МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

Заметим, что $2xy-12y-x+6 = x(2y-1)-6(2y-1)=(x-6)(2y-1)$.

Также, $x^2+36y^2-12x-36y-45 =$
$= x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9-45 =$
$(x-6)^2-36+9(2y-1)^2-9-45 =$
$=(x-6)^2+9(2y-1)^2-90$.

То есть система эквивалентна

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2-90=0 \end{cases}$$

Заметим, что $x-12y=x-6-6(2y-1)$

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2-90=0. \end{cases}$$

Пусть $(x-6)=t$, а $(2y-1)=u$, тогда

$$\begin{cases} t-6u=\sqrt{ut} \\ t^2+9u^2-90=0 \end{cases}$$

Решим уравнение $t-\sqrt{ut}-6u=0$

как квадратное относительно $\sqrt{t}$.

$D=u+24u=25u$

$\sqrt{t}=\frac{\sqrt{u}\pm5\sqrt{u}}{2}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -2\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=0 \\ u=0 \end{cases} \quad (1) \\ t=9u \quad (2). \end{array}\right.$$

если (1), то: $-90=0 \Rightarrow$ (1)-не удовл.

если (2), то: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1 \\ t=9 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-1 \\ t=-9 \end{cases} \end{array}\right.$

Выполним ~~проверку~~ подстановку

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \quad (3) \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \quad (4) \end{array}\right.$$

Выполним проверку:

Для (3):

$$\begin{cases} 15-12 = \sqrt{30-12-15+6} \\ 225+36-180-36-45=0 \end{cases}$$

$\begin{cases} 3=3 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$ (3)- удовл.

Для (4):

$-3=3 \Rightarrow$ (4)- не удовл.

$$\boxed{\text{Ответ: } \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}}$$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2+|10x-x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ:

$10x-x^2>0$

$x \in (0;10)$

Раз $10x-x^2>0$ то $|10x-x^2|=10x-x^2$

Пусть $10x-x^2=t$, тогда

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$. Заметим, что $t^{\log_3 4}=4^{\log_3 t}$

