МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$

Пусть $x-2=s$; $y-1=t$.

$\begin{cases} s-2t=\sqrt{st} \ (1) \\ s^2+(3t)^2=5^2 \ (2). \end{cases}$

Решим (1): $\begin{cases} s^2-4st+4t^2=st. \\ s-2t\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} s=t \\ s=4t \end{array}\right. \\ s-2t\geq 0. \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>0 \\ s=4t \end{cases} \ \mathrm{I} \\ \begin{cases} t<0 \\ s=t. \end{cases} \ \mathrm{II} \end{array}\right.$

Подставим $s=4t$ и $s=t$ в (2):

I) $\begin{cases} 25t^2=25 \\ t>0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t=1 \\ s=4 \end{cases}$

II) $\begin{cases} 10t^2=25 \\ t<0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ s=-\sqrt{\frac{5}{2}}. \end{cases}$

Вернёмся к x, y:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1)\\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2)\end{cases}$$

$2\cdot3\cdot3$

(2): $x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$$\boxed{(x-2)^2+(3(y-1))^2=5^2}$$

$x-2$, 5, $3(y-1)$

(1): $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2\\ x-2y\geq0\end{cases}$

$16t^2-20t^2+4t^2$

$(y-1)(x-2)=xy-x-2y+2$

$\boxed{s=t,\ s=4t}$

$x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$-2t=-2y+2-2$

Пусть $x-2=s$; $y-1=t$.

$s^2-5st+4t^2=0$

$s+2-2t-2=s-2t$

$$\begin{cases} s-2t=\sqrt{st}\to s^2+4t^2-4ts=ts\\ s^2+(3t)^2=5^2\end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

$\boxed{3}$ $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x.$

Пусть $x^2+18x=t$.

$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq |t|^{\log_{12}13}$ (1)

Лемма: $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

Д-во: $a^{\log_b c}=\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b c}=\left(b^{\log_b c}\right)^{\log_b a}=c^{\log_b a}$ ч.т.д.

Тогда (1) равносильно:

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}|t|}\geq 0.$

$\downarrow t>0 \Rightarrow$ модуль в третьем слагаемом можно снять

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t}\geq 0.$

$f(x)=5^x+12^x-13^x \downarrow \Rightarrow$ Если найдётся значение $\{\log_{12}t_0\}$ т.ч. нер-во обращается в рав-во, то при $\log_{12}t \in (-\infty; \{\log_{12}t_0\}]$ нер-во будет выполнено.

При $\log_{12}t=2$ нер-во обр. в рав-во

$\Rightarrow t\in(0;144]$ ($\log_{12}t$ – монотонная ф-я)

Вернёмся к x:

$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x\leq 144 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty) \\ x\in[-24;6] \end{cases}$

Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$\alpha=\frac{2n+1}{2}\cdot\pi$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\ (\mathrm{I})\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\ (\mathrm{II})\end{array}\right.$

$2\cos^2\alpha-1=\frac{3}{5}$

$2\cos^2\alpha=\frac{8}{5}$

$\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$

$\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

(I): $\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\alpha-2\sin 2\alpha=-1$

$\cos 2\alpha-\frac{8}{5}=-1$

$\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$

$\mathrm{I}a)$ $\pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=2\sin 2\alpha-1$

$1-\sin^2 2\alpha=4\sin^2 2\alpha-4\sin 2\alpha+1$

$3\sin^2 2\alpha=4\sin 2\alpha$

$5\sin 2\alpha=4$

$\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2\alpha=0\\ \cos 2\alpha=-1\end{cases} \to \boxed{tg\alpha=0}\\ \begin{cases}\sin 2\alpha=4/5\\ \cos 2\alpha=3/5\end{cases} \to \boxed{tg\alpha=\frac{4}{3}}\end{array}\right.$

$\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$

$\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$

$5\sin^2 2\alpha=4\sin^2\alpha$

$\mathrm{II}a)$ $\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=1$

$\boxed{tg\alpha=-\frac{4}{3}}$

$\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=1-2\sin 2\alpha$

$1-\sin^2 2\alpha=1-4\sin 2\alpha+4\sin^2 2\alpha$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

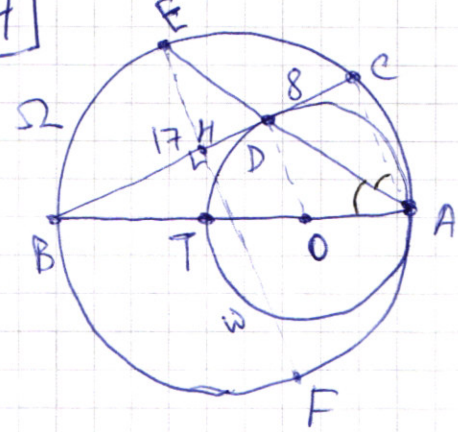
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



Дано: Ω и ω кас. внутр. обр. в т. A

AB - диаметр Ω

BC - хорда Ω, кас. ω в т. D

$BD = 17$; $CD = 8$

$AD \cap \Omega =$ т. E

$EF \perp BC$

Найти: R, r, $\angle AFE$, S_{AEF}

R - радиус Ω; r - радиус ω

Д.п.: т. O - центр ω (лежит на AB)

$\angle BDO = 90^\circ$ (между кас. и рад, провед. в т. кас.)

