МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

ОДЗ: $x^2+18x > 0$

Замена $x^2+18x = t$

$$5^{\log_{12}t} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0$$

$$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} - \cancel{13^{\log_{12}t}}\ 12^{\log_{12}t\cdot\log_{12}13} \geq 0$$

$$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} - 13^{\log_{12}t} \geq 0$$

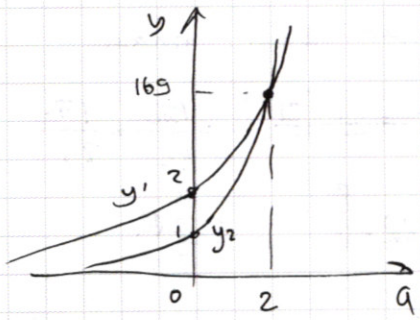
$\log_{12}t = a$

$5^a+12^a \geq 13^a$

$y_1 = 5^a+12^a$ – ~~строго~~ возрастающая функция

$y_2 = 13^a$ – ~~строго~~ возрастающая функция

~~Значит, у графиков y_1 и y_2 не больше одного пересечения~~



~~1. Рассмотрим~~ Можно заметить, что при $a=2$ – ~~корень~~ достигается равенство.

1.) Рассмотрим значения $a<2$

Тогда $b = 2-a > 0$

$$\begin{cases} 5^{2-b}+12^{2-b} = \dfrac{25}{5^b}+\dfrac{144}{12^b} \\ 13^{2-b} = \dfrac{169}{13^b} = \dfrac{25}{13^b}+\dfrac{144}{13^b} \end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5^b} > \dfrac{1}{13^b} \\ \dfrac{1}{12^b} > \dfrac{1}{13^b} \end{cases}$$

Значит, $5^a+12^a > 13^a$ и нам подходят все $a<2$

2) Рассмотрим значения $a>2$

$-b = 2-a<0 \Rightarrow b>0$

$$\begin{cases} 5^{b+2}+12^{b+2}=25\cdot 5^b+144\cdot 12^b \\ 13^{b+2}=169\cdot 13^b=25\cdot 13^b+144\cdot 13^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^b<13^b \\ 12^b<13^b \end{cases} \text{(при } b>0)$$

Значит, $5^a+12^a<13^a$ – этот случай не подходит

Тогда $a\le 2$

$\log_{12} t\le 2$

$0<t\le 12^2 \quad\rightarrow\quad t\in(0;144]$

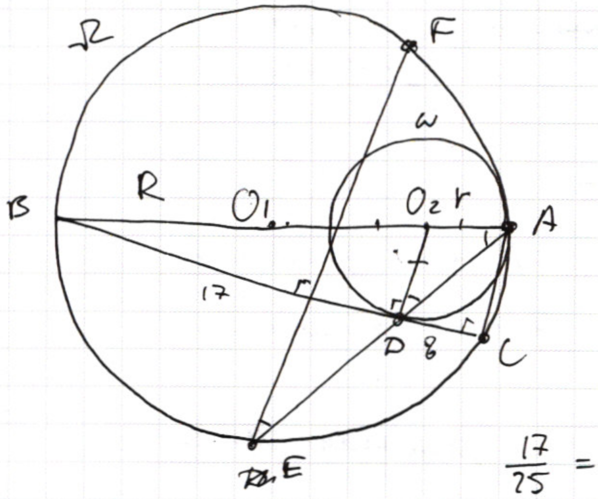
$$\begin{cases} x^2+18x\le 144 \\ x^2+18x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+18x-144\le 0 \\ x(x+18)>0 \end{cases} \qquad D=81+144=225=15^2$$

$$x=\frac{-9\pm15}{1}=\left[\begin{array}{l}-24\\6\end{array}\right.$$

$-24 \quad -18 \quad 0 \quad 6 \quad x$

Ответ: $[-24;-18)\cup(0;6]$

Задача 4



Дано: $CD=8$; $BD=17$

1) $\angle BCA=90^\circ$ (опирается на диаметр)

$BO_2=2R-r$; $BA=2R$

$\triangle BO_2D\sim\triangle BAC$ по двум углам

$\frac{BO_2}{BA}=\frac{O_2D}{AC}$ ~~$\Rightarrow AC=\frac{r(2R)}{}$~~ $=\frac{BD}{BC}=\frac{17}{25}$

$\frac{17}{25}=\frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 25r=2R\cdot 8$; $r=\frac{2\cdot 8R}{25}$

Из $\triangle BDO_2$: $17^2+r^2=(2R-r)^2$

$17^2+r^2=4R^2-4Rr+r^2$

$289=4R^2-4R\cdot\frac{2\cdot 8R}{25} \quad |\,25$

$17^2\cdot 25=4R^2(25-16)$

$R^2=\frac{17^2\cdot 5^2}{4\cdot 9} \Rightarrow R=\frac{17\cdot 5}{2\cdot 3}=\frac{85}{2\cdot 3}=\frac{85}{6}$

~~$r=\frac{14\cdot 17\cdot 5}{25\cdot 2\sqrt{11}}=\frac{7\cdot 17}{5\sqrt{11}}=\frac{119}{5\sqrt{11}}$~~