$t+4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

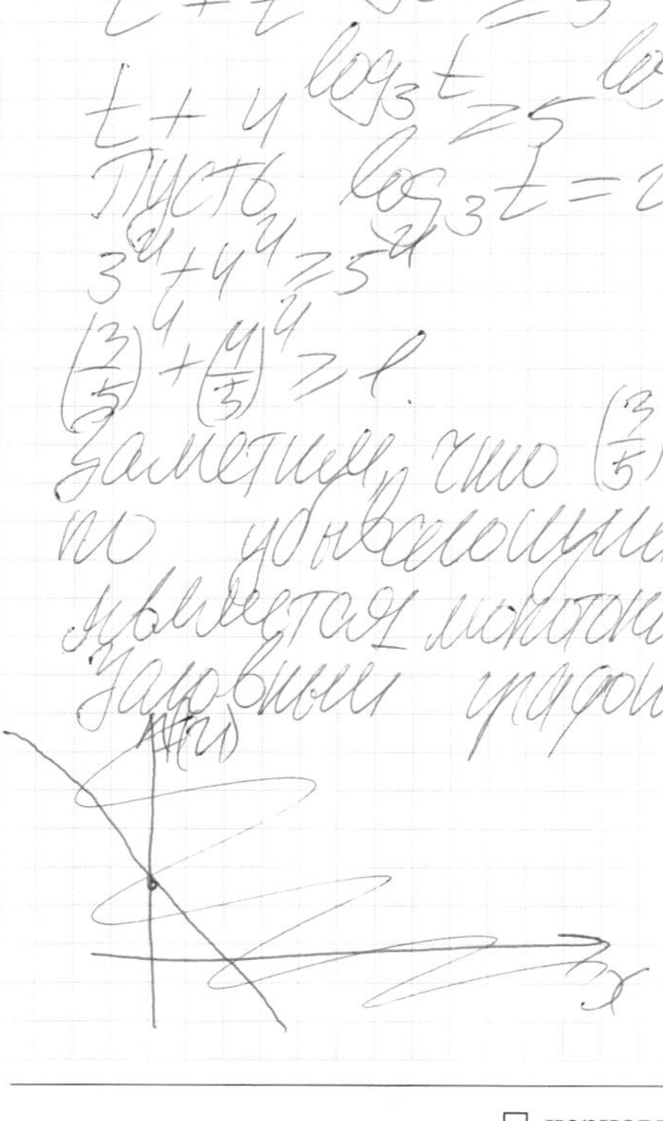
Пусть $\log_3 t = u$, тогда $t=3^u$

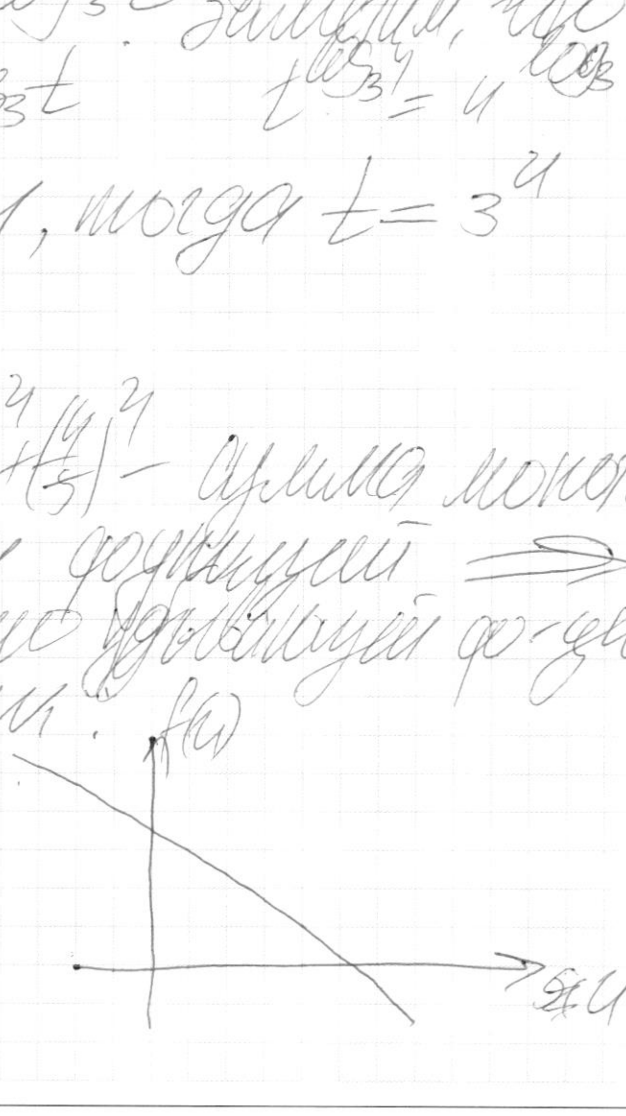
$3^u+4^u \geq 5^u$

$\left(\frac{3}{5}\right)^u+\left(\frac{4}{5}\right)^u \geq 1.$

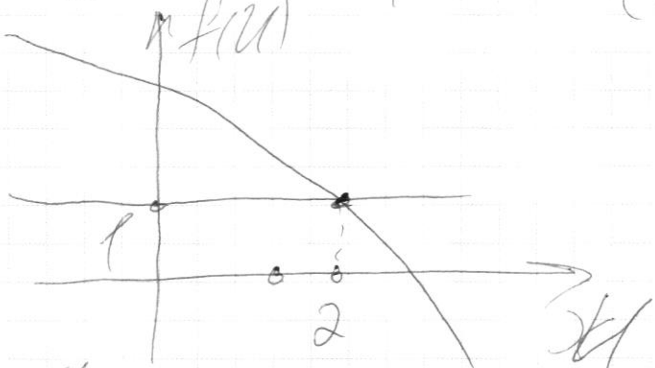
Заметим, что $\left(\frac{3}{5}\right)^u+\left(\frac{4}{5}\right)^u$ — сумма монотонно убывающих функций $\Rightarrow$ является монотонно убывающей ф-цией

Заловым графики. $f(u)$





Данный график может пересечь прямую $y = 1$ только один раз.
Заметим, что $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$.



Нас интересуют значения u при которых $f(u) \geq 1 \Rightarrow u \in (-\infty; 2]$.

Выполним подстановку

$\log_3 t \leq 2$

$\log_3 t \leq \log_3 9$

$t \leq 9$

$10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$

Учитывая ОДЗ:

$x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

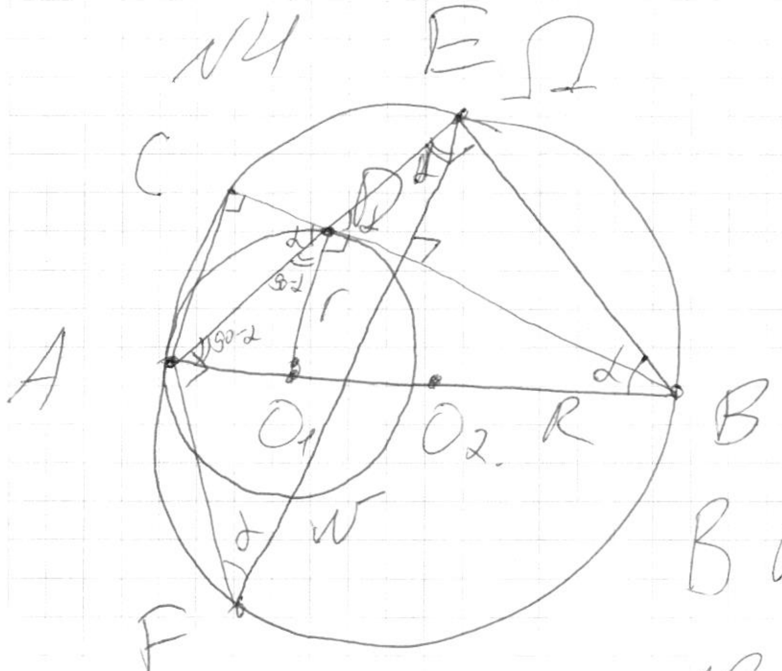
$\boxed{\text{Ответ: } x \in (0; 1] \cup [9; 10)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Пусть O_2 – центр окр-ии Ω, O_1 – центр окр-ии ω, r – радиус окр-ии ω, R – радиус окр-ии Ω. В силу симметрии рисунка диаметр AB проходит не только через O_2, но и через O_1. Проведем радиус r к D. $\angle O_1DB$ – прямой, так как O_1D – радиус к кас. $\angle ACB$ – прямой, т.к. опирается на диаметр $\Rightarrow$ $O_1D \parallel AC$. Из подобия тр-ов BO_1D и BAC, $\frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA}$ $\Rightarrow$