$\angle BCA = 90^\circ$ (впис., опир. на диаметр)

$\angle CBA$ - общий

$\Rightarrow \triangle BDO \sim \triangle BCA$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{DO}{BA} = \frac{8}{25} \to$

$\to \frac{r}{2R} = \frac{8}{25} \Rightarrow r = \frac{16}{25}R.$

Пусть $\omega \cap AB =$ т. T

$BD^2 = BT \cdot BA$ (по теор. о квадрате отр. кас.)

$289 = 2(R-r)\cdot 2R$

$289 = 4R^2 \cdot \frac{9}{25} \Rightarrow R = \frac{17\cdot 5}{2\cdot 3} = \frac{85}{6}$. Тогда $r = \frac{16}{25}\cdot\frac{85}{6} = \frac{136}{15}$

Рассм. $\triangle ABC$: $BC = 8+17 = 25$; $AB = 2R = \frac{85}{3}$.

$AC = \sqrt{-BC^2 + AB^2} = \frac{\sqrt{85^2 - 75^2}}{3} = \frac{40}{3}$ (по теор. Пифагора)

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{8}{17} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow AD$ - бис-са $\triangle ABC$ (по пр-ку)

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD = \alpha$.

$tg\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{8\cdot 3}{40} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$; $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$ (по ОТТ)

$\Rightarrow \alpha = arctg(3/5)$

$\left.\begin{matrix} EF \perp BC \\ AC \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow EF \parallel AC \Rightarrow \angle FEA = \alpha$

$BE = EC$ (т.к. ~~это~~ они стягивают дуги Ω, на которые опираются равные углы $\angle BAE$ и $\angle CAE$)

$\Rightarrow \triangle BEC$ – р/б $\Rightarrow EH$ в нём не только высота, но и медиана (т. $H = EF \cap BC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ – диаметр Ω (как сер. пер. к хорде BC)

Тогда $EF = 2R = \frac{85}{3}$

$AF = EF \cdot \sin\alpha = \frac{85}{\sqrt{34}}$; $EA = EF \cdot \cos\alpha = \frac{85}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot EA = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{\sqrt{34}} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{85 \cdot 5}{3} = \frac{2125}{12}$

Ответ: $r = \frac{136}{15}$

$R = \frac{85}{6}$

$\angle AFE = arctg(3/5)$

$S_{AEF} = \frac{2125}{12}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{6}$

$f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{2}{4(x+\frac{3}{4})}$. График – гипербола

$g(x)=-8x^2-30x-17$. График – парабола.

Построим графики $f(x)$ и $g(x)$ в одной коорд. пл-ти Oxy:

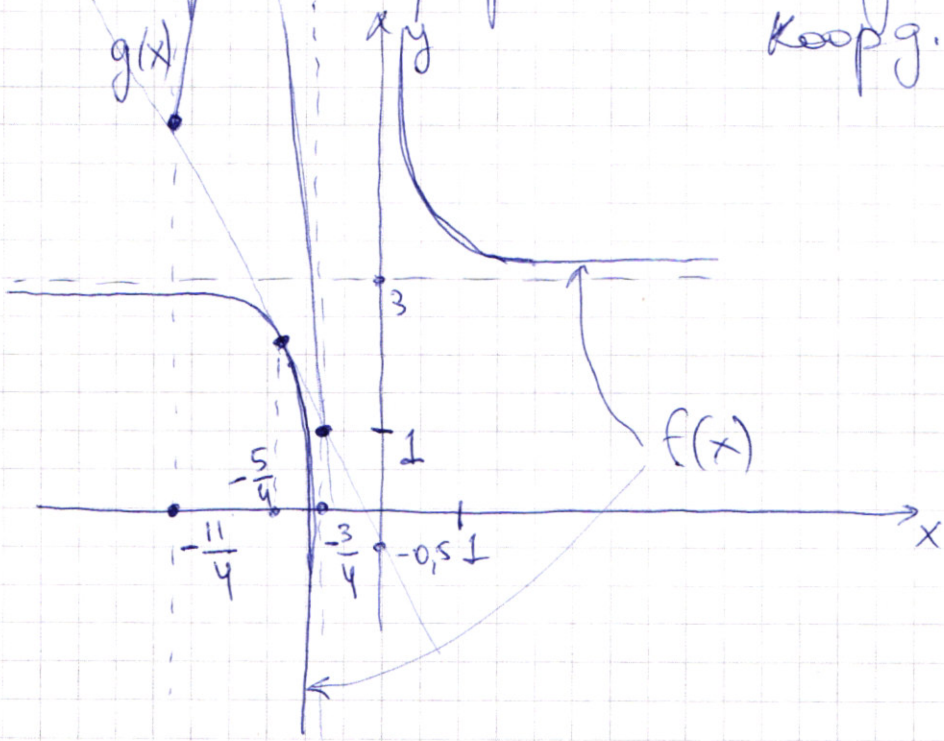


График $g(x)$ проходит через точки $\left(-\frac{11}{4};5\right)$ и $\left(-\frac{3}{4};1\right)$ $\Rightarrow$ на $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$ лежит не ниже прямой $y=-2x-0{,}5$.

