МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 2

$\cancel{x-y} = \begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ (x^2-4x+4)+(9y^2-18y+9)=12+4+9 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

Пусть $(x-2)=a$, $(y-1)=b$, тогда:

$a-2b=x-2y$ и:

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ (возвёл в кв. обе части)

$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2-25=0 \end{cases}$ Сложим почленно ур-ия:

$2a^2-5ab+13b^2-25=0$ (*)

~~Решим ур-ие (*) отн-но~~ a!

$\cancel{D=(-5b)^2-4\cdot 2\cdot(13b^2-25)=25b^2-8\cdot 13b^2+8\cdot 25=}$

$\cancel{=25b^2-104b^2+200=-99b^2+200=-79b^2+200}$

Подставим вместо нововведённых переменных a и b изначальные $(x-2)$ и $(y-1)$

$2(x-2)^2-5(x-2)(y-1)+13(y-1)^2-25=0$

$2x^2-8x+8-5(xy-2y-x+2)+13(y^2-2y+1)-25=0$

$2x^2 - 8x - 5xy + 10y + 5x - 10 + 13y^2 - 26y + 13 - 25 + 8 = 0$

$2x^2 - x(8 + 5y - 5) + 13y^2 - 16y - 14 = 0$

$2x^2 - x(3 + 5y) + 13y^2 - 16y - 14 = 0$

Решим ур-ие отн-но x:

$D = (-(3+5y))^2 - 8\cdot(13y^2 - 16y - 14) =$

$= 9 + 30y + 25y^2 - 104y^2 + 123y + 112 =$

$= -79y^2 + 153y + 121$

$x = \dfrac{3+5y \pm \sqrt{D}}{4}$ ...

Вернёмся к системе $\begin{cases} a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 - 25 = 0 \end{cases}$:D

Решим первое ур-ие отн-но a:

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$

$D = 25b^2 - 16b^2 = 9b^2 = (3b)^2$

$a_1 = \dfrac{5b + 3b}{2} = 4b$ или $a_2 = \dfrac{5b - 3b}{2} = b$

$\begin{cases} a^2 + 9b^2 - 25 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = b \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 16b^2 + 9b^2 - 25 = 0 \\ a = 4b \end{cases} \\ \begin{cases} b^2 + 9b^2 = 25 \\ a = b \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = \pm 1 \\ a = 4b \end{cases} \\ \begin{cases} b = \pm\sqrt{2,5} \\ a = b \end{cases} \end{array}\right.$

Тогда: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 1 \\ a = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -1 \\ a = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} b = \sqrt{2,5} \\ a = \sqrt{2,5} \end{cases} \\ \begin{cases} b = -\sqrt{2,5} \\ a = -\sqrt{2,5} \end{cases} \end{array}\right.$ Вернёмся к x и y: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 = 4 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 = -4 \\ y - 1 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 = \sqrt{2,5} \\ y - 1 = \sqrt{2,5} \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 = -\sqrt{2,5} \\ y - 1 = -\sqrt{2,5} \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} & \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} & \text{не удов } x \geq 2y \\ \begin{cases} x = \sqrt{2,5} + 2 \\ y = \sqrt{2,5} + 1 \end{cases} & \text{не удов } x \geq 2y \\ \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2,5} \\ y = 1 - \sqrt{2,5} \end{cases} & \end{array}\right.$

Но из самого первого ур-ия первой системы видно, что чтобы были корни нужно, чтобы $x - 2y \geq 0$, т.е. $x \geq 2y$

Проверка: $6 \geq 2\cdot 2 = 4$, верно $\quad -2 \geq 0\cdot 2$, неверно

$\sqrt{2,5} + 2 \geq 2\sqrt{2,5} + 2$, неверно $\quad 2 - \sqrt{2,5} \geq 2 - 2\sqrt{2,5}$, верно

Т.о. Ответ: $(6; 2)$, $(2 - \sqrt{2,5}; 1 - \sqrt{2,5})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 5

1 – рац. число, полож. $D_f = \mathbb{Q}_+$ (полож. рац.)