$\frac{BD}{BD+CD} = \frac{2R-r}{2R}$

По св-ву сек. и кас. из одной точки

$BD^2 = (2R-r)2R$

Подставляя значения, получаем систему

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №5
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \frac{17}{32} = \frac{2R - r}{2R} \\ \left(\frac{17}{2}\right)^2 = (2R - 2r)2R \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \frac{15}{16}R \\ 17^2 = 8R\left(2R - \frac{15}{8}R\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \frac{15}{16}R \\ 289 = R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = 17 \\ r = \frac{255}{16} \end{cases}$$

Пусть $\angle AFE = \alpha$

Проведем прямую BE. Тогда:

$\angle ABE = \angle AFE = \alpha$.

$\angle AEB = 90^\circ$ — как впис., опирающийся на D

$\angle EAB = 90 - \alpha$

$\angle EAB = \angle ABO_1$ — как углы при равнобедр. треугольника

$\angle ADB = 90 - \alpha + 90 = 180 - \alpha$

$\angle CDA = 180 - \angle ADB = 180 - (180 - \alpha) = \alpha$ — как смежный с $\angle ADB$.

Из подобия

$$\frac{r}{AC} = \frac{BD}{BD + CD} = \frac{17}{32}$$

$$AC = \frac{32}{17}r = \frac{32}{17} \cdot \frac{15}{16} \cdot 17 = 30$$

$$\operatorname{tg} CDA = \operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{CD} = \frac{30}{15} \cdot 2 = 4$$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle EDB = 180 - \angle ADB = 180 - (180 - \alpha) = \alpha$.

$\angle AEF = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\angle EAF = 90^\circ$ - из т-ы о сумме углов

Δ-а AEF. $\Rightarrow EF$ - диаметр,

т.к. на него опирается вписанный

угол равный 90°

$AE = EF \sin\alpha = 2R\sin\alpha$

$AF = EF\cos\alpha = 2R\cos\alpha$

$S = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} 4R^2 \sin\alpha\cos\alpha = 2R^2 \sin\alpha\cos\alpha$.

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + 16$.

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$S = 2R^2 \sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot 17^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = 17 \cdot 8 = 136$.

Ответ: $R_\Omega = 17$; $r_\omega = \frac{233}{16}$

$\angle AFE_2 = arctg 4$

$S_{AEF} = 136$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

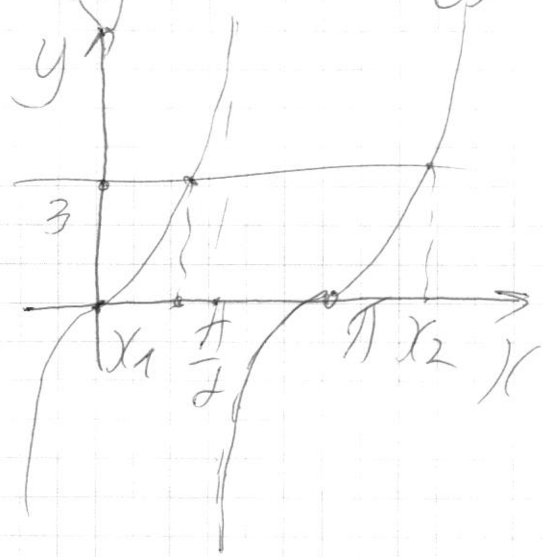
$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

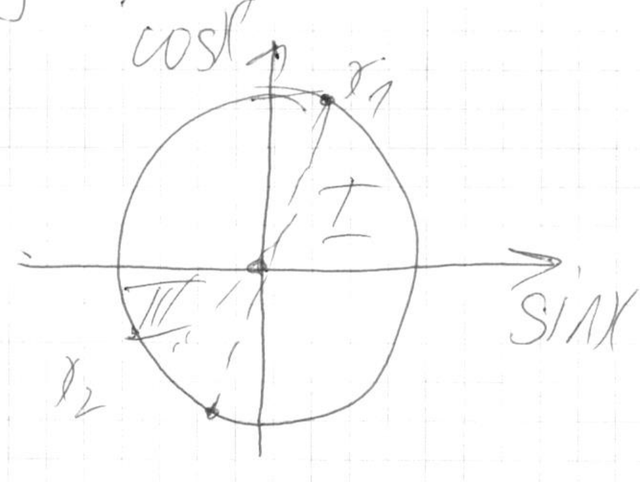
$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n.$$



нам все значения $tg\alpha \geq 3$, то $\alpha+\pi\cdot 0 > 60^\circ$



Такие значения принадлежат либо I, либо III $\Rightarrow$ либо $\sin x, \cos x > 0$, либо $\sin x, \cos x < 0$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №8
(Нумеровать только чистовики)