$r=\frac{2\cdot 8\cdot 85}{25\cdot 2\cdot 3}=\frac{8\cdot 17}{15}=\frac{136}{15}$

~~2) $AC^2=(2R)^2-25^2=\left(\frac{85}{3}\right)^2-25^2$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

г) $\frac{r}{AC} = \frac{17}{75} \Rightarrow AC = \frac{\cancel{75}^{5}}{\cancel{17}} \cdot \frac{8\cdot \cancel{17}}{\cancel{15}_3} = \frac{40}{3}$

$DA^2 = DC^2 + AC^2 = 64 + \frac{40^2}{9} = \frac{8\cdot 8\cdot 9 + 8^2\cdot 5^2}{9} = \frac{8^2\cdot 34}{9}$

$DA = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

$DA\cdot DE = BD\cdot DC$ – т. о пересекающихся хордах

$DE = \frac{17\cdot 8}{8\sqrt{34}}\cdot 3 = \frac{17\cdot 3}{\sqrt{34}} = \frac{17\cdot 3\sqrt{34}}{17\cdot 2} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$

$EA = DE + DA = \frac{16\sqrt{34}}{6} + \frac{9\sqrt{34}}{6} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

По т. ~~син~~ синусов для $\triangle EFA$:

$\frac{AE}{\sin\angle EFA} = 2R \Rightarrow \sin\angle EFA = \frac{25\sqrt{34}\cdot \cancel{6}}{\cancel{6}\cdot 2\cdot 85} = \frac{5\sqrt{34}}{17\cdot 2} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\angle EFA = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$

Ответ: $\frac{85}{6}$; $\frac{136}{15}$; ;

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

ОДЗ: $(y-1)(x-2)\geq 0$

Замена: $y-1=a$; $x-2=b$; $ab\geq 0$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ b^2+9a^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} b\geq 2a \\ b^2-5ab+4a^2=0 \end{cases}$$

$$D=25a^2-16a^2=9a^2 \Rightarrow b=\frac{5a\pm 3a}{2}=\left[\begin{array}{l} a \\ 4a \end{array}\right.$$

1) $b=a$

$$\begin{cases} a\geq 2a \\ 10a^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a\leq 0 \\ a=\frac{\pm 5}{\sqrt{10}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{5}{\sqrt{10}} \\ b=-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\frac{5}{\sqrt{10}} \\ y=1-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

2) $b=4a$

$$\begin{cases} 4a\geq 2a \\ 16a^2+9a^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geq 0 \\ a^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

Ответ: $(6;2)$, $\left(2-\frac{5}{\sqrt{10}}; 1-\frac{5}{\sqrt{10}}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sin(2\alpha+2\beta)} = \frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5}$

Тогда, $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$; $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta \cancel{= -\frac{4}{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt5}\right) \cancel{= -4} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \pm \frac{2}{5}$

Значит,

$\sin 2\alpha = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -\frac{4}{5}\end{array}\right. \Rightarrow \cos 2\alpha = \left[\begin{array}{l} \pm 1 \\ \pm\frac{3}{5}\end{array}\right.$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \left[\begin{array}{l} 0 \\ \pm\frac{4}{3}\end{array}\right.$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha + 2\cdot\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}2\alpha = 0$

1.) $\operatorname{tg}2\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$

2) $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{4}{3}$

$\frac{16}{9}\operatorname{tg}^2\alpha + \cancel{\frac{8}{3}\operatorname{tg}\alpha} + 2\operatorname{tg}\alpha - \frac{4}{3} = 0$

$\cancel{\operatorname{tg}}\ 8\operatorname{tg}^2\alpha + 9\operatorname{tg}\alpha - \cancel{12}\,6 = 0$

$D = 81 + \cancel{384}\,192 = \cancel{465}\,273$

$\operatorname{tg}\alpha = \cancel{\frac{-9\pm\sqrt{465}}{16}}\ \frac{-9\pm\sqrt{273}}{16}$

3) $\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{4}{3}$

$\frac{16}{9}\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - \frac{4}{3} = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{9\pm\sqrt{273}}{16}$

Ответ: 0; $\frac{\pm 9\pm\sqrt{273}}{16}$.

Задача 6

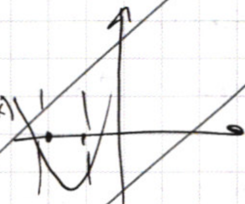
Т.к. $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ на этом промежутке $4x+3<0$

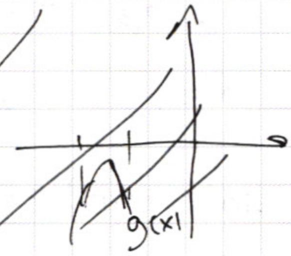
$$\begin{cases} 12x+11 \geq (ax+b)(4x+3) \\ ax+b \leq -8x^2-30x-17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11 \leq 0 \\ 8x^2+x(a+30)+b+17 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы нер-во было выполнено на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ систему можно переписать как:

$$\cancel{g(-\tfrac{3}{4})} \begin{cases} f(-\frac{3}{4}) \leq 0 \\ f(-\frac{11}{4}) \leq 0 \\ 4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11 \leq 0 \end{cases}$$



