



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = 12$ ,  $BD = 13$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $4 \leq x \leq 28$ ,  $4 \leq y \leq 28$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $(\frac{2}{3}; 2]$ .

7. [6 баллов] Дана пирамида  $TXYZ$ , вершина  $Y$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $TU$ . Известно, что  $XU = \sqrt{3}$ ,  $TX = \sqrt{2}$ ,  $TZ = 2$ . Найдите длину ребра  $XZ$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

П.к.  $\operatorname{tg} \alpha$  определён  $\Rightarrow \cos \alpha \neq 0$

Преобразуем левую часть второго равенства по формуле суммы синусов

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta$$

П.к. изначальное значение левой части и значение  $\sin(2\alpha + 2\beta)$  известны, подставим их

$$\frac{-2}{\sqrt{17}} \cos 2\beta = \frac{-2}{17} \quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Распишем синус суммы первого выражения

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha. \text{ Рассмотрим 2}$$

случая

1)  $\sin 2\beta \geq 0$ , тогда по осн. триг. тождеству

$\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ . Подставим известные величины в первое выражение  $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4 \cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$   $\sin 2\alpha + 4 \cos 2\alpha = -1$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\text{Тогда} \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha + 8 \cos^2 \alpha - 4 = -1 \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha + 8 \cos^2 \alpha - 3 = 0$$

$$-3 = -3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \Rightarrow -3 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha = 0. \text{ Разделим}$$

на  $\cos^2 \alpha$ , т.к. оно не равно 0 и получим

$$-3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha + 5 = 0. \text{ Заметим, что решение является}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = -1 \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3} \end{cases}$$



2)  $\sin 2\beta \leq 0$ , тогда  $\sin 2\beta = \frac{-4}{\sqrt{17}}$

Проведём аналогичные с первым пунктом действия

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{4 \cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha - 4 \cos 2\alpha = -1 \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 4 = -1$$

$5 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha = 0$ , поделим на  $\cos^2 \alpha$

$$5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - 3 = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = -1 \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Таким образом,  $\operatorname{tg} \alpha$  принимает всего 3 значения, а их хотя бы 3 по условию  $\Rightarrow$  все подходят

Ответ:  $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$

### Задача 2

Введём замену

$$x-1=a$$

$$y-6=b$$

вид

$$\begin{cases} b-6a = 5ab \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

тогда система примет вид  
Заметим, что  $ab \geq 0$ , иначе  $5ab$  не определён

Возведём первое в квадрат  $b^2 - 12ba + 36a^2 = ab$

$$b^2 + 36a^2 = 13ab, \text{ ~~опять возведём в квадрат~~}$$

т.к.  $9a^2 + b^2 = 90 \Rightarrow b^2 + 36a^2 = 90 + 27a^2 = 13ab$  возведём в квадрат  
опять  $90^2 + 3^6 a^4 + 180 \cdot 27a = 169a^2 b^2$   $b^2 = 90 - 9a^2$ , под-

ставим  $90^2 + 3^6 a^4 + 180 \cdot 27a = 169a^2 (90 - 9a^2) \quad | :9$

$$810 + 81a^4 + 540a = 169a^2 (10 - a^2)$$

$$250a^4 - 1150a^2 + 900 = 0$$

$5a^4 - 23a^2 + 18$ , решая относительно  $a^2$  получим

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = 3,6 \end{cases}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \\ a = \sqrt{3,6} \\ a = -\sqrt{3,6} \end{cases}$$

Из равенства  $9a^2 + b^2 = 90$ , найдём  $b$  и отбросим лишние, т.к.  $ab \geq 0$  из ограничений

$$\begin{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = -9 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \sqrt{3,6} \\ b = \sqrt{57,6} = 4\sqrt{3,6} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\sqrt{3,6} \\ b = -\sqrt{57,6} = -4\sqrt{3,6} \end{cases} \end{cases}$$

П.к.  $b - 6a \geq 0 \Rightarrow$  как не подойдут 2 и 3 пары решений  $\Rightarrow$  как подойдут

П.к.  $x = a + 1 \quad y = b + 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 18 \\ x = 1 - \sqrt{3,6} \\ y = 9 - 4\sqrt{3,6} \end{cases}$$

Ответ:  $(2; 18); (1 - \sqrt{3,6}; 9 - 4\sqrt{3,6})$

Задача 3

$$|x^2 - 26x| \log_5 12 + 26x \geq x^2 + 13 \log_5 (26x - x^2)$$

П.к. из ОДЗ  $26x - x^2 > 0 \Rightarrow$

$|x^2 - 26x| = 26x - x^2$ . Докажем, что на ОДЗ:  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