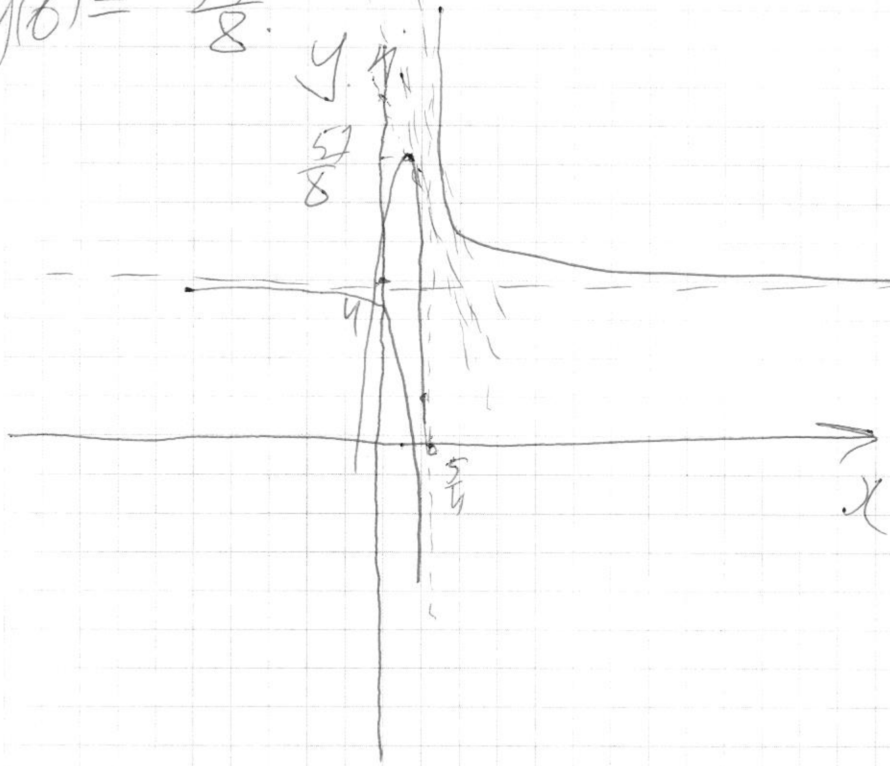
№6.

$$\begin{cases} ax+b \geq \dfrac{16x-16}{4x-5} \\ -32x^2+36x-3 \geq ax+b. \end{cases}$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20}{4x-5} + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}.$$

$$x_0 = -\frac{36}{2(-32)} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}.$$

$$y(x_0) = \frac{57}{8}.$$

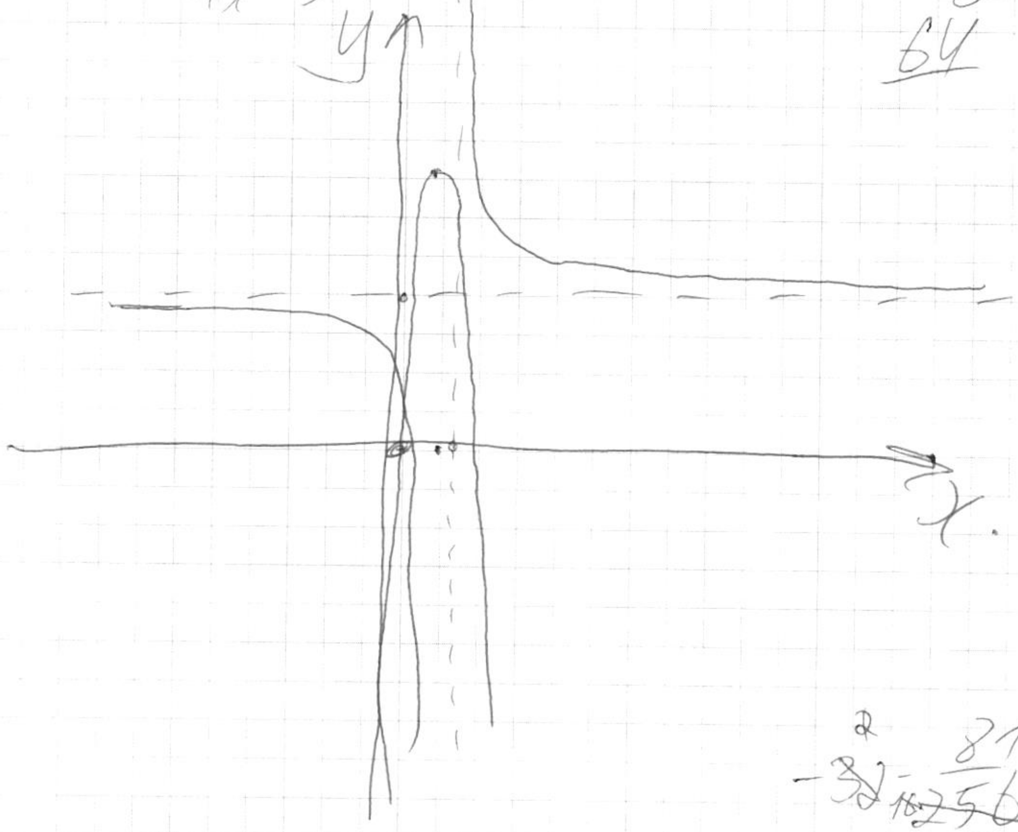


~~$a \in$ от значения, при котором прямая касается параболы~~

$\frac{16x-16}{4x-5} = ax+b.$

$\frac{32-16}{8-5} = \frac{16}{3} =$

64



$\frac{-36}{-64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$-32 \cdot \frac{81}{256} + 36 \cdot \frac{9}{16} - 3 =$