Заметим, что данная прямая является касательной к графику $f(x)$. Действительно, ур-е $\frac{12x+11}{4x+3}=-2x-0{,}5$ им. ровно один корень $x=-\frac{5}{4}$ и при $x_0=-\frac{5}{4}$ $f'(x)=-2$.

~~Если хоть одна точка прямой ax+в будет~~

Если хоть при одном $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ $ax+в$ будет больше $-2x-0,5$, то график $ax+в$ пересечёт график $g(x)$ не в крайней точке, а если хоть при одном $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$, $ax+в$ будет меньше $-2x-0,5$, то график $ax+в$ пересечёт график $f(x)$ более, чем в одной точке $\Rightarrow$ Единственный подходящий вариант $a=-2$, $в=-0,5$

Ответ: $(-2; -0,5)$

$\boxed{1}$ <u>Лемма</u>: $\sin a + \sin в = 2\sin\frac{a+в}{2}\cdot\cos\frac{a-в}{2}$.

<u>Д-во</u>: $\sin a + \sin в = \sin\left(\frac{a+в}{2}+\frac{a-в}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+в}{2}-\frac{a-в}{2}\right) = \sin\frac{a+в}{2}\cdot\cos\frac{a-в}{2} + \cos\frac{a+в}{2}\sin\frac{a-в}{2} + \sin\frac{a+в}{2}\cdot\cos\frac{a-в}{2} - \cos\frac{a+в}{2}\sin\frac{a-в}{2} = 2\sin\frac{a+в}{2}\cdot\cos\frac{a-в}{2}$. ч.т.д.

Применим лемму ко 2-ому равенству:

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

Подставив значение $\sin(2\alpha+2\beta)$ из 1-ого рав-ва, получим $\cos 2\beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$. Тогда $\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = 1/\sqrt{5}\\ \sin 2\beta = -1/\sqrt{5}\end{array}\right.$ (по ОТТ)

<u>I случай</u>: $\cos 2\beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$; $\sin 2\beta = 1/\sqrt{5}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha - 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2\alpha = 0\\ \cos 2\alpha = -1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2\alpha = 4/5\\ \cos 2\alpha = 3/5.\end{cases}\end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l}\alpha = (2n+1)\pi/2, \text{ где } n\in\mathbb{Z}\\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt5}\\ \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}; \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}.\end{array}\right.$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1/2$ (для $\alpha = \frac{(2n+1)}{2}\pi$, tg не опр.)

II случай: $\cos 2\beta = \frac{-2}{\sqrt5}; \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

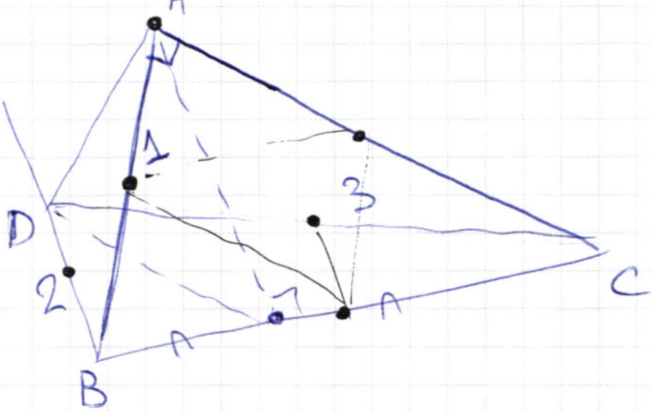
$$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

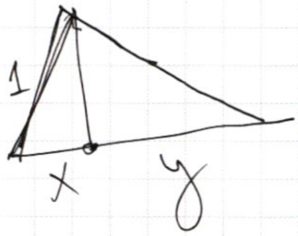
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin 2\alpha.$$

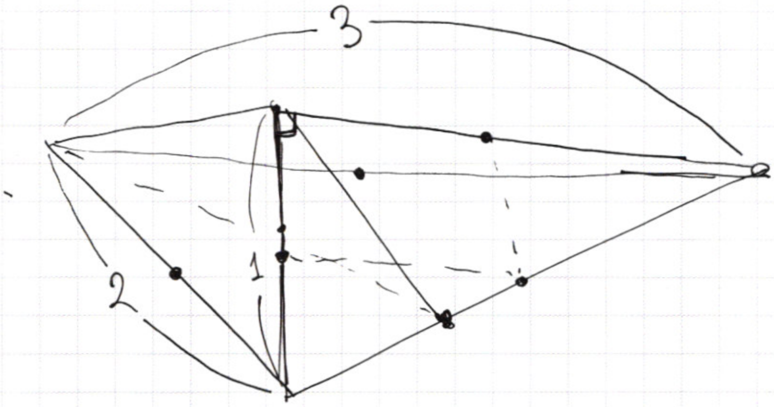
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2\alpha = 0\\ \cos 2\alpha = 1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2\alpha = \frac{4}{5}\\ \cos 2\alpha = -\frac{3}{5}\end{cases}\end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l}2\alpha = 2\pi n, \text{ где } n\in\mathbb{Z}\\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5}, \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt5}\\ \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}, \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$$

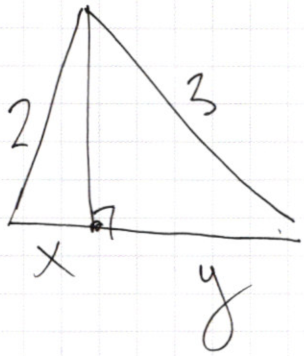
$$\to \left[\begin{array}{l}\alpha = \pi n, n\in\mathbb{Z}\\ \operatorname{tg}\alpha = 2\end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = 0\\ \operatorname{tg}\alpha = 2\end{array}\right.$$

Ответ: $0; \frac{1}{2}; 2$.









