$$

$$\sqrt{x - 12y} = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2y(x-6) - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 12y = \sqrt{2y(x-6) - x + 6} \\ (x-6)^2 - 36 + 9(2y-1)^2 - 9 = 45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

Замена $\begin{cases} a = x-6 \\ b = 2y-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a - 9b)(a - 4b) = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \\ a > 6b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 9b \\ a = 4b \\ a^2 + 9b^2 = 90 \\ a > 6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9b \\ 90b^2 = 90 \\ a = 4b \\ 25b^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 9b \\ b = 1 \\ b = -1 \\ a = 4b \\ b = \frac{3\sqrt{101}}{5} \\ b = -\frac{3\sqrt{101}}{5} \\ a > 6b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \\ a = -9 \\ b = -1 \\ a = 12\sqrt{101}/5 \\ b = 3\sqrt{101}/5 \\ a = -12\sqrt{101}/5 \\ b = -3\sqrt{101}/5 \\ a > 6b \end{cases}$$

не ур. год
не год. год

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \\ a = -\frac{12\sqrt{101}}{5} \\ b = -\frac{3\sqrt{101}}{5} \end{cases}$$

Обратная замена

$$\begin{cases} 9 = x-6 \\ 1 = 2y-1 \\ -\frac{12\sqrt{101}}{5} = x-6 \\ -\frac{3\sqrt{101}}{5} = 2y-1 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13) $\begin{cases} N \in AB \\ NA = NE \\ A \in \Omega \\ E \in \Omega \end{cases} \Rightarrow N \text{ совпадает с } O_2$

14) из 13) $\Rightarrow EF$ - медиана Ω

15) $EF \cap BC = K, EF \perp BC \Rightarrow K$ - середина BC по св-ву

$$BK = KC = \frac{15 + 12}{2} = 8$$

16) $\triangle KOB$ - н/ч $\cos \angle KOB = \frac{OK}{OB} = \frac{15}{12}$
по т. Пиф.

$$OK = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$$

17) $\triangle EOB$

по т. кос $EB^2 = 2 \cdot 12^2 (1 - \cos \angle KOB) = 2 \cdot \frac{12^2 \cdot 2}{12} = 4 \cdot 12$

$$EB = 2\sqrt{12}$$

18) Рассмотрим $\triangle AFE$ и $\triangle EBF$ в $\triangle AOB$

$\triangle AFE$

$AE^2 = 2 \cdot 12^2 (1 + \cos \angle KOB)$

FE и AB - медианы \Rightarrow

$$= \frac{2 \cdot 12^2 \cdot 32}{12} = 2 \cdot 12 \cdot 32$$

$$\Rightarrow \angle AEB = \angle EBF = \angle AEF = 80^\circ$$

$$= \angle BFA = \angle FAE = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle EBF$$

$$\Rightarrow AF = EB = 2\sqrt{12}$$

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot AE \cdot \sin 80^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{12} \cdot 2\sqrt{12} \cdot \sin 80^\circ$$