логарифмируем обе части по осн.  $b$  и получим

$$\log_b a \log_b c = \log_b c \cdot \log_b a, \text{ т.к. } a \Rightarrow \text{на ОДЗ}$$

$$13 \log_5 (26x - x^2) = (26x - x^2) \log_5 13$$

$$26x - x^2 \geq (26x - x^2) \log_5 13 - (26x - x^2) \log_5 12$$

ОДЗ:  $|x^2 - 26x| \geq 0$

$\log_5 (26x - x^2) > 0$



$$3x-2 > 0$$

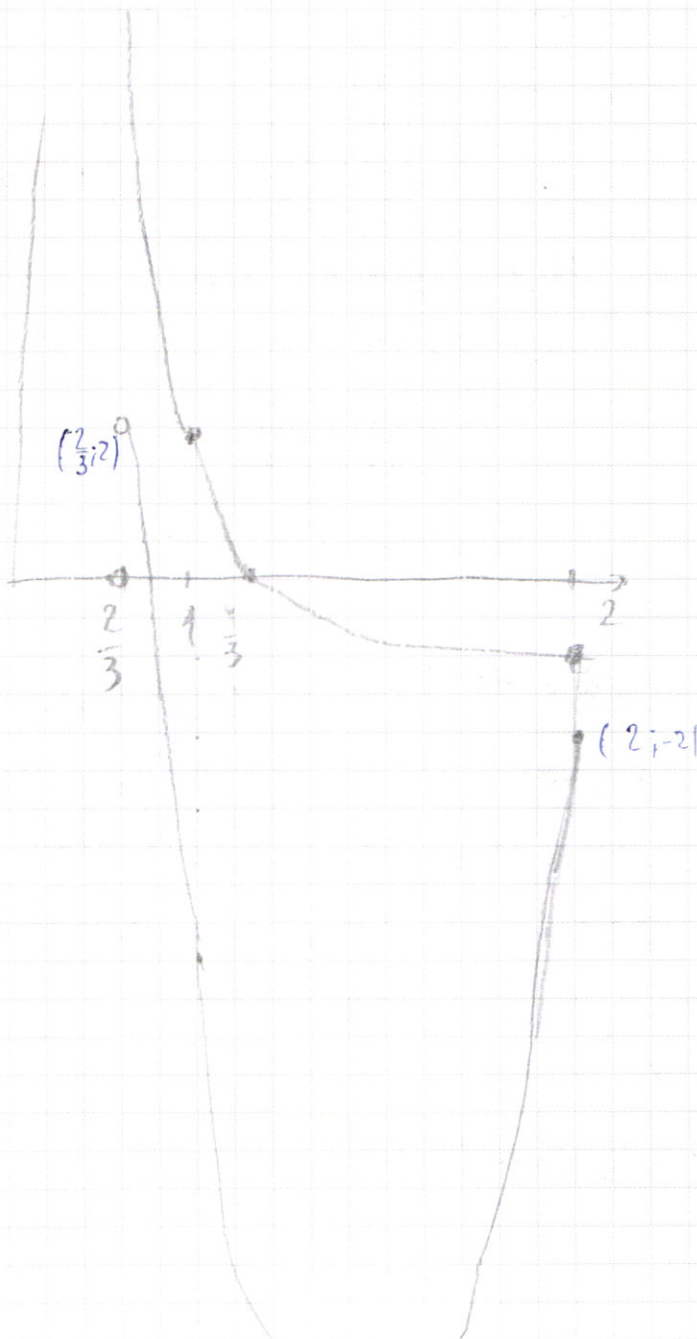
$$18x^2 - \frac{17}{6}x$$

$$8-6x \geq 3ax^2 + (3b-2a)x - 2b$$

$$0 \geq 3ax^2 + (3b-2a)x - 2b-8$$

$$-2 + \frac{4}{3x-2} \geq ax+b$$

$$\frac{4}{(3x-2)} \geq ax+b$$



$$\frac{51}{36} = \frac{17}{12}$$

$$18 \cdot \frac{289}{144} = \frac{289}{4}$$

$$- \frac{18 \cdot 289}{144} =$$

$$= \frac{-3 \cdot 289}{24} = \frac{-289}{8}$$

$$\frac{ax+b}{3}$$

$$\frac{2}{3}a + b = 2$$

$$2a + b = -2$$

$$a \frac{4}{3} = -4$$

$$a = -3$$

$$b = 4$$

$$-3x + 4 = \frac{(8-6x)}{3x-2}$$

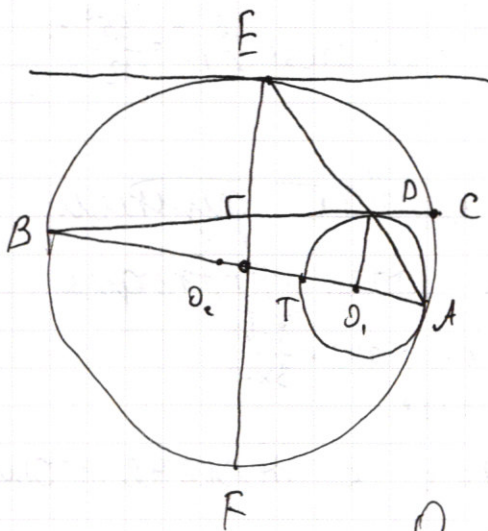
$$-9x^2 + 18x - 8 = 8 - 6x$$

$$9x^2 - 24x + 16$$

$$(3x-4)^2 = 0$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача



Сделаем в т.А шмотенку так, чтобы  $\omega \rightarrow \Omega$ , тогда  $D \rightarrow E \Rightarrow BC$  перейдет в касательную через т.Е  $\parallel BC \Rightarrow$  касательная через Е параллельна  $BC \Rightarrow E$  - середина дуги  $BC$ .

$O_1$  - центр  $\omega \Rightarrow O_1 D \perp BC$ , т.к.  $AB$  - диаметр  $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow O_1 D \parallel AC$

То есть м. Палеса  $\frac{BO_1}{O_1 A} = \frac{BC}{CD}$

$$\frac{BO_1}{O_1 A} = \frac{BC}{CD}$$

Пусть радиус  $\Omega R$  и радиус  $\omega r$ , тогда

$$\frac{2R}{r} = \frac{25}{R}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{24}{25}$$

Затем степень точки

В отн.  $\omega$

$$BT \cdot BA = BD^2 = (2R - 2r)2R = 169$$

$$R(R - r) = \frac{169}{4}$$

$$\frac{R^2}{25} = \frac{169}{4}$$

$$\frac{R}{5} = \frac{13}{2}$$

$$R = \frac{65}{2} = 32,5$$