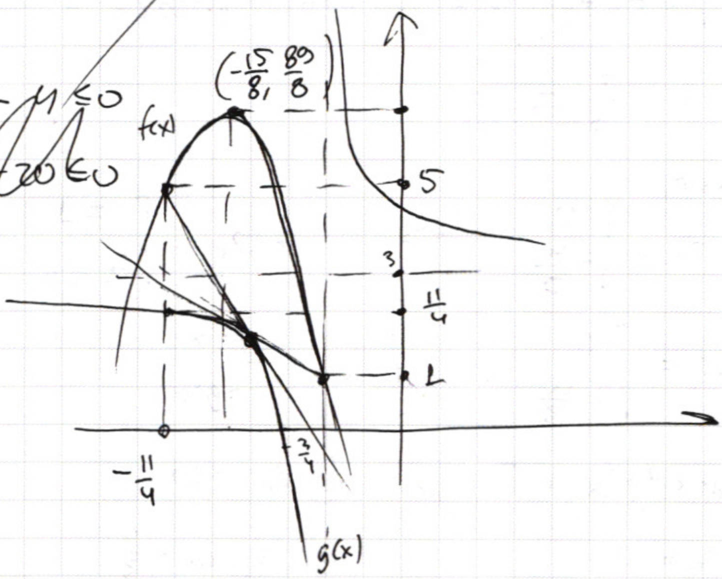


Пусть 1) $a<0$

$$\begin{cases} f(-\frac{3}{4}) \leq 0 \\ f(-\frac{11}{4}) \leq 0 \\ g(-\frac{3}{4}) \leq 0 \\ g(-\frac{11}{4}) \leq 0 \\ D_g \leq 0 \end{cases}$$

$4b-3a-11 \leq 0$

$4b-11a-20 \leq 0$



$$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$$

$$g(x) = -8x^2-30x-17$$

$f(x) \leq ax+b \leq g(x)$; на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$; $f(x) > g(x)$

1.) График $y=ax+b$ проходит через т. $(-\frac{11}{4}; 5)$ и касается $g(x)$

$5 = -\frac{11}{4}a+b \rightarrow b = 5+\frac{11}{4}a$

$12x+11 = (ax+5+\frac{11}{4}a)(4x+3)$

$0 \; \cancel{12x+11} = x^2 \cdot 4a + x(20+11a+3a-12) - 11 + 15 + \frac{33}{4}a$

$4ax^2 + x(8+14a) + 4 + \frac{33}{4}a = 0$

$4ax^2 + 2x(4+7a) + 4 + \frac{33}{4}a = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D_1 = \cancel{16 + 56a + 49a^2 - 16\cdot 2\ 16 - 33a = 49a^2 + 16a\ 23a = 0}$

$\cancel{a(49a+23)=0}$

$\cancel{a = -\frac{23}{49};\ b = 5 - \frac{11\cdot 23}{4\cdot 49}}$

$D_1 = 16 + 56a + 49a^2 - 16a - 33a^2 =$

$= 16a^2 + 40a + 16 = 0$

$2a^2 + 5a + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9 \Rightarrow a = \frac{-5 \pm 3}{2\cdot 2} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow a = -2$

(пересечение с нижним участком гиперболы)

$b = 5 - \frac{11\cdot 2}{4} = 5 - \frac{11}{2} = -\frac{1}{2}$

2) График $y = ax + b$ проходит через т. $(-\frac{3}{4}; 1)$ и касается $g(x)$

$1 = -\frac{3}{4}a + b \Rightarrow b = 1 + \frac{3}{4}a$

$(12x+11) = (ax + 1 + \frac{3}{4}a)(4x+3)$

$4ax^2 + x(4 + 3a + 3a - 12) + 3 + \frac{9}{4}a - 11 = 0$

$4ax^2 + 2x(3a-4) + \frac{9}{4}a - 8 = 0$

$D_1 = \cancel{9a^2} - 24a + 16 - \cancel{9a^2} + 32a = 8a + 16 = 0$

$a = -2;\quad b = 1 - \frac{3\cdot 2}{4} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

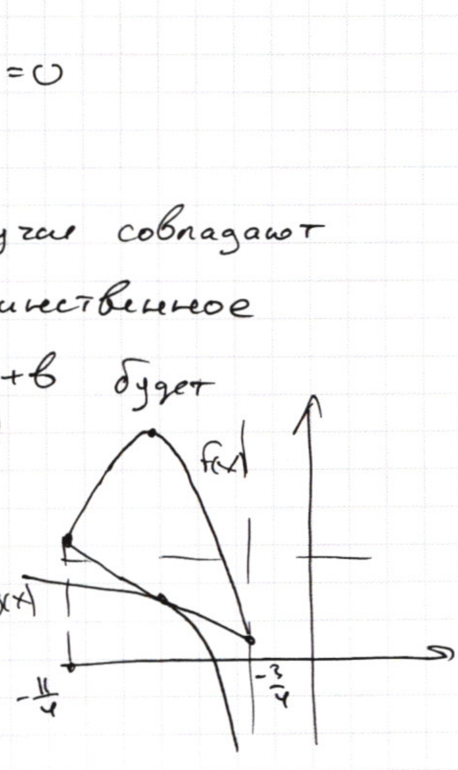
Значит, прямые в 1 и 2 случае совпадают

И решение $a = -2;\ b = -\frac{1}{2}$ – единственное

Так как, при увеличении b $ax+b$ будет пересекать $f(x)$, при уменьшении – $g(x)$