Пусть a – любое полож. целое число. $\Rightarrow \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}_+$

~~Зн.~~ Тогда: $f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a})$ (*) по св-ву ф-ции f.

$\forall$ число 6 (полож. рац.)

$f(6) = f(3) + f(2)$, но 2 и 3 – простые и $f(p) = [\frac{p}{4}] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(2) = f(3) = 0$, зн., $f(6) = 0$

Но $\underset{0}{f(6)} = f(1) + \underset{0}{f(6)} \Rightarrow f(1) = 0$

Тогда подставляя в (*) получим:

$0 = f(a) + f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$\forall$ произвольные числа m и n $\in \mathbb{N}$

Тогда: $f(\frac{m}{n}) = f(m \cdot \frac{1}{n}) = \left| \frac{1}{n}, m \in D_f \right| = f(m) + f(\frac{1}{n})$,

но по док-ному выше: $f(\frac{m}{n}) = f(m) - f(n)$ (**)

По условию:

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

, где p – простое

Но из основной Т алгебры любое натур число n можно разложить на простые мн-тели $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$ ~~в какой степени~~ ~~Пусть~~ Возьмём любое натур. число n, тогда оно равно произведению его простых делителей, но по св-ву ф-ции f число $f(n)$ можно ~~разбить~~ представить в виде суммы f от одного простого делителя n и f от остальных, а f от остальных можно можно представить в виде суммы f от одного простого и т.д.

~~Т.о. любое натур. число~~ мож

Т.о. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(n) = f(a) + f(b) + f(c) + \ldots$, где a, b, c и т.д. – ~~все др~~ простые делители числа n.

Тогда по док-ному рав-ву (**) для $\forall$ натур x и y $f\left(\frac{x}{y}\right)$ равно разности ~~ft~~ сумм f от простых дел. x и f от простых дел-телей y.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Д $\forall K \in \mathbb{N}$:

k ~~x~~ ~~y~~	Разложение на простые	f(k)	f(k) через $\sum f(p_i^{a_i})$	f(k)
1	—	f(1)	0	0
2	2	f(2)	0	0
3	3	f(3)	0	0
4	2·2	f(2)+f(2)	0	0
5	5	f(5)	1	1
6	2·3	f(2)+f(3)	0	0
7	7	f(7)	1	1
8	2·2·2	f(2)·3	0·3=0	0
9	3·3	f(3)+f(3)	0	0
10	2·5	f(2)+f(5)	0+1=1	1
11	11	f(11)	2	2
12	2·2·3	f(2)·2+f(3)	0·2+0=0	0
13	13	f(13)	~~f~~ 3	3
14	2·7	f(2)+f(7)	0+1=1	1
15	5·3	f(3)+f(5)	0+1=1	1
16	2·2·2·2	f(2)·4	0·4=0	0
17	17	f(17)	4	4
18	2·3·3	f(3)·2+f(2)	0·2+0=0	0
19	19	f(19)	4	4
20	2·5·2	f(2)·2+f(5)	0·2+1=1	1
21	3·7	f(3)+f(7)	0+1=1	1
22	2·11	f(2)+f(11)	0+2=2	2
23	23	f(23)	5	5
24	2·2·2·3	f(2)·3+f(3)	0·3+0=0	0

„0" – ~~4~~ 11

„1" – 7

„2" – 2

„3" – 1

„4" – 2

„5" – 1

Σ = 24, 24=24, верно

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$. По таблице найдем кол-во пар.

$f(x)=0$:

$0<1$, $0<2$, $0<3$, $0<4$, $0<5$

видов ~~пар~~ y: $7 + 2 + 1 + 2 + 1 = 13$

$f(x) = 1$:

$1<2$, $1<3$, $1<4$, $1<5$

видов y ~~пар~~: $2 + 1 + 2 + 1 = 6$

$f(x) = 2$: $(2<3, 2<4, 2<5)$

видов y: ~~пар~~ : $1+2+1 = 4$

$f(x)=3$: $(3<4, 3<5)$

видов y: ~~пар~~ $2+1 = 3$

при $f(x)=4$ видов y : 1

при $f(x)=5$ видов y : 0

Т.о. всего пар $(x;y) = 11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 143 + 42 + 8 + 5 = 193 + 5 = 198$ Ответ: 198 пар