$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{1} = \dfrac{1}{x} \\ 4 - x^2 = 9 - y^2 \end{cases}$$

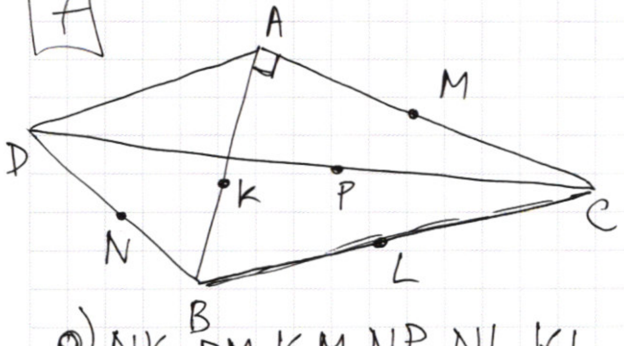
$x^2 + xy = 1$

$x^2 - y^2 +$

$\dfrac{16}{3} - \dfrac{15}{3},$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7



Дано: ABCD - пирамида
т. K, L, M, N, P - сер. рёбер кроме AD
т. A, K, L, M, N, P ∈ одной сфере
$AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$

0) NK, PM, KM, NP, NL, KL, PL, ML - ср. линии в гранях пирамиды

1) AMLK - впис. 4-угольник $\Rightarrow \angle AKL + \angle AML = 180^\circ$ (по св-ву)

$\angle AKL = 180^\circ - \angle BAC$; $\angle AML = 180^\circ - \angle BAC$ (т.к. KL и ML - ср. л $\triangle ABC \Rightarrow$ они ∥ его ~~основ~~ сторонам)

$\Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$.

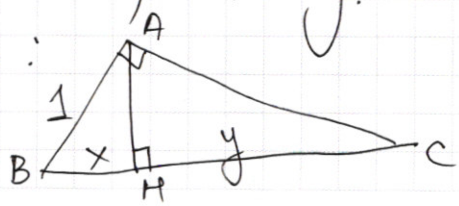
2) NKMP - впис. 4-угольник
$NK \parallel PM \parallel AD$ (по св. ср.л.)
$KM \parallel NP \parallel BC$
~~⇒ это прямоугольник~~
$\Rightarrow$ NKMP - прямоугольник
$\Rightarrow AD \perp BC$.

3) Доп. DH - высота $\triangle BDC$
$BC \perp DH$ (по постр.)
$BC \perp AD$
$\Rightarrow BC \perp$ пл-ти ADH (по пр. перп-ти прямой и пл-ти)

$\Rightarrow$ AH - высота $\triangle ABC$.

4) Пусть $BH = x$, $CH = y$.

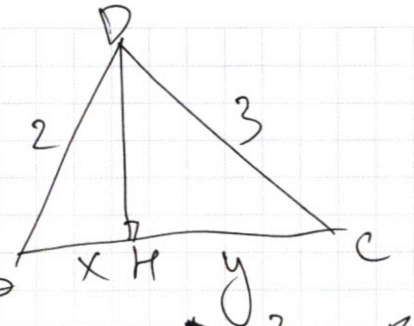
а) Рассм $\triangle ABC$:



$\triangle CAB \sim \triangle AHB$ (по 2 ∠)

$\Rightarrow \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{x}{1}$

б) Рассм. $\triangle BCD$:



По теор. Пифагора: $DH^2 = \cancel{BH}\, BD^2 - BH^2 = CD^2 - CH^2$

$4 - x^2 = 9 - y^2$

Решим сист. ур-й а) и б):

$$\begin{cases} x^2 + xy = 1 \ (1) \\ x^2 - y^2 + 5 = 0 \ (2) \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{y^2 - 5}.$$ Подставим в (1):

$y^2 - 5 + y\sqrt{y^2-5} = 1.$

$4 - y^2 = y\sqrt{y^2-5}$

$16 - 8y^2 + \cancel{y^4} = \cancel{y^4} - 5y^2 \Rightarrow 16 = 3y^2 \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Итого $BC = x + y = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

~~Ответ~~. Наименьший радиус опис. сферы будет достигаться, если её диаметр лежит в пл-ти ABC (т.к. $\triangle ABC$ вписан в одну из окр-тей, полученных при пересечении опис. сферы с плоскостью). Этот радиус равен половине $BC = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ (т.к. $\angle BAC$ опир. на диаметр)