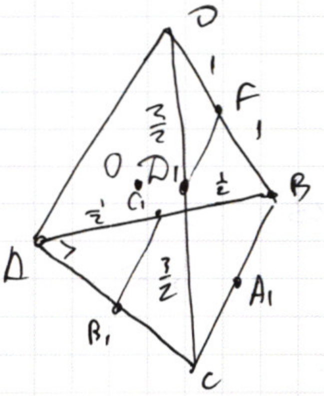
При изменении a – пересечёт $f(x)$

верный рисунок



Ответ: $(-2; -\frac{1}{2})$

Задача 7

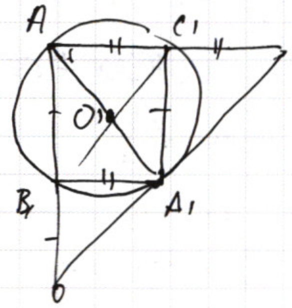


Рассмотрим $\triangle ABC$, и проекцию шара на плоск. ABC

$AC_1A_1B_1$ – вписанный

$\begin{cases} AC_1 \parallel B_1A_1 \\ AB_1 \parallel A_1C_1 \end{cases} \Rightarrow AC_1A_1B_1$ – прямоугольник

$\angle A = 90^\circ$



O' – проекция центра сферы на ABC

~~D_1 – середина DC~~ O' – центр $AC_1A_1B_1$

~~$\triangle AD_1B_1$ – вписанный~~, ~~$\angle D_1B_1A = 90^\circ$ – диам~~

~~AD_1 – диаметр~~

~~Расстояние~~ $\begin{cases} D_1F \parallel CB \\ B_1C_1 \parallel CB \end{cases} \Rightarrow D_1F \parallel B_1C_1$

$D_1F = B_1C$ $\quad$ $D_1FC_1B_1$ – вписанн~~ая~~ый ~~трапеция~~ прямоугольник

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

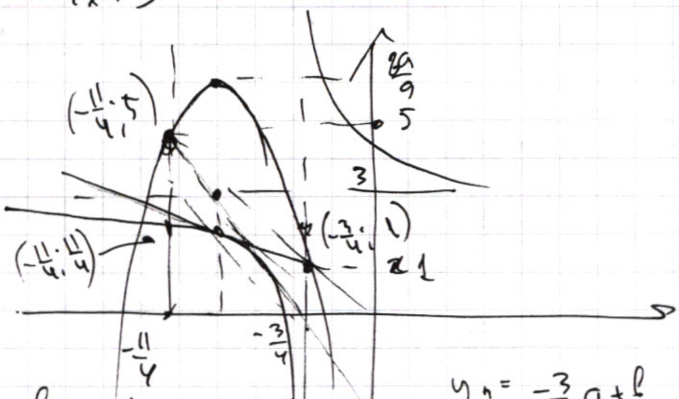
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y_1 \qquad y_2$

$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$x_0 = -\frac{30}{8\cdot 2} = \frac{15}{8}$



$y_0 = -8\cdot\frac{15^2}{8\cdot 8} + \frac{30\cdot 15}{8} - 17 =$

$= \frac{15(30-15)}{8} - 17 =$

$= \frac{15\cdot 15 - 8\cdot 17}{8} = \frac{225-136}{8}$

$\frac{\begin{array}{r}225\\136\end{array}}{89}$ $\quad y_0 = \frac{89}{8} > 11$

$\leftarrow -\frac{3}{4}a+b \le 1 \qquad y_1 = -\frac{3}{4}a+b$

$\frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a+b \le 5 \qquad y = -\frac{11}{4}a+b$

$y_1(-\frac{11}{4}) = 3+\frac{2}{3-11} = 3-\frac{2}{8} = 3-\frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

$y_2(-\frac{11}{4}) = -8\cdot\frac{121}{4\cdot 4} + \frac{30\cdot 11}{4} - 17 = \frac{15\cdot 11 - 121}{2} - 17 = \cancel{\frac{131}{2}} = \frac{10}{2} = 5$

$y_2(-\frac{3}{4}) = -\frac{8\cdot 9}{4\cdot 4} + \frac{30\cdot 3}{4} - 17 = \frac{45-9-34}{2} = 1$

$15\cdot 11 = 165$, $165-121 = 44$, $44-34 = 10$, $45-34 = 11$

$x < -\frac{3}{4}$

$(12x+11) \ge (4x+3)(ax+b)$

$4ax^2+3ax+4bx+3b \le 12x+11$

$\frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a+b \le 5$

≤ 1

$4ax^2+x(3a+4b-12)+3b-11 \le 0$

$\cancel{-2(2x+} \quad \cancel{(4x+3)(2x+\frac{14}{4})} \qquad (4x+3)(2x+6) = 8x^2+30x+18$

$-(8x^2+30x+17) \quad 3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -(4x+3)(2x+6)+1$