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{\text{Задача № 1}}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Р второе ур-ие:

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

~~$\sin((2\alpha+2\beta$~~ $\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(2\cdot\cos^2 2\beta - 1) + 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\cos 2\beta\left(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha\right) - \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\cdot\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Р первое ур-ие:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\underbrace{\cos 2\beta}_{\frac{2}{\sqrt{5}}} + \overbrace{\sin 2\beta}^{\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Пусть 2β в I четверти, тогда $\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad | \cdot\sqrt{5}$

$2\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\cdot 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cdot\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha(2\cdot\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$ или $2\cdot\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$\underline{\cos\alpha = 0 \quad \text{или}}$

Тогда $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ не опр.

$2\cdot\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha \neq 0$

$2 tg\alpha + 1 = 0$

$tg\alpha = \frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Теперь пусть 2β в IV четверти, тогда $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big| \cdot\sqrt{5}$$

$$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1 \qquad \cancel{\Big| : \cos^2\alpha \neq 0}$$ ~~, иначе тангенс не опр.~~

$$\cancel{4\cos\alpha} - \cancel{4\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2} = 0$$

$$2\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha - 2 = 0$$

$$\cos^2\alpha - 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2 = 0$$

Решим отн-но $\cos\alpha$:

$$D = 4\sin^2\alpha - 8 = 4(\sin^2\alpha - 2)$$

$$4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cdot\cos^2\alpha - 2 = 0$$

$$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha - \underbrace{1}_{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 0$$

$$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0 \qquad \cancel{\Big| : \cos^2\alpha}$$

При $\cos\alpha = 0$ $\sin\alpha = 0$, что противоречит $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Тогда поделим на $\cos^2\alpha \neq 0$ ур-ие

$$2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1 - \mathrm{tg}^2\alpha - 1 = 0$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2 = 0$$

Решая отн-но $\mathrm{tg}\,\alpha$ получим, что $D = 4 - 8 < 0$, т.е. корней нет

Итак, остается $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$, а тогда $|x^2+18x| = x^2+18x$

~~Пусть $x^2+18x=a>0$, тогда:~~

$\cancel{5^{\log_{12}a} + a \geq}$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

Пусть $x^2+18x = a>0$

$$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}a} + 12^{\log_{12}a} \geq 13^{\log_{12}a}$$ ~~, а т.к. $12=\sqrt{13^2-5^2}$~~, то

$\cancel{5:t.}\ \cancel{5^{\log_{12}a} + 12^{2\log_{12}\sqrt{a}} \geq 13^{\log_{12}a}}$

$\cancel{5^{\log_{12}a} + (13^2-5^2)^{\log_{12}\sqrt{a}} \geq 13^{\log_{12}a}}$

$\cancel{(13^2-5^2)^{\log_{12}\sqrt{a}} \geq 13^{2\log_{12}\sqrt{a}} - 5^{2\log_{12}\sqrt{a}}}$

Пусть ~~$\log_{12}\sqrt{a}$~~ $\log_{12}\sqrt{a} = t$, тогда

$\cancel{12^t \geq\ 144^t \geq 13\ 169^t - 25^t}$

$\cancel{169^t}\ \cancel{(169-25)^t \geq 169^t - 25^t}$

Т.к. $13^2 = 12^2+5^2$, то

$$5^{2\cdot\log_{12}\sqrt{a}} + 12^{2\cdot\log_{12}\sqrt{a}} \geq (12^2+5^2)^{\log_{12}\sqrt{a}}$$

Пусть $\log_{12}\sqrt{a}=t$, тогда:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$25^t + 144^t \geq (144+25)^t$

А это верно только для $t \leq 1$

Д-ть это можно так: если $t>1$, то в правой части ~~б~~ точно будет $144^t + 25^t$ + ещё что-то положительное, ~~тогда~~ (согласно тр-ку Паскаля) и получится, что левая часть всегда меньше $(144+25)^t$ при $t>1$.