Ответ: $BC = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

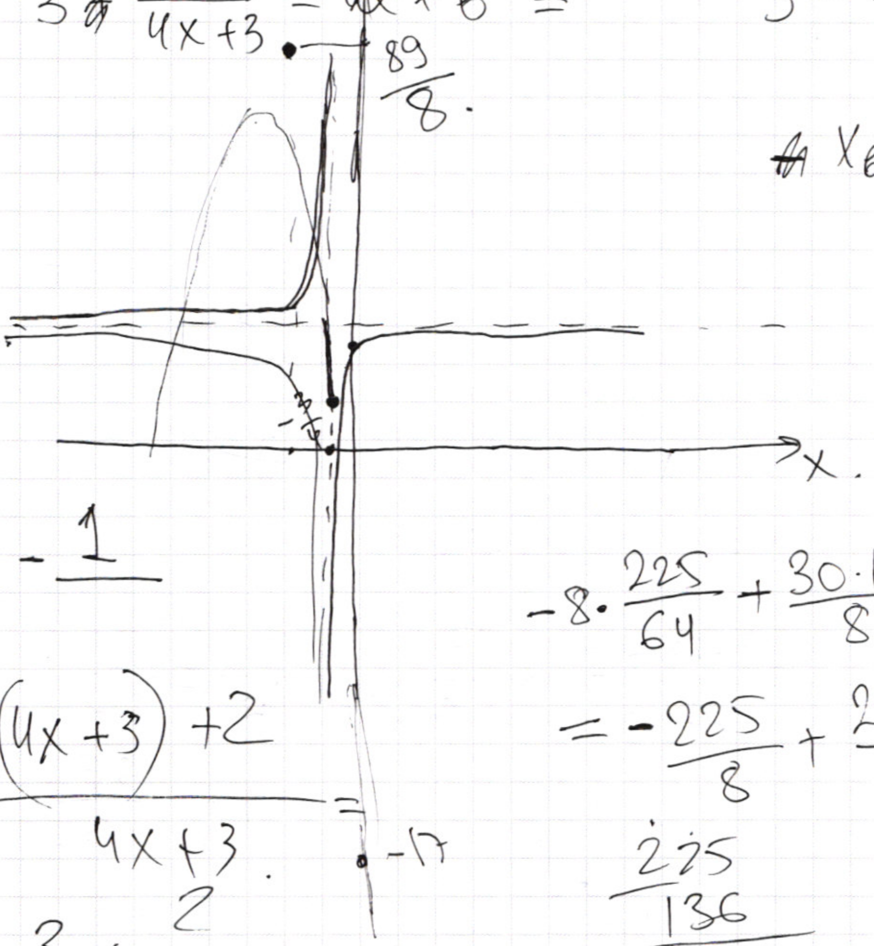
$R_{min} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}17\\32\end{array}\\\hline\begin{array}{r}34\\51\end{array}\\\hline 544\end{array}$$

$D=900-544=356.$

$$\frac{12x+11}{4x+3}\le ax+b\le -8x^2-30x-17. \qquad -8x^2-30x-17=3$$

$$3-\frac{1}{4x+3}\le ax+b\le \qquad 3-\frac{1}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)} \qquad 3-\frac{1}{4\left(\cdot\frac{2}{4}\right.}$$



$$x_b=-\frac{b}{2a}=-\frac{30}{16}=-\frac{15}{8}.$$

$$-\frac{1}{\quad}$$

$$-8\cdot\frac{225}{64}+\frac{30\cdot15}{8}-17=$$

$$=-\frac{225}{8}+\frac{2\cdot225}{8}-\frac{136}{8}=0.$$

$$\frac{3(4x+3)+2}{4x+3}=$$

$$\begin{array}{r}225\\136\\\hline 89\end{array} \qquad \frac{89}{8}$$

$$=3+\frac{2}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)}$$

$$-8\cdot\frac{9}{16}+\frac{30\cdot3}{4}-17=-\frac{18}{4}+\frac{90}{4}-\frac{68}{4}=1.$$

$$\frac{24+11}{11}=\frac{35}{11} \qquad \frac{-24+11}{-5}=\frac{13}{5}.$$

$$-8\cdot\frac{121}{16}+\frac{30\cdot11}{4}-17=-\frac{242}{4}+\frac{330}{4}-\frac{68}{4}=$$

$=5.$ $$\frac{-\frac{15}{\cancel{2}}+11}{-5+3}=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}.$$ 2

$$\frac{28}{-6}=6.$$

$$\frac{-15+11}{-5+3}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$6-4=\sqrt{12-6-4+2}=\sqrt{4}$

$36+36-24-36=12.$

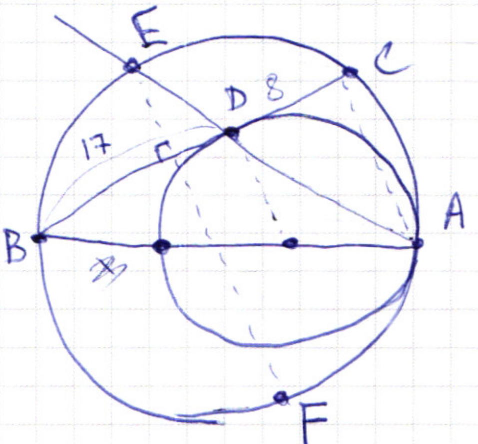
$\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

$2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2+2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{}$