$\ge 4 \qquad < 3 \qquad \frac{1-2(x+3)(4x+3)}{<6}$

$12x+11 = (4x+3)(ax+5+\frac{11}{4}a) \qquad (14a+8)^2+16\cdot 11-16\cdot 5-16\cdot\frac{11\cdot 3}{4}a = 0$

$\cancel{4x}\ 4ax^2+x(3a+20+11a-12)-11+3\cdot 5+\frac{11\cdot 3}{4}a$

$=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

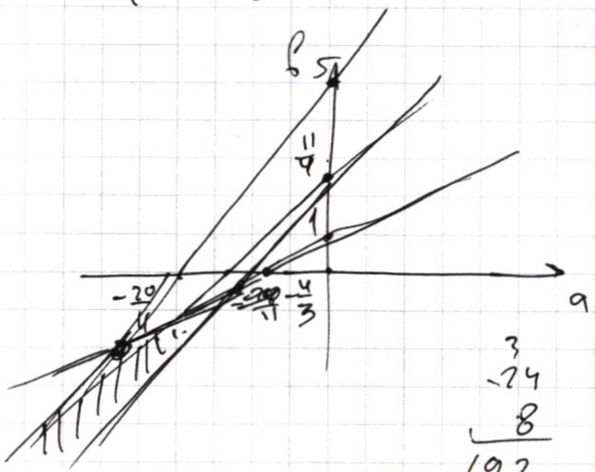
$y(-1) = \frac{-1}{-1} = 1$

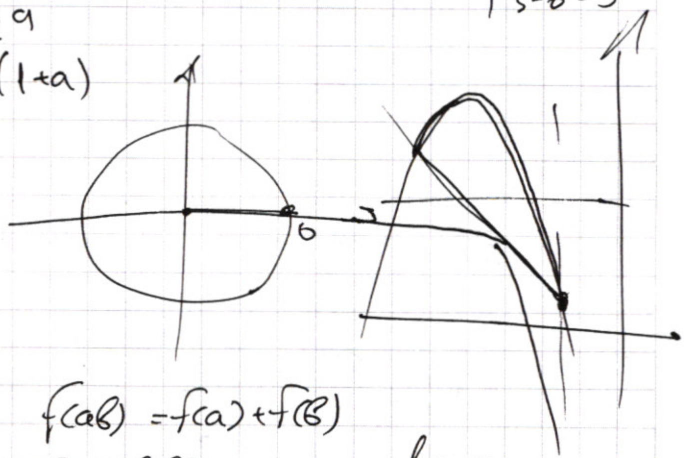
$-\frac{3}{4}a + b \le 1$ $\qquad b \le 1 + \frac{3}{4}a$ $\qquad -\frac{20}{11}$ $\qquad y_2(1) = -8+30-17=$

$13-8=5$

$\frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a + b \le 5$ $\qquad b \le 5 + \frac{11}{4}a$

$b \ge \frac{11}{4}(1+a)$





$\begin{array}{r} 3 \\ \times 24 \\ 8 \\ \hline 192 \\ +81 \\ \hline 273 \end{array}$ $\qquad 24$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\qquad a, b > 0$

$\alpha =$

$1 \le x \le 24$

$y \le 24$

$\sin 2\alpha = 0$

$\cos 2\alpha = \pm 1$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = -\frac{4}{5}$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

c

$\sin 2\beta = \cancel{(\beta + 2\beta)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{x}{y}$ – не прост.

$-\frac{4}{3}t^2 + 2t + \frac{4}{3}$

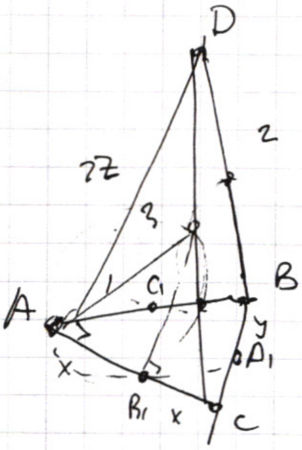
$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax + b \le -2(4x+3)(x+3) - 2$

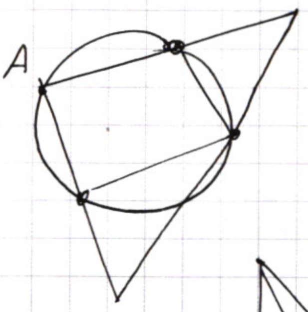
$\frac{16}{9}t^2 - 2t - \frac{4}{3} = 0 \quad 1 \cdot 3 \; 9$