$$= 8 \cdot 12 \cdot \sin 80^\circ = 136$$

$$\angle AFE = \arccos \frac{EF}{AF} =$$

$$= \arccos \frac{4}{5}$$

Ответ: $R = 12$

$r = \frac{15}{6} \cdot 12$

$\angle AFE = \arccos \frac{4}{5}$

$S_{AFE} = 136$

Для тех x , где которых $f(x) = 3$

$$y = 12, 13, 23$$

то есть $1 \cdot 3 = 3$ пар

Для тех x , где которых $f(x) = 4$

$$y = 23 \quad \text{то есть} \quad 2 \cdot 1 = 2 \text{ пары}$$

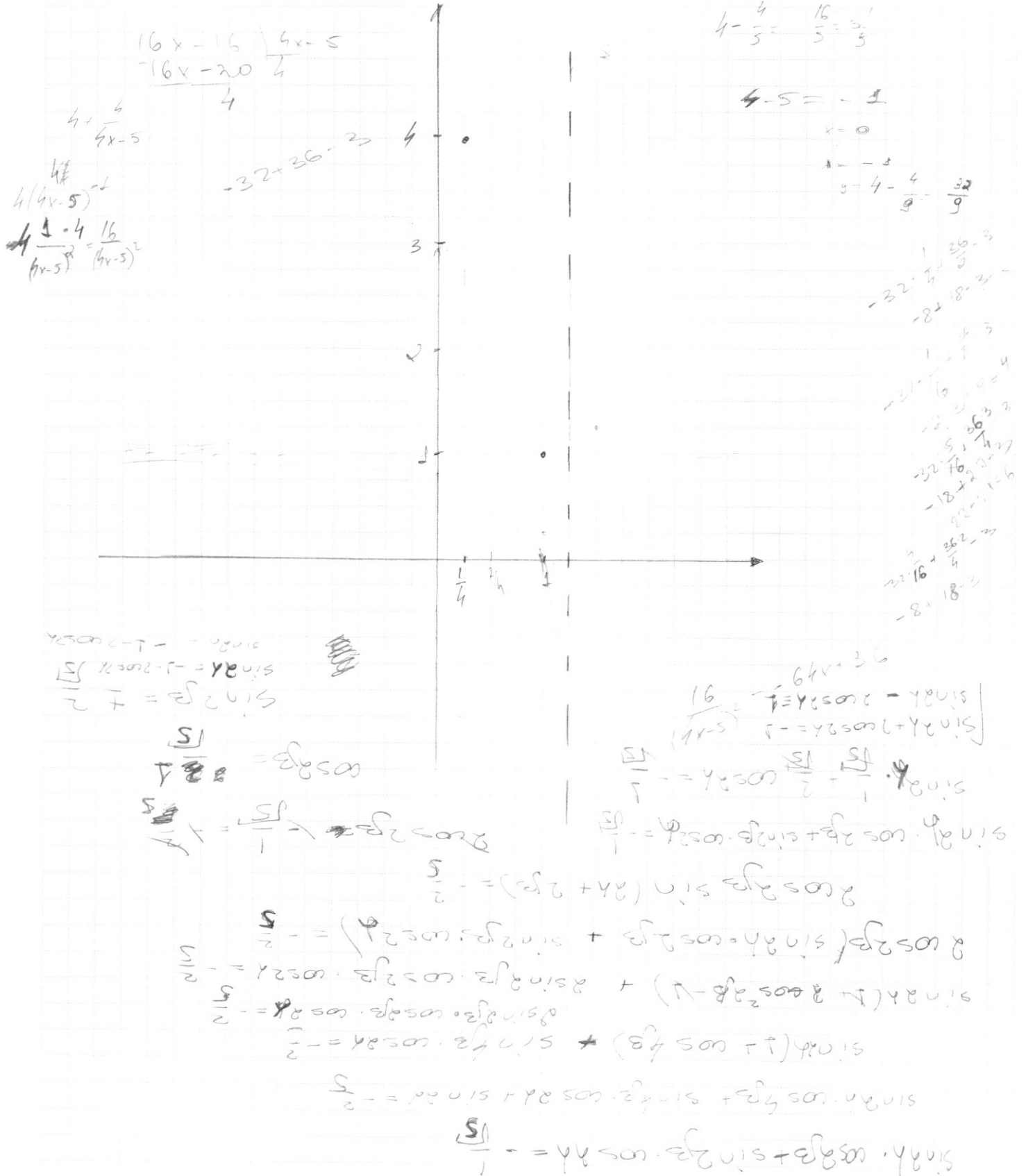
Для тех x , где которых $f(x) = 5$
нет подходящих

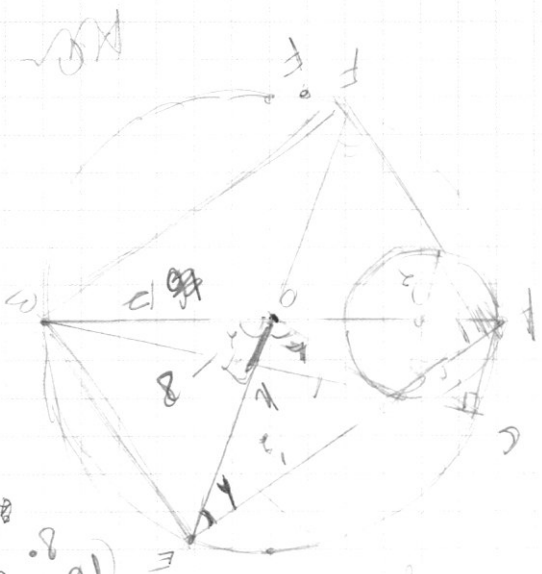
Всего пар: ~~12~~ + 49 + 8 + 3 + 2 = ~~130~~ пар

130

Ответ: 192

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\begin{aligned}
 & 16^2 - 8^2 = 128 \\
 & \sqrt{128} = 11.31 \\
 & 16 - 11.31 = 4.69 \\
 & 16 + 11.31 = 27.31 \\
 & \frac{27.31}{2} = 13.655 \\
 & \frac{4.69}{2} = 2.345
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36.87^\circ \\
 & \sin \alpha = \frac{3}{5} \\
 & \cos \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta = 36.87^\circ \\
 & \sin \beta = \frac{3}{5} \\
 & \cos \gamma = \frac{4}{5} \Rightarrow \gamma = 36.87^\circ \\
 & \sin \gamma = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos \alpha = \frac{4}{5} \\
 & \sin \alpha = \frac{3}{5} \\
 & \cos \beta = \frac{4}{5} \\
 & \sin \beta = \frac{3}{5} \\
 & \cos \gamma = \frac{4}{5} \\
 & \sin \gamma = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos \alpha = \frac{4}{5} \\
 & \sin \alpha = \frac{3}{5} \\
 & \cos \beta = \frac{4}{5} \\
 & \sin \beta = \frac{3}{5} \\
 & \cos \gamma = \frac{4}{5} \\
 & \sin \gamma = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos \alpha = \frac{4}{5} \\
 & \sin \alpha = \frac{3}{5} \\
 & \cos \beta = \frac{4}{5} \\
 & \sin \beta = \frac{3}{5} \\
 & \cos \gamma = \frac{4}{5} \\
 & \sin \gamma = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos \alpha = \frac{4}{5} \\
 & \sin \alpha = \frac{3}{5} \\
 & \cos \beta = \frac{4}{5} \\
 & \sin \beta = \frac{3}{5} \\
 & \cos \gamma = \frac{4}{5} \\
 & \sin \gamma = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