$-\frac{81}{8} + \frac{81}{4} - 3 = \frac{81}{8} - 3 =$

$\frac{81-24}{8} = \frac{57}{8}.$

$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4ax^2 + 4bx - 5ax - 5b}{4x-5}$

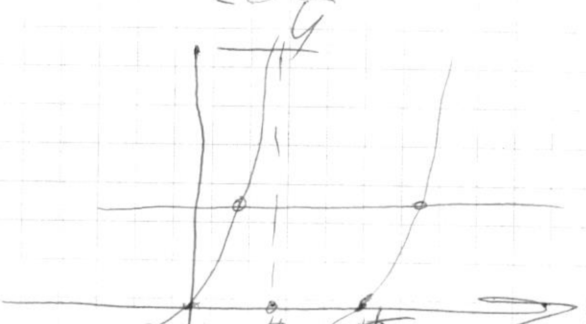
$\frac{16x-16}{4x-5} = -32x^2 + 36x - 3.$

$16x - 16 = .$

$\begin{array}{r} 81 \\ -\,24 \\ \hline 57 \end{array}$

$\alpha > 60^\circ.$

$\frac{32}{4}$



~~$\sin(\alpha+\beta)$~~

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$\sin 2\alpha$

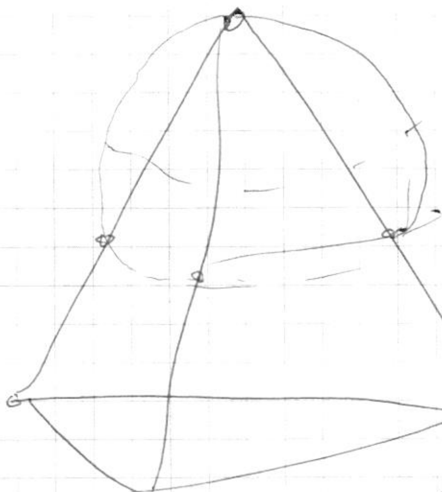
☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

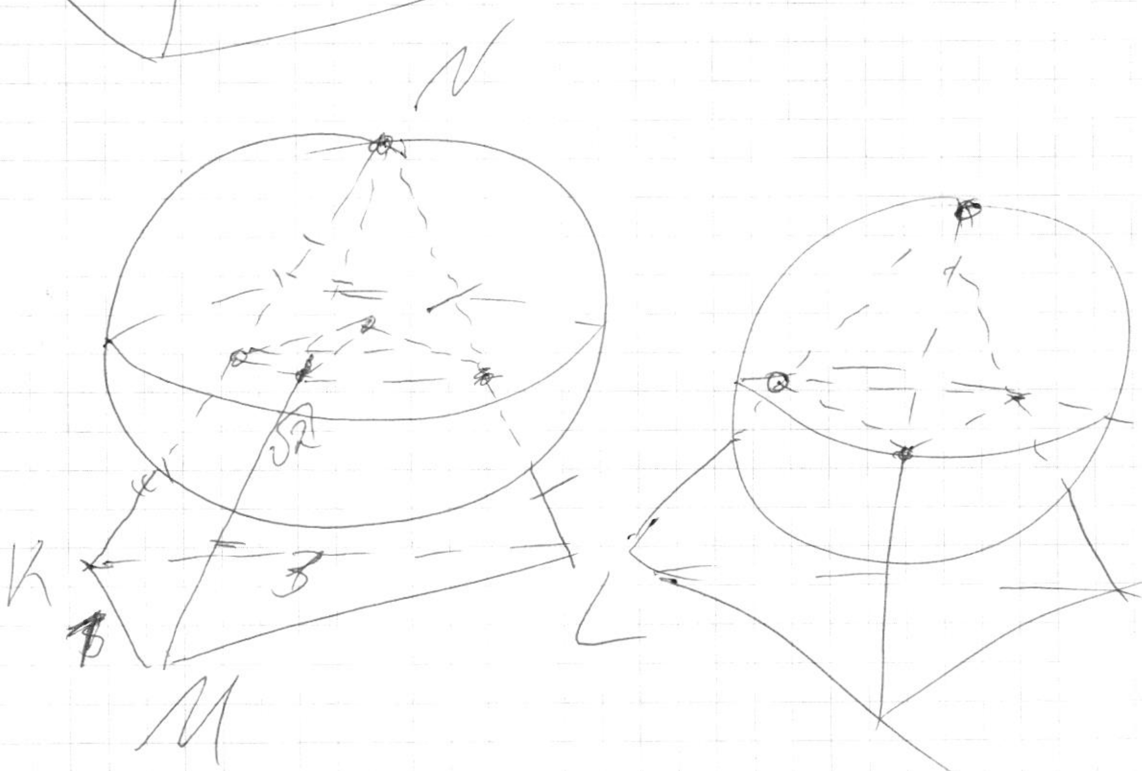
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