$$r = R \frac{24}{25} = \frac{65}{2} \cdot \frac{24}{25} =$$

$$= \frac{13 \cdot 12}{5} = 31,2$$

$$AC = \sqrt{4R^2 - BC^2} = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$$

$$\text{т.к. } BE = CE \Rightarrow \angle EFA = 90^\circ - \angle BAE = 90^\circ - \angle CAE$$

$$\text{т.к. } \angle DCA = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \angle CAE = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle CAE = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$$

$$\angle EFA = 90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = 90^\circ - \operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow \angle EFA = \operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{26}}$$



$$S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = 2R^2 \cdot \sin \angle AEF \cdot \cos \angle AEF$$

$$\sin \angle AEF = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \cos \angle AEF = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$\sin \angle$

$$S_{AEF} = \frac{65^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Ответ:  $R = 32,5$  ;  $r = 31,2$  ;  $\angle AFE = 90^\circ - \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$  ;  $S = \frac{65^2}{12} \sqrt{5}$

Задача 6

~~Заметим, что левая и правая функции равны -2 в точке 2  $\Rightarrow$   $ax+b$  обяз. проходит через (2; -2)~~

Пусть  $f(x) = ax+b$  ;  $g(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$   
 $h(x) = 18x^2 - 51x + 28$

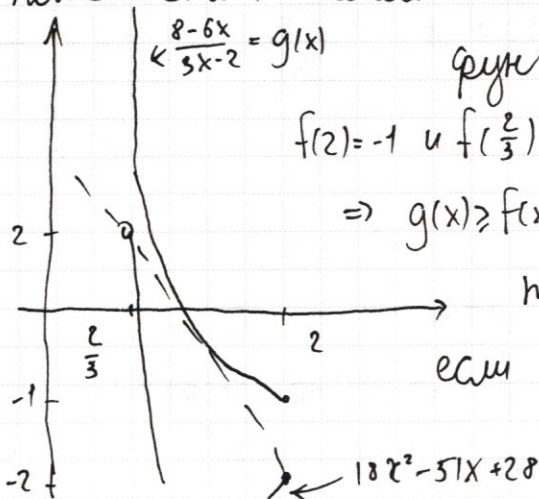
При  $x = \frac{2}{3}$   $\frac{8-6x}{3x-2}$  стремится к бесконечности,

а  $18x^2 - 51x + 28$  равно 2, при  $x=2$   $\frac{8-6x}{3x-2}$  равно

-1, а второе выражение -2

Будем строить  $ax+b$  по пересечению с функциями  $x = \frac{2}{3}$  и  $x=2$ . Заметим, что прямая  $-3x+4$  проходит через  $(\frac{2}{3}; 2)$  и  $(2; -2)$  и касается  $\frac{8-6x}{3x-2} \Rightarrow a=-3$  и  $b=4$  подходят. Васс. коорд.