$1-2\sqrt{\frac{5}{2}}+36$

85×25: $425+170=2125$

17×17: $119+17=289$



$17^2=(D-d)\cdot D$

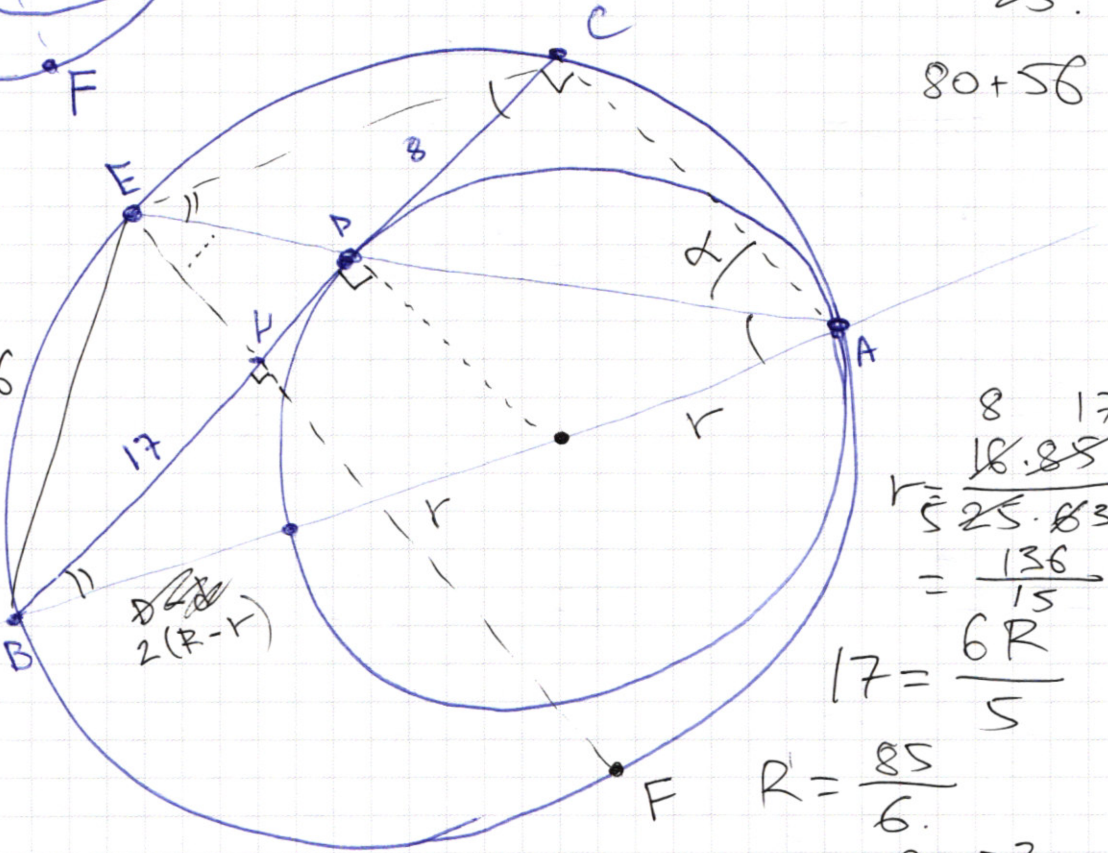
$\frac{2R-2r+r}{2R}=\frac{17}{25}.$ $\quad \frac{r}{2R}=\frac{8}{25}.$

$r=\frac{16R}{25}.$

$80+56$

$\frac{ED}{BD}=\frac{CD}{AD}$

$ED\cdot AD=136$



$r=\frac{\cancel{16}^{8}\cdot\cancel{85}^{17}}{\cancel{25}_{5}\cdot\cancel{6}\,3}=\frac{136}{15}$

$17=\frac{6R}{5}$

$R=\frac{85}{6}.$

$289=4(R-r)\cdot R=4R\left(R-\frac{16}{25}R\right)=4R^2\cdot\frac{9}{25}=\frac{36R^2}{25}.$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}; \quad \left[\begin{array}{l}\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5} \ (\mathrm{I}) \\ \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5} \ (\mathrm{II})\end{array}\right.$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta =$$

(I):

Пусть $2\alpha = x$; $2\beta = y$.

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x = -\frac{1}{\sqrt5}.$$

$$\sin(x+2y) + \sin x =$$

$$= \sin(x+y)\cdot\cos y + \cos(x+y)\cdot\sin y + \sin x = -\frac{4}{5}.$$

(I): $\frac{2}{\sqrt5}\sin y - \frac{1}{\sqrt5}\cos y + \sin x = -\frac{4}{5}.$

Пусть $\sin x = t$; $\cos y = s$.

$$st + \sqrt{(1-s^2)(1-t^2)} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin y\cos x + \sin x\cdot\cos y = -\frac{1}{\sqrt5}.$$

$$2\sin y - \cos y + \sin x = -\frac{4}{\sqrt5}.$$

~~sin a+b~~ $\sin a + \sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)$

$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

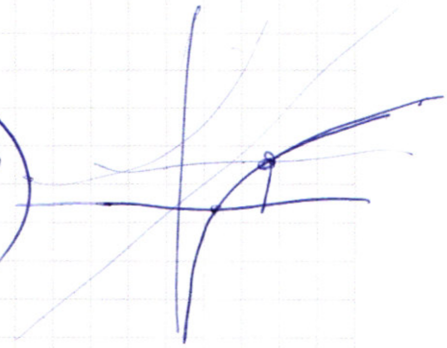
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$.