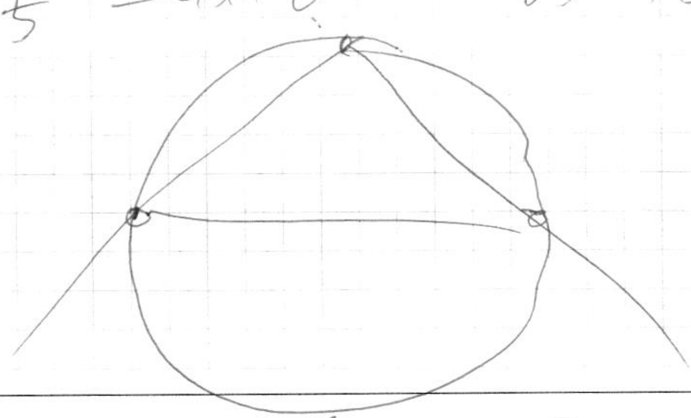
$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$





$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3$



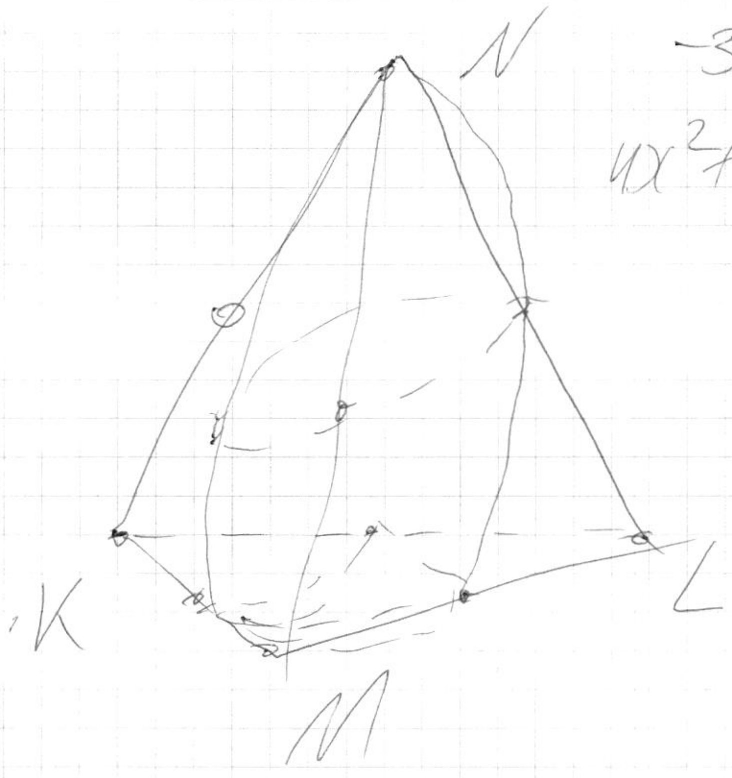
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$-36x^2+4x^2+36x-3$

$4x^2+4x+1=$

$$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b$$

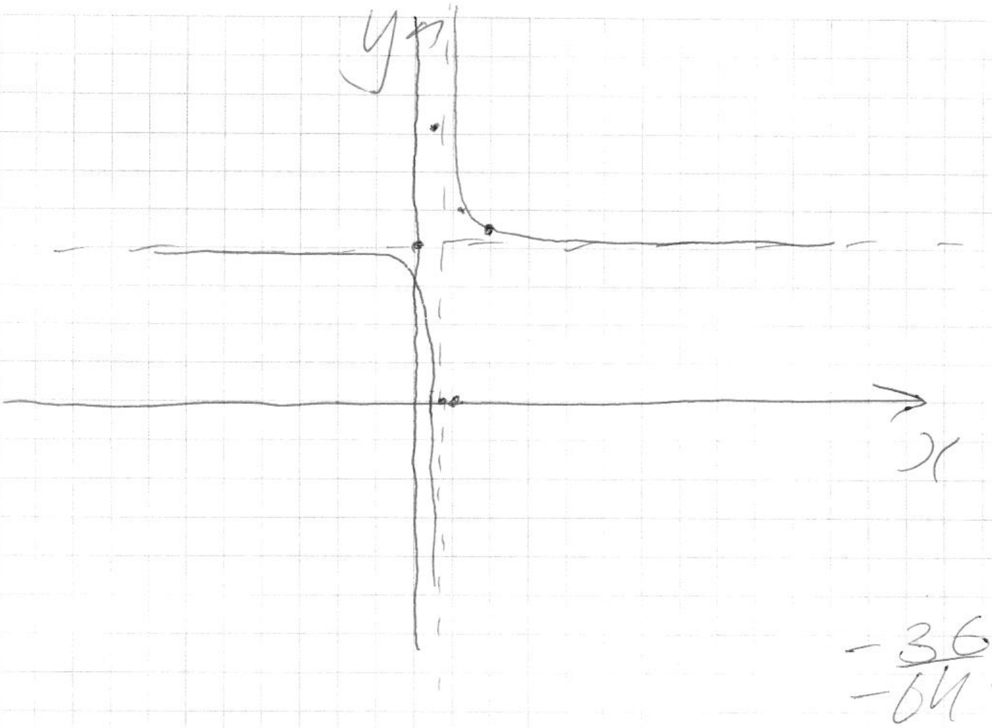
$$-36x^2+36x-3\ge ax+b.$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$\begin{array}{r} 81 \\ -24 \\ \hline 57 \end{array}$$

$$\frac{-36}{-64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$-32x^2+36x-3 = \frac{16x-16}{4x-5}$$