Для $t \leq 1$ ситуация наоборот, т.к. будет корень $\frac{1}{t}$-ой степени. Даже если подставлять, то верно:

при $t = \frac{1}{2}$ $\quad 25^{\frac{1}{2}} + 12^{2\cdot\frac{1}{2}} \geq 13^{2\cdot\frac{1}{2}}$

$5 + 12 \geq 13$, верно

при $t = 0$ $\quad 1 + 1 \geq 1$, верно

при $t=-1$ $\quad \frac{1}{25} + \frac{1}{144} \geq \frac{1}{169}$, верно, т.к. $\frac{1}{25} > \frac{1}{169}$

Т.о. ~~Это~~ ~~б~~ даже для $t<0$ всё верно.

Т.о. решение – $t \leq 1$

Т.е. $\log_{12}\sqrt{a} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\log_{12} a \leq 1$

$\log_{12} a \leq 2$

$\log_{12} a \leq \log_{12} 12^2$

$a \leq 12^2$

Замена a на x^2+18x:

$x^2+18x \leq 12^2 = 144$

$x^2+18x-144 \leq 0$

$D = 18^2 + 2^2\cdot 12^2 = 324 + 288 = 612$

~~$x_1 = \frac{-18+\sqrt{612}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{-18-\sqrt{612}}{2}$~~

~~$\left(x - \frac{\sqrt{612}-18}{2}\right)\left(x + \frac{18+\sqrt{612}}{2}\right)$~~

$x_1 = \cancel{\frac{-18+3\sqrt{17}}{}}\ \frac{-18+6\sqrt{17}}{2} = 3\sqrt{17}-9 \qquad x_2 = -3\sqrt{17}-9$

Т.о. $x \in [-3\sqrt{17}-9;\ 3\sqrt{17}-9]$, ~~x≠0~~

~~Ответ:~~ Но $x^2-18x>0 \Rightarrow x(x-18)>0 \Rightarrow x \in (-\infty;0] \cup (18;+\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3 (продолжение)

$$\begin{cases} x \in [-3\sqrt{17}-9;\ 3\sqrt{17}-9] \\ x \in (-\infty;0) \cup (16;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3\sqrt{17}-9;\ 0)$$

Ответ: $x \in [-3\sqrt{17}-9;\ 0)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

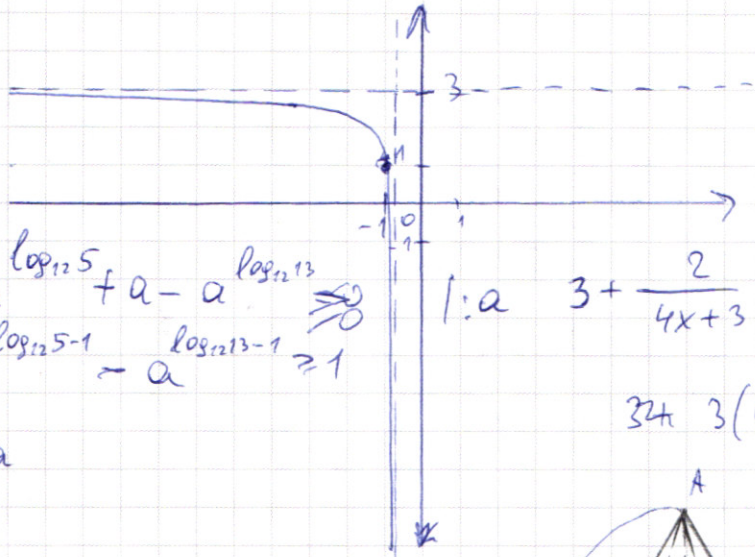
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{-30}{-16} = \frac{15}{-8}$