$\log_{12}\left(5^{\log_{12} t} + t\right) \geq \log_{12}\left(|t|^{\log_{12} 13}\right)$



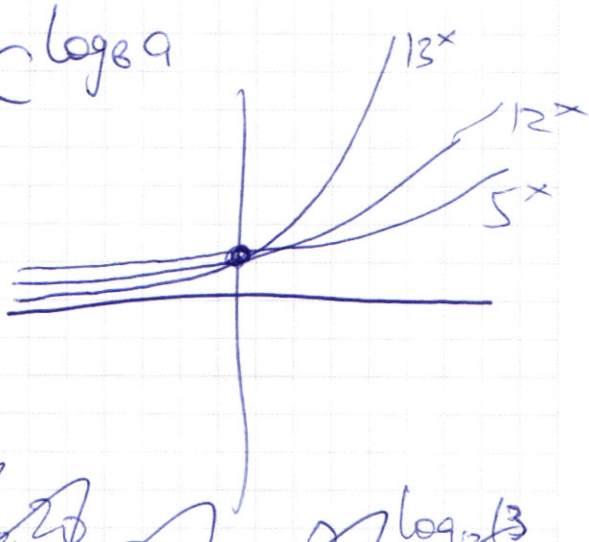
$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$

$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} |t|}$

$\boxed{t \geq 0.}$

$a^{\log_b c} = b^{\log_b a \cdot \log_b c} = c^{\log_b a}$

$\underbrace{5^x + 12^x - 13^x}_{f(x)} \geq 0.$ ↓↓



$\cancel{x\le}$ $\log_{12} t \leq 2$

$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 4 \\ \hline 576 \end{array}$

$t \in [0; 144]$

$\cancel{5^{\log_{12} 20} + 20 \geq 20^{\log_{12} 13}}$

$x^2 + 18x - 144 \leq 0$.

$12 \cdot 12$.

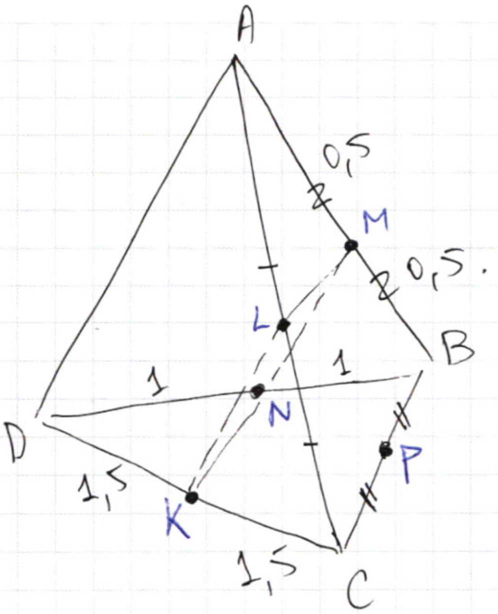
16.

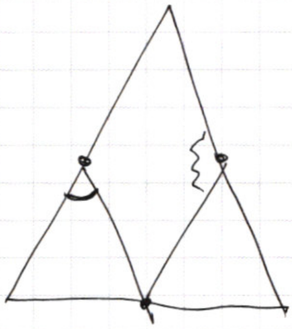
$D = 324 + 576 = 30^2$

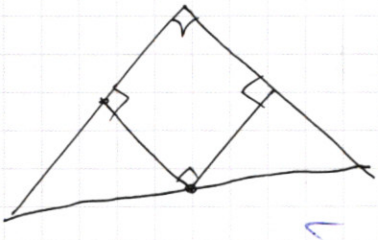
$x_{1,2} = \dfrac{-18 \pm 30}{2} = -24$ или 6.

$2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{3}{5}$

$2\cos^2\alpha = \frac{2}{5}$ $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