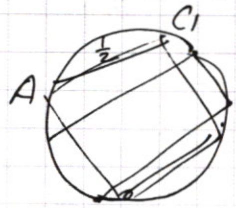
$\cancel{16t^2 - 18t}$

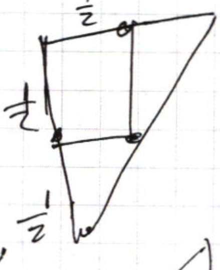
$16t^2 + 18t - 12$

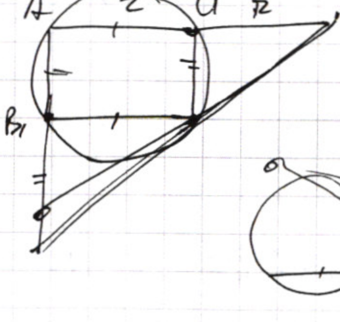
$8 \cdot 1^2 +$

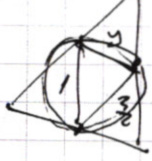


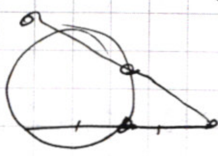


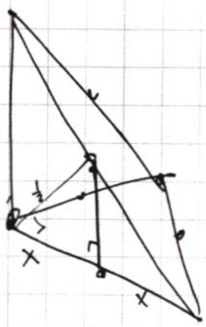












$y = -2x - \frac{1}{2}$

$x = -\frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

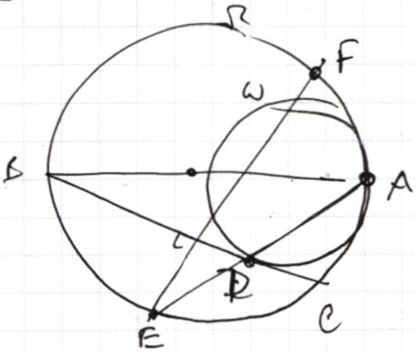
$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sin(2\alpha+2\beta)} = +\frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

sin cos

№4



$2R-r=\sqrt{17^2+r^2}$

$\frac{17^2}{25^2}=\frac{17+r^2}{4R^2}$

CD = 8

DB = 17

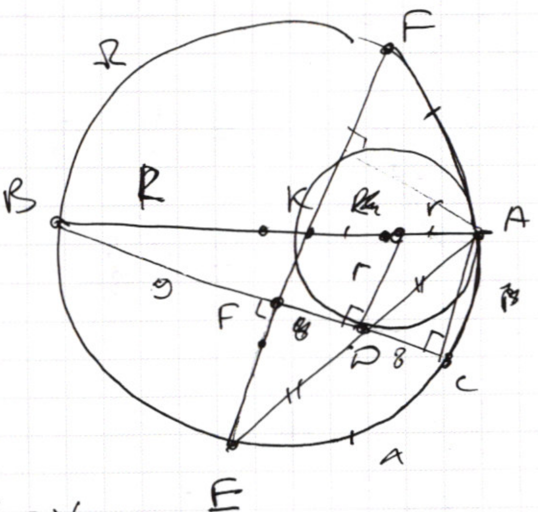
BC = 25

$17\cdot 8 = DE^2$

$DE = 2\sqrt{2\cdot17} = \sqrt{8\cdot17}$

$EK = 2r$

$BD^2+r^2=(2R-r)^2$



$\triangle EFD = \triangle ACD$

$AC^2 = 8\cdot17+8\cdot8 = 8\cdot9$

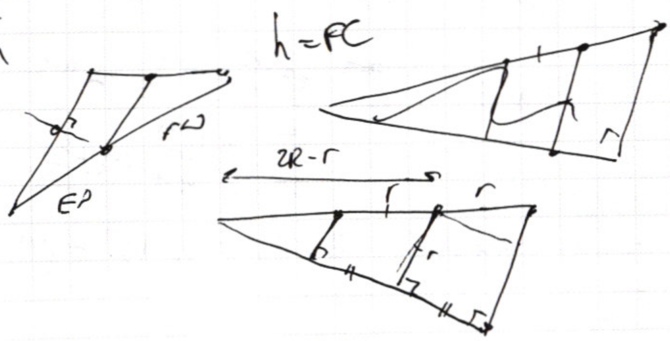
$AC^2+25^2=(2R)^2$?

$4R^2 = 8\cdot9+25^2 = 625+72$

$\angle AFE$

$h = FC$

$R=\frac{3V}{S_n}$



25 + 9 = 34

17 · 17 = 289

25·2R − 17·2R

25 · 25 = 625

625 + 72 = 697

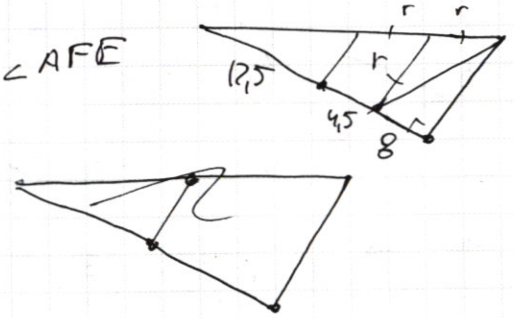
17 · 8 = 136

25 − 17 = 8

85

17 · 5 = 85

17 · 7 = 119



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$

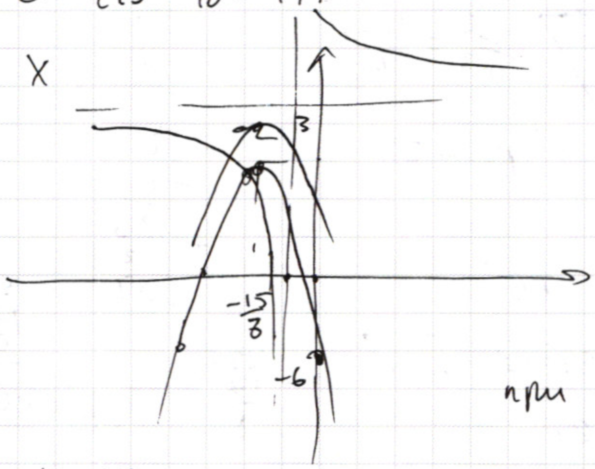
$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-12$