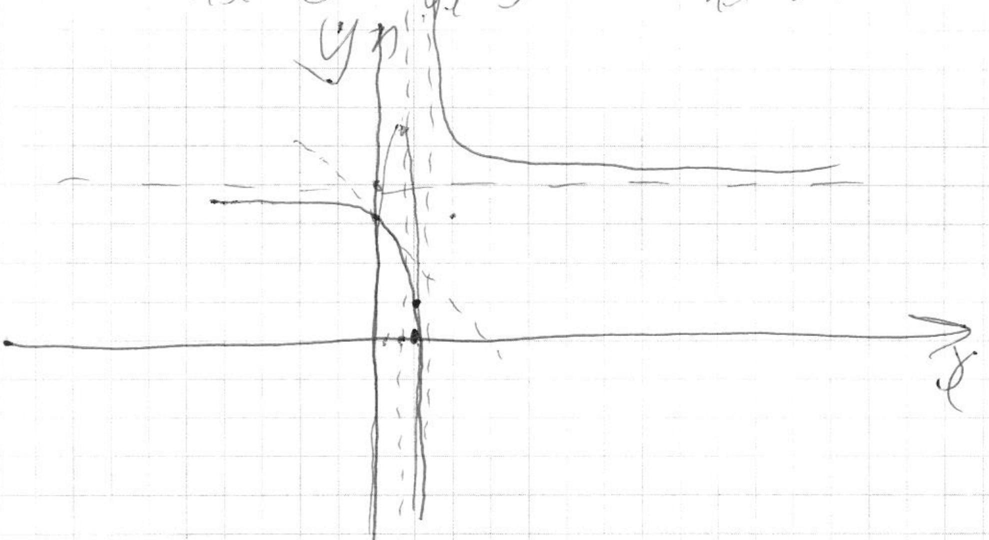
$$= \cancel{-128x^3+144x^2-12x+160x^2-180x+15-16x+16}$$

$$-128x^3+304x^2-38x-180x+31=0$$

$$-128x^3+304x^2-218x+31=0$$

$$-32\cdot\frac{81}{16\cdot 8}+36\cdot\frac{9}{16}-3= -\frac{81}{8}+\frac{81}{4}-3 = \frac{81}{8}-3=\frac{81-24}{8}=\frac{57}{8}.$$

$$\frac{16x-20}{4x-5}+\frac{4}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}.$$

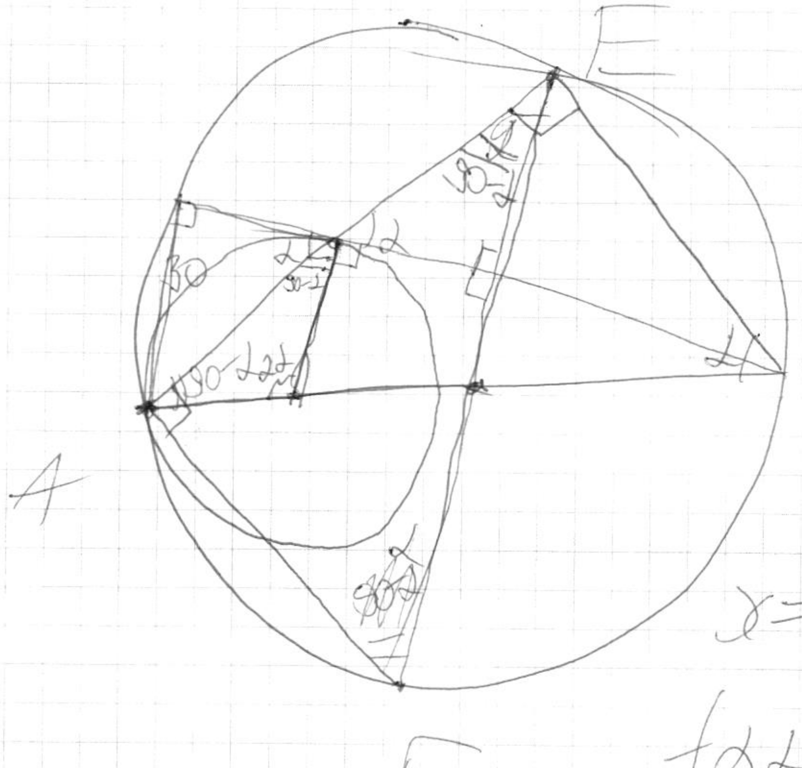


☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\gamma + 180 - 2\alpha = 180^\circ$

$\gamma = 2\alpha$

$180 - \alpha$

$\frac{r}{x} = \frac{BD}{BD + CD} = \frac{17}{32}$

$x = \frac{32}{17} r = \frac{32 \cdot 15}{17 \cdot 16} \cdot 17 = 30.$

$tg\, \alpha = 2 \frac{30}{15} = \boxed{4}$

$\sin\alpha = \frac{AE}{2R}$; $AE = 34 \sin\alpha.$ $\cos\alpha = \frac{AF}{2R} = \frac{AF}{34}$

$AF = 34 \cos\alpha.$

$\frac{1}{2} AE \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 34 \sin\alpha \cdot 34 \cos\alpha = 578 \sin\alpha \cos\alpha$

$34 \cdot 4 = 136$ $\quad 17 \cdot 2 \cdot 4 = 136$

~~$1 + tg^2\alpha = \sqrt{\ }$~~

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + 16 = 17$

$\cos\alpha = \cancel{\frac{1}{\sqrt{26}}}$ $\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$578 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 578 \cdot \frac{4}{17} =$