плоскости (схематично). Тунктурира изображена



функция  $-3x+4$ . Заметим, что, если  $f(2) = -1$  и  $f(\frac{2}{3}) > 2$ , то  $f(x)$  не пересекает  $g(x)$

$\Rightarrow g(x) \geq f(x)$  не всегда; если  $f(\frac{2}{3}) = 2$  и  $f(2) > -1$ ,

то  $f(x)$  опять не пересекает  $g(x)$ ;

если  $f(\frac{2}{3}) > 2$  и  $f(2) > -1$ , то  $f(x)$  опять

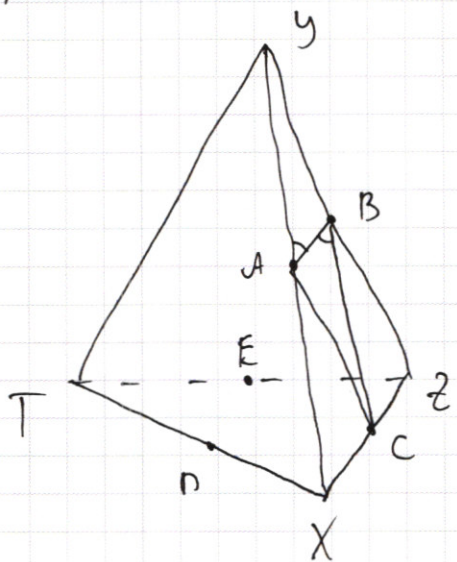
пересекает  $g(x)$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если  $f(\frac{2}{3}) < 2$  или  $f(2) < -2 \Rightarrow f(x)$  пересечёт  $h(x)$   
 $\Rightarrow$  пер-ва не будет выпуклостью  $\Rightarrow$  любая  
 прямая, кроме  $-3x+4$ , не подходит  
 Ответ:  $a=-3$ ;  $b=4$ .

№7.



$A, B, C, D, E$  - середины сторон  
 $YACB$  - параллелограмм, по  
 св-вам ср. линии. Т.к. они  
 в одной плоскости и лежат  
 на одной сфере  $\Rightarrow YABC$  - вписан.  
 параллелограмм  $\Rightarrow YABC$  - прямо-  
 угольник  $\Rightarrow \angle XYZ = 90^\circ$

$ABED$  - тоже прямоугольник, т.к.  $AB \parallel XZ \parallel DE$  и  $AB = DE$   
 и  $ABED$  лежат на одной окр



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \sin 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{2}{17}$$

$$|\cos(2\alpha + 2\beta)| = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$1) \alpha > 0 \quad \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{2}{17}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{5} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - \sin^2 2\alpha} = 5 \sin^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{6}$$

$$4 \sin 2\beta - \cos 2\beta + \sqrt{17} \sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta + 2\beta) + \sin(2\alpha + 2\beta - 2\beta) = 2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta} = \frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta} = -\frac{2}{17}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = \frac{2}{17}$$

$$\frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

sin

$$1) \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} \geq 0 \quad \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha + 8 \cos^2 \alpha - 3 = 0$$

$$5 \cos^2 \alpha + 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha \neq 0$$

$$\sin 2\alpha + 4 \cos 2\alpha = -1$$

$$8 \sin \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha = 0$$

$$\cos \alpha (4 \sin \alpha - \cos \alpha) = 0$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{4}$$

$$-3t^2 + 2t + 5 = 0$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$2) \frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta} < 0 \quad \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\alpha - 4 \sin 2\alpha = -1$$

$$2 \cos^2 \alpha - 4 \sin 2\alpha = 0$$

$$\cos \alpha (\cos \alpha - 4 \sin \alpha) = 0$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{4 \cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha - 4 \cos 2\alpha = 1$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 5 = 0$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha + 5 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = 0$$

$$5t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{3}{5} \end{cases}$$