$y_1=\frac{12x+11}{4x+3}=\frac{3(4x+3)+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$

$y_2=ax+b$

$y_3=\cancel{-4(2x^2+}-2(4x^2+15x+3)$

$D=225-48=177$



$\frac{12x+11}{4x+3}=$

$16 \cdot 3 = 48$ $\quad 225-48=177$

$\cancel{\log_2 4}=2$

$\log_3 9=2$

$81+144 = 225$ $\quad 15 \cdot 15 = 75$

$x_0=-\frac{15}{8}=-2$

$y_0=-2\left(\frac{4\cdot 15^2}{88}-\frac{15^2}{8}+3\right)=-2\left(\cancel{\frac{3\cdot 15^2}{16}+3}\right)$

$-2\left(3-\frac{15^2}{8\cdot 2}\right)=-2\left(\frac{48-225}{16}\right)=$

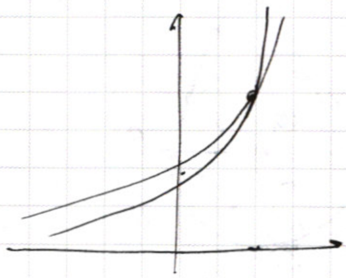
$=\frac{177}{8}=20$

$y'=-\frac{2}{(4x+3)^2}\cdot 4=$

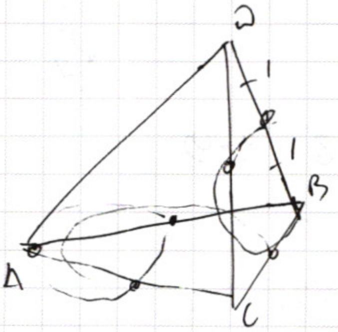
при $x<-\frac{3}{4}$

$3+\frac{2}{4x-3}<3$

$5^a+12^a \ge 13^a$



$AB=1$
$BD=2$
$CD=3$

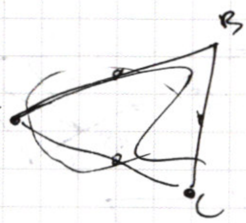


$\frac{1}{5}+\frac{1}{12} \quad \frac{1}{13}$

$\frac{1}{5^a} \cancel{\ge} \frac{1}{13}$

$y'_{2a}=13^a\cdot \ln 13$

$y'_{1a}=5^a\cdot \ln 5+$



$\cancel{x^a+y^a}$ $\quad 5^{a+2}+12^{a+2} \ge 13^{a-2}$

$\frac{5^a}{25} \ge \frac{12^a}{144} \ge \frac{13^a}{169}$

$5^{2-a}+12^{2-a}=\frac{25}{5^a}+\frac{144}{12^a} \ge \frac{25}{13^a}+\frac{144}{13^a}$

$\cancel{25 a^a}$

$25\, 5^a+144\cdot 12^a \ge 169\cdot 13^a=25\cdot 13^a+144\cdot 13^a$

$b=a-2$

$a=b+2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№3) x $xy - x - 2y + 2 \geq 0$

$$\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2 \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$x - 2y \geq 0$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0$

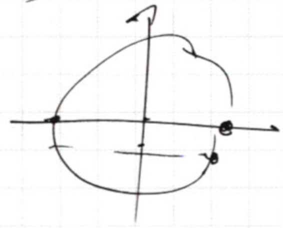
$(x-2y)^2 - xy + x + 2y - 2 = 0$

$(x+3y)^2 = x^2 + 9y^2 + 6xy$

$(x+3y)^2 - 6xy - 4x - 18y = 12$

$\cancel{(x+3y)}4$

$\{ x(x-4) + 9y(y-2) = 12$



$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos(2\alpha + 2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = \cancel{-\frac{4}{5}} - \frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5} \pm \frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -\frac{4}{5} \end{array}\right.$ $\cos 2\alpha = \left[\begin{array}{l} \pm 1 \\ \pm\frac{3}{5} \end{array}\right.$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 - 4 - 9 = 12$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 = 5^2$

$\cancel{tg 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}}$ $tg 2\alpha = \left[\begin{array}{l} 0 \\ \pm\frac{4}{3} \end{array}\right.$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$(x-2)^2 + 5x - 5xy + (3y-3)^2 - 5y^2 + 20y - 7 = 0$

9+ 1) $tg\alpha = 0$

$\frac{9 - \sqrt{465}}{16}$ 2) $\frac{-9 - \sqrt{465}}{16}$

$-\frac{9 + \sqrt{465}}{16}$

465 | 5, 93 | 3, 31

$\cancel{5y^2 + 5xy - 20y - 5x + 2} = 25$

$(x-2)^2 = 5^2 - (3y-3)^2 - (8-3y)($

$tg 2\alpha - tg 2\alpha \cdot tg^2\alpha = 2 tg\alpha$ $x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x(y-1) - 2(y-1) = (y-1)(x-2) > 0$