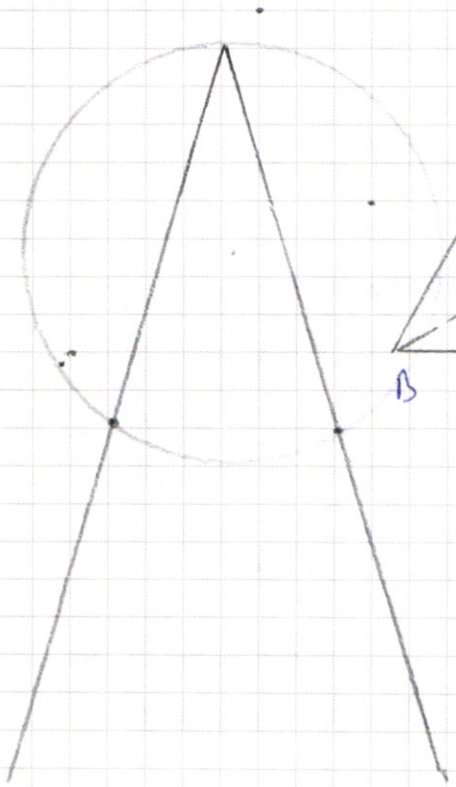
$a^{\log_{12}5} + a - a^{\log_{12}13} \geq 0$ $\quad |:a$

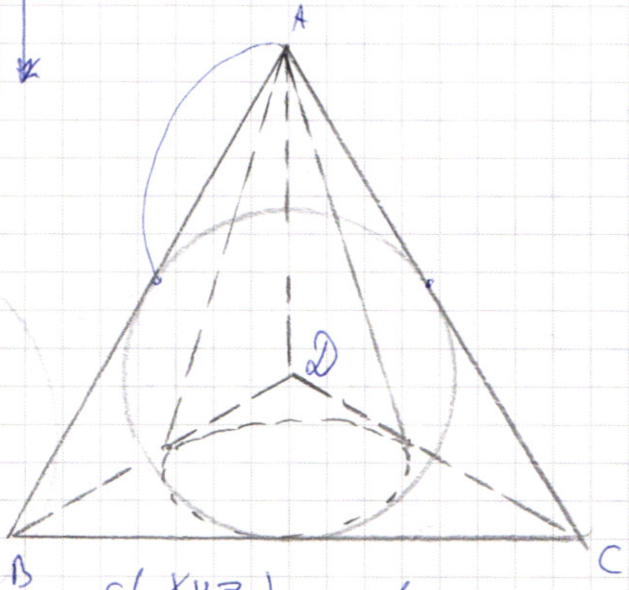
$a^{\log_{12}5-1} - a^{\log_{12}13-1} \geq 1$

a

$3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax+b \quad |\cdot 4x+3$

$3(4x+3) + 2 \leq (4x+3)(ax+b)$





$f\left(\frac{xyz}{abc}\right) = f(xyz) - f(abc) =$

$= f(x) + f(y) + f(z) - f(a) - f(b) - f(c)$

где x, y, z, a, b, c – простые

т.е

$D f = \mathbb{Q}_{+}$

$\forall\, a, b \in \mathbb{Q}_{+}: \quad f(ab) = f(a) + f(b)$

p – любое простое число

$f(p) = [p/4]$

$x, y \in \mathbb{N}: \quad 1 \le x \le 24 \quad$ и $\quad 1 \le y \le 24 \qquad f(x/y) < 0$

$x = 6$
$y = 2$

$f\left(\frac{6}{2}\right) = 0$

$f\left(\frac{6}{2}\right) = f(3 \cdot 2) + f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$= \underset{0}{f(3)} + \underset{0}{f(2)} + \underset{0}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$

Ну начнем с того, что $\frac{1}{y} = \mathbb{Q}_{+} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad f(x/y) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

При $\quad x = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$:

$f(2) = f(3) = 0 \qquad f(11) = 2 \qquad f(17) = 4 \qquad f(23) = 5$

$f(5) = f(7) = \cancel{0}\, 1 \qquad f(13) = 3 \qquad f(19) = 4$

Число $\frac{x}{y}$ ~~–~~ будет простым, если $x \ge y$ и

$f\left(\frac{1}{10}\right) = -1$

$f(6) = \underset{0}{f(3)} + \underset{0}{f(2)} = f(1) + f(6)$

$f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \cancel{f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right)} = \underset{0}{f(2)} + f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2$

$f\left(\frac{1}{5}\right) = \cancel{f(4) + f}\left(\frac{1}{5}\right)$

$= f(2) + f\left(\frac{1}{10}\right)$

$\cancel{f(14)} \quad f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(30) = f(15) + f(2) = 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \underset{1}{f(5)} + f\left(\frac{1}{10}\right)$