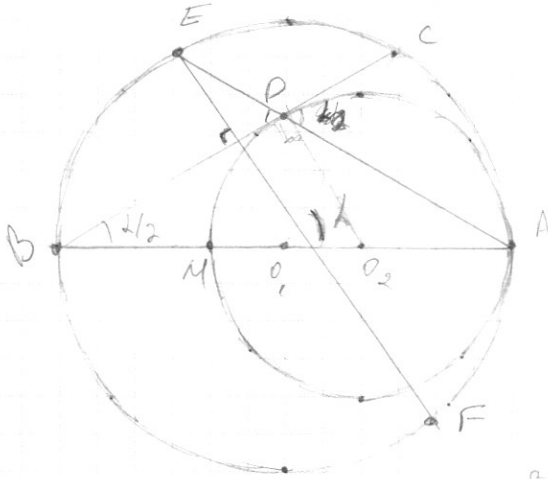
$$\begin{aligned}
 & \cos \alpha = \frac{4}{5} \\
 & \sin \alpha = \frac{3}{5} \\
 & \cos \beta = \frac{4}{5} \\
 & \sin \beta = \frac{3}{5} \\
 & \cos \gamma = \frac{4}{5} \\
 & \sin \gamma = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$10x + 1x \cdot \frac{1}{9x^2} \cos_3 4 \geq x^2 + 5 \cos_3(10x - x^2)$$

$$10x + (10x - x^2) \cos_3 4 \geq x^2 + 5 \cos_3(10x - x^2)$$

$$10x \cdot x^2 + (10x - x^2) \cos_3 2 \geq 5 \cos_3(10x - x^2)$$

$$t + t \cos_3 2 \geq 5 \cos_3 t$$



$\angle AFE = ?$

$SA \neq F = ?$

$R = ?$

$M = ?$

$CD = \frac{16}{2}$

$BO = \frac{16}{2}$

$$BO \cdot CD = AO \cdot DE$$

$$BO^2 = BM \cdot AB = 2R \cdot (2R - 2)$$

$$BO^2 = 2R^2(1 + \cos 2\alpha)$$

$$f(a/b) = f(a) + f(b)$$

$$f(1/4) = [1/4]$$

$$f(x/3) = f(x) + f(1/3)$$

$$f(x/4) = [x/4] + [1/4]$$

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{4} < 0$$

$$x < 4 \quad 2$$

$$y > 4$$

$$23$$

$$f(x) = 9^{1/x}$$

$$-6 \frac{1}{x} + 36 \frac{1}{x^2} =$$

$$23 = 2$$

$$\frac{26x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

$$x = 26^2 - 32 \cdot 3 \cdot 4 =$$

$$4 - 25 \cdot 3 \cdot 6 =$$

$$2^2 \cdot 3^4 - 2^2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 3 \cdot 19 =$$

$$2 \cdot 3 \cdot 19 = 114$$

$$\frac{21}{1} = 21 \cdot 5002 = 105042 \rightarrow 21 \cdot 5002$$

$$= (21 + 0) \cup \{5\}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cos(2\alpha + 2\beta) = +\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta + 2\beta)$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) + \cos(2\alpha + 2\beta) \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos(2\beta) + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \cdot \sqrt{5}$$

$$-\cos(2\beta) + 2\sin 2\beta + \sqrt{5} \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} 2y(x-6) - x+6 \\ (x-6)(2y-1) \\ x-6 \\ x-6-12y+6 \\ x-6-12y+6 \\ a = x-6 \\ b = 2y-1 \end{aligned}$$

$$x - 2y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$$

$$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$$

$$(x-6)^2 - 36y^2 + 36y - 36 - 45 = 0$$

$$(x-6)^2 + (36y^2 - 36y + 9) - 9 - 36 = 45$$

$$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$$

$$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$$a^2 + 9b^2 = 90$$

$$25b^2 + 9b^2 = 90$$

$$30b^2 = 90$$

$$b^2 = 3$$

$$16b^2 + 9b^2 = 90$$

$$25b^2 = 90$$

$$b^2 = \frac{18}{5}$$

$$b = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} = \pm \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$a = \pm \frac{12\sqrt{10}}{5}$$

$$0 = 2 + 4\cos 2\theta + 6\cos 4\theta + 4\cos 6\theta$$

$$1 = 4\cos^2 \theta + 4\cos^2 2\theta + 4\cos^2 3\theta$$

$$0 = 2\cos^2 \theta + 2\cos^2 2\theta + 2\cos^2 3\theta$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)