81 $32 \cdot 12 = 384$, $384 + 81 = 465$

15

$(x-2y) = \sqrt{(y-1)(x-2)}$

$b - 2a = x - 2 - 2y + 2$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$ab \geq 0$

$b - 2a = \sqrt{ab}$ $b^2 - 4ab + 4a^2 = ab$

$b^2 + 9a^2 = 25$ $b^2 - 5ab + 4a^2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

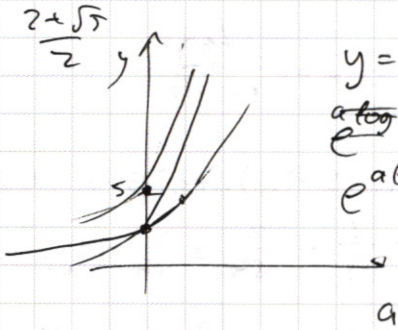
$\sin(2(\alpha+\beta)+2\beta) = \sin 2(\alpha+\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos 2(\alpha+\beta)\cdot\sin 2\beta$

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\alpha$

$2\cdot\sin 2(\alpha+\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\sin 2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} = 2\cos^2\beta - \cancel{\sin^2\beta}\ 1$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$ $\cancel{\cos^2\beta} = \frac{2+\sqrt5}{2}$



$y = 5^a$

$\cancel{e^{a\log}}$

$e^{a\ln 5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\cancel{\sqrt5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\cancel{\sqrt5}}\cancel{\cos}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt5}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha$

№2 $\quad 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$\cancel{x(x}$

$x(x+18) > 0$

$-18 \qquad 0$

$x^2+18x = t > 0$

$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$0 < \log_{12}5 < 1$

$5^{\log_{12}t} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0$

$1 < \log_{12}13$

$12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}t} \geq 0$

$12^{\log_{12}t\cdot\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0$

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} - 13^{\log_{12}t}$

$5^a + 12^a - 13^a \geq 0$

$5^{\log_{12}t} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0$

144
25
169

$\times\begin{array}{r}13\\13\\\hline 39\\13\\\hline 169\end{array}$

$5^a + 12^a \geq 13^a$

$a = \log_{12}t = 2$

$a = 2$

$\boxed{a \leq 2}$

$y = 5^a + 12^a - 13^a \cancel{\geq 0}$

$25\cdot 5^{a-2} + 144\cdot 12^{a-2} \geq \cancel{13}\ \cancel{166}\ 169\cdot 13^{a-2}$

$y'_a = 5^a\cdot\ln 5 + 12^a\ln 12 - 13^a\ln 13$

$\log_{12}t \leq 2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

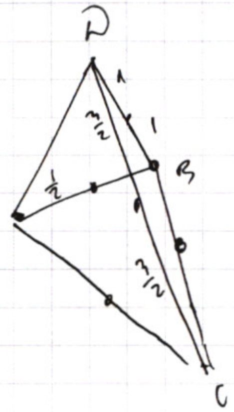
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

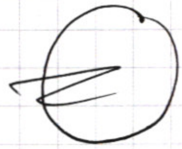
~~Задача~~

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ~~15~~ 17, 19, 23

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

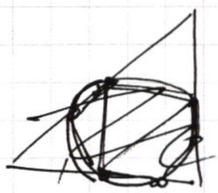


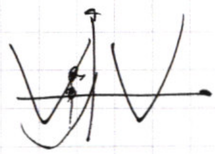


$\frac{x}{y}$ – не прост.

x, и y не пр.

$\cancel{f\left(\frac{2}{1}\right) = f(2) + f(1)}$





$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax + b \le 1 - 2(x+3)(4x+3)$

$g(x)$

$12x + 11 \geq (ax+b)(4x+3)$

$8x^2 + x(30+a) + 17 + b \le 0$

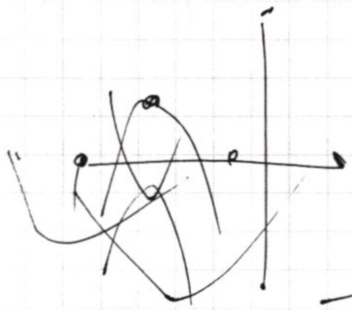
при всех $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

$4ax^2 + x(4b + 3a - 12) + 3b - 11 \le 0$

при $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

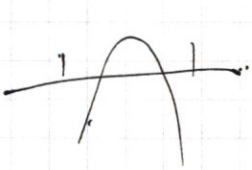
$D = 90 + 60a + a^2 - 32 \cdot 17 - 32b$

$8 \cdot \frac{121}{4 \cdot 4} - \frac{11}{4}(30+a) + 17 + b \le 0 \ | \cdot 4$



$g\left(-\frac{3}{4}\right) \le 0$ $\quad$ $242 - 330 - 11a + 68 + 4b \le 0$

$g\left(-\frac{11}{4}\right) \le 0$



$330 - 242 = 88$

$88 - 68 = 20$

$4a \cdot \frac{9}{16} - \frac{3}{4}(4b + 3a - 12) + 3b$ $\quad$ $\frac{8 \cdot 9}{16} - \frac{3}{4}(a+30) + b + 17 \le 0 \ | \cdot 4$

$18 - 3a - 90 + 4b + 68 \le 0$

86

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)