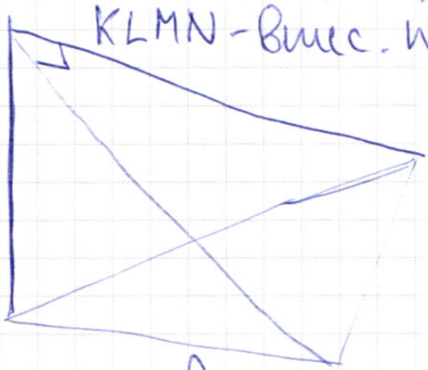


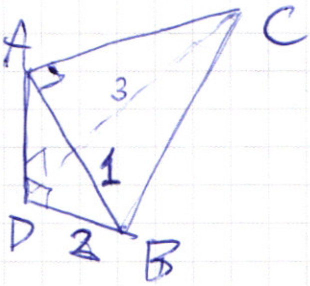


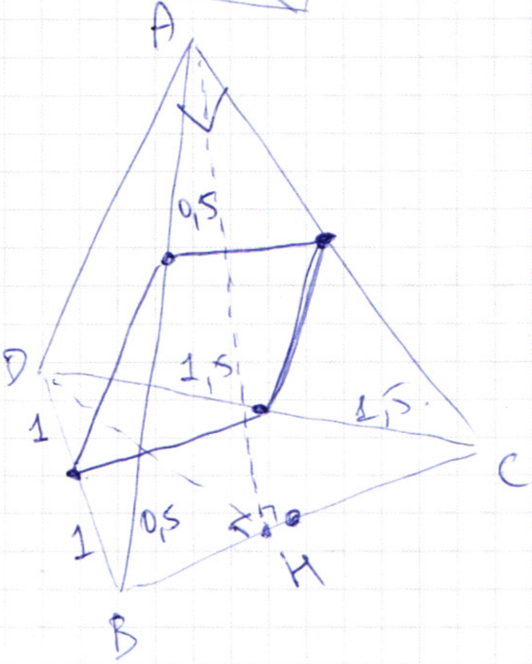


ALMP - Впис ⟹ ∠CAB - прямой

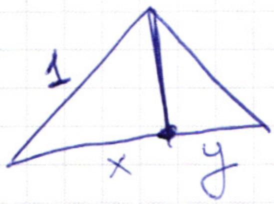
KLMN - Впис. пар - мм ⟹ ~~AD ⊥ BC~~ AD ⊥ BC







AH ⊥ BC



$$\frac{1}{x}=\frac{x+y}{1}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{r}{2R}=\frac{8}{25} \Rightarrow r=\frac{16R}{25}.$

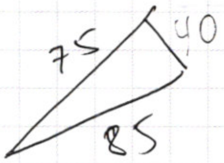
$17^2=2(R-r)\cdot 2R \to 17^2=4R\left(\cdot\frac{9}{25}R\right)$

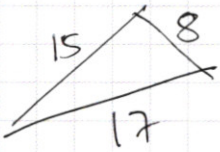
$17^2=2^2\cdot R^2\cdot\frac{3^2}{5^2}.$

$17=\frac{6}{5}R \Rightarrow R=\frac{85}{6}.$ 1

$\Rightarrow r=\frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{25}_{5}}\cdot\frac{\cancel{85}^{17}}{\cancel{6}_{3}}=\frac{136}{15}.$

$\frac{85}{3}$

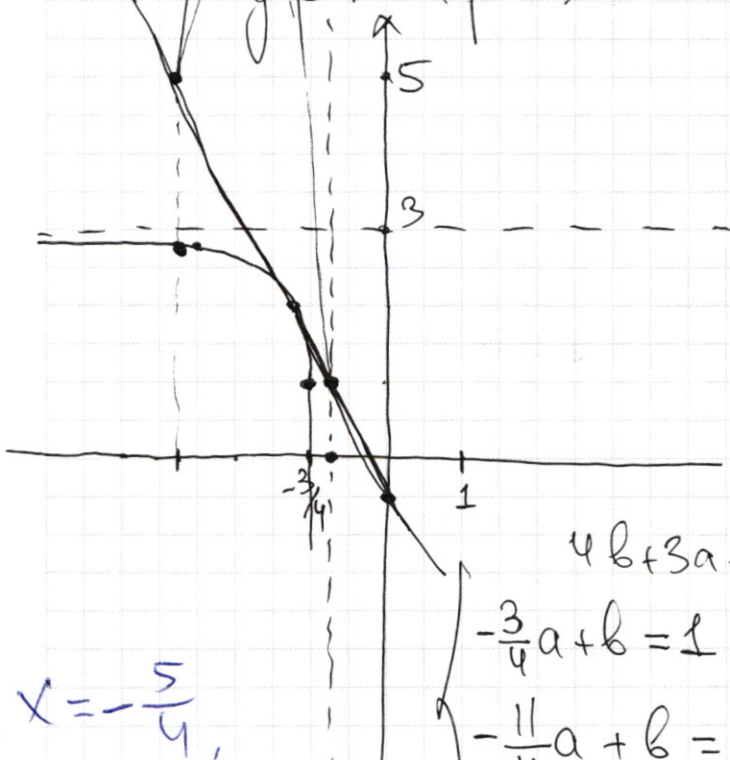




$\frac{3}{\sqrt{34}}$ $\frac{5}{\sqrt{34}}.$

$\frac{3}{34}$ $\frac{25}{34}.$

EF - диаметр $\Rightarrow EF=2R=\frac{85}{3}.$



$\frac{12x+11}{4x+3}=ax+b.$

$12x+11=(ax+b)(4x+3)$

$12x+11=4ax^2+4bx+3ax+3b.$

$4ax^2+(4b+3a-12)x+(3b-11)=0.$

$4b+3a-12$

$\begin{cases}-\frac{3}{4}a+b=1\\ -\frac{11}{4}a+b=5\end{cases} \to \begin{cases}4b-3a=4\\ 4b-11a=20\end{cases}$

$a=-2$

$b=\cancel{2{,}5}.$

$b=-0{,}5.$

$x=-\frac{5}{4}.$

$12x+11=-\left(2x+\frac{1}{2}\right)(4x+3)$

$24x+22=-(4x+1)(4x+3)$

$16x^2+16x+3+24x+22=0$

$16x^2+40x+25=0.$

$(4x+5)^2=0.$