$\cancel{f\left(\frac{1}{14}\right) = f(} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \underset{0}{f} \underset{2}{(11)} + f\left(\frac{1}{22}\right)$

$\underset{0}{f(1)} = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{22}\right) = -2$

$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{15}\right) = -f(15) = -f(5) - f(3) = -1$

$f(2) = f(2a) + f$

$f\left(\frac{1}{25}\right) = -f(25) = -f(5) \cdot 2 =$

$f\left(\frac{x}{abcd}\right) = -f(abcd) = -\left(f(ab) + f(cd)\right) = -\left(f(a) + f(b) + f(c) + f(d)\right)$

$36 + 36 - 24 - 36 = 12$

$2 = \sqrt{12 - 6 - 4 + 2} = 2$

$7{,}5\sqrt{2{,}5} = 2{,}5 + \ldots$, верно

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad$ sin($\quad$ $|\cos(summ)| = \sqrt{1-\sin^2(summ)} = \sqrt{1-\frac15} = \frac{2}{\sqrt5}\cdot x$

$\sin(2\alpha+4\beta) \neq \sin 2\alpha = -\frac45$

$\sin(\cancel{(2\alpha+2\beta+2\beta)}) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin2\beta + \sin 2\alpha = -\frac45$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta + \frac{2x}{\sqrt5}\cdot\sin2\beta + \sin2\alpha = -\frac45$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$ $\quad$ $79+25 = 104$

$x \geq 2y$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$(x^2-4x+4)+(9y^2-2\cdot3y\cdot3+9) = 12+4+9$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$11a^2-140 = 9a\sqrt{a^2+20}$

$121a^4+140^2-11\cdot280a^2 = \cancel{=81a}$

$81a^4 + 81\cdot a^2\cdot 20$

$x(y-1)-2(y-1) = \sqrt{(y-1)(x-2)} = x-2y$

Пусть $(y-1)=a$; $(x-2)=b$ $\quad$ $40a^4$

Т-гда: $\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ $\quad$ $\cancel{b^2-4ab+4a^2=ab}$

$b=\sqrt{ab}+2a$

$b^2-4ab+4a^2=ab$ $\quad$ $a^2+9(ab+4a^2+4a\sqrt{ab})=25$

$b^2-5ab+4a^2=0$

$a^2+9b^2=25$ $\quad$ $37a^2+a(9b+4\sqrt{ab})$

$2x^2-8x-5xy+10y+5x-10+13y^2-26y+13-25+8=0$

$9b^2-25+5ab-4b^2=0$ $\quad$ $a^2+\frac92a^2-\frac92a\sqrt{a^2+20}-45 = \cancel{0} -25 = 0 \;/\cdot2$

$5b^2+5ab-25=0$ $\quad$ $11a^2-9a\sqrt{a^2+20}-140=0$

$b^2+ab-5=0$

$D = a^2+20$ $\quad$ $b_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2+20}}{2}$ $\quad$ $b_1^2 = \frac{a^2+20+a^2-2a\sqrt{a^2+20}}{4} =$

$= \frac{a^2-a\sqrt{a^2+20}+10}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$3+4+5+5+5+5+6=33$

$5+12 \geq 13$

$t=-1$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$\frac{1}{25}+\frac{1}{144} \geq \frac{1}{169}$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x|=x^2+18x$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5}+(x^2+18x)-(x^2+18)^{\log_{12}13} \geq 0$

Пусть $x^2+18x=a>0$

$17 \cdot 8 = 80+56 = 136$

$a^{\log_{12}5}+a^{\log_{12}12}-a^{\log_{12}13} \geq 0 \quad (*) \quad \Big| : a^{\log_{12}5}$

$\cancel{a\left(a^{\log_{12}5-1}+1\right.}$ $\cancel{a(\lg}$ $a^{\log_{12}5}+a^{\log_{12}12} \geq a^{\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}5}\left(1+a^{\log_{12}12/\log_{12}5}\right)=a^{\log_{12}5}\left(1+a^{\log_5 12}\right.$

$\frac{225}{8}-\frac{136}{8}=\frac{89}{8}$

$6^2-17 =$

$1+a^{\log_5 12}-a^{\log_5 13} \geq 0$

$306 \cdot 2$

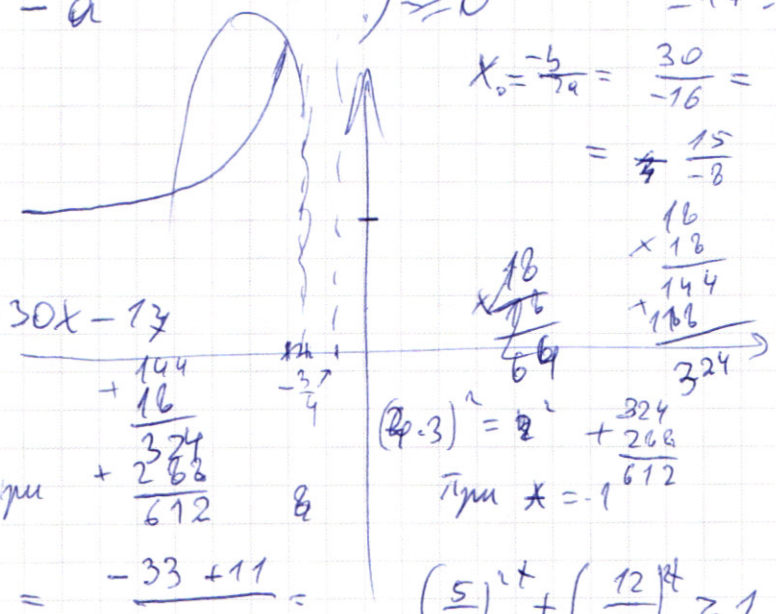
$153 \cdot 2^2$

$3 \cdot 2^2 \cdot 51 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 17$

$y_0=-\frac{225}{8}+\frac{225}{4}-17=$

$a^{\log_{12}5}\left(1+a^{\log_{12}12-\log_{12}5}-a^{\log_{12}13-\log_{12}5}\right) \geq 0$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{30}{-16}=\frac{15}{-8}$



№6

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$18 \cdot 18 = 144 + 180 = 324$

$\frac{12x+9+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$

$144+180=324$, $324+288=612$

$(4 \cdot 3)^2 = 12^2$

$324+288=612$

При $x=-1$

При $x=-\frac{11}{4}$ $\quad \frac{12x+11}{4x+3}=\frac{-33+11}{-11+3}=$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{2t}+\left(\frac{12}{13}\right)^{2t} \geq 1$

$(x-y)^a=x^a+y^a$

$\frac{25^t+144^t}{169^t} \geq 1$

306

$25^t+144^t \geq 2\sqrt{25 \cdot 144^t}=2(5 \cdot 12)^t=$

$=2 \cdot 60^t$

$25^t+144^t \geq (144+25)^t$

$1+\left(\frac{12}{5}\right)^{2t} \geq \left(\frac{13}{5}\right)^{2t}$

$1 \geq \left(\frac{13}{5}\right)^{2t}-\left(\frac{12}{5}\right)^{2t}=\frac{169^t-12^t}{25^t}$

$> \frac{1}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^{\log_{12}5} + a \geq a^{\log_{12}13}$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$

$a \leq a^{\log_{12}5} - a^{\log_{12}13}$ Пролог по $\log_a$

$1 \leq \log_a(a^{\log_{12}5} - a^{\log_{12}13})$ если ~~sin~~ $2\alpha+2\beta$ в IV:

$\log_x y \geq 1$, если $y \geq x$ $= \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\frac{1}{\sqrt5}(2\cdot\sin 2\beta - \cos 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $tg^2\alpha = \frac{1-\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$4\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta -$

~~sin2α +~~ $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta - \cancel{\sin 2\alpha} + 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha \cancel{+\sin 2\alpha} = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\cos 2\beta(\cancel{2}\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\beta + \cos 2\alpha)$

$\cos(2\alpha+2\beta)$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)