$34 \cdot \cancel{17} \cdot \frac{4}{\cancel{17}} = 34 \cdot 4$

$34 \cdot 17$: 238, 34, 578

$34 \cdot 4 = 136.$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k.$ $\geq 3.$

$2\alpha+2\beta$

$2\sqrt{34} - r = \frac{\left(\frac{17}{2}\right)^2}{2\sqrt{34}}$

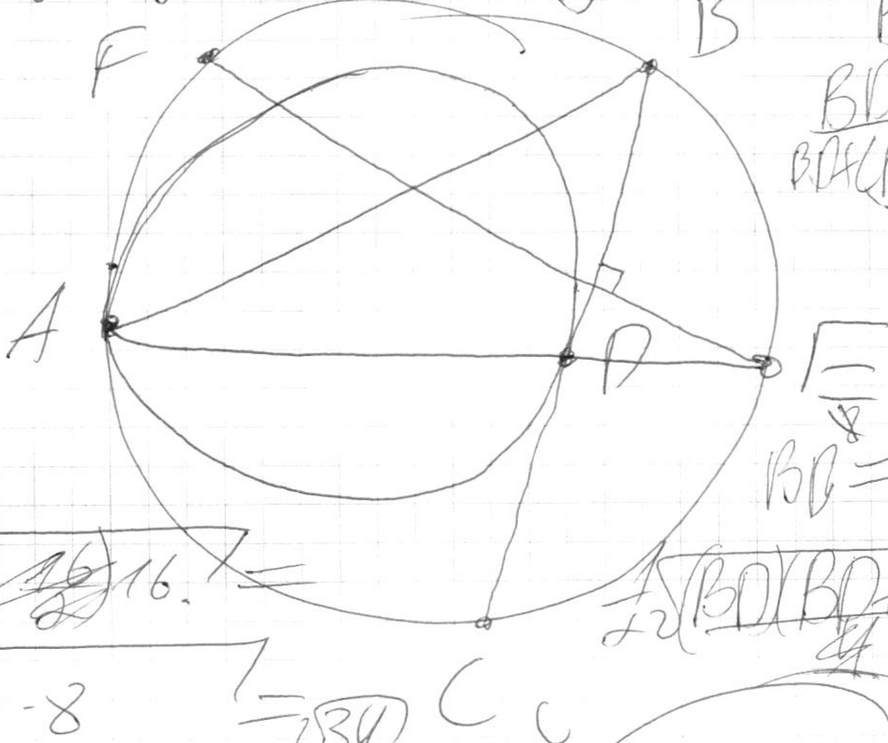
$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y =$ $r = 2\sqrt{34} - \frac{\left(\frac{17}{2}\right)^2}{2\sqrt{34}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$BD^2 = (2R-r)2R.$

$\frac{BD}{BD+CD} = \frac{2R-r}{2R}$

$2R-r = \frac{BD}{BD+CD}2R$



$\frac{r}{8}$

$BD^2 = \frac{BD}{BD+CD}\cdot 4R^2$

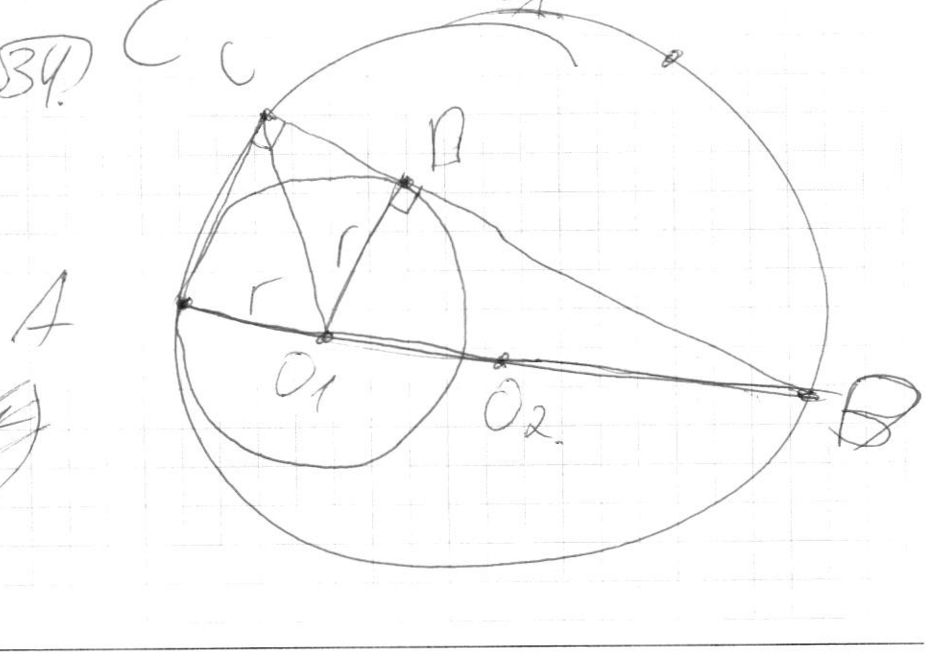
$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2}\left(\frac{32}{2}\right)}16. =$

$\frac{1}{2}\sqrt{BD(BD+CD)} = R.$

$\frac{1}{2}\sqrt{17\cdot 8} = \sqrt{34}.$

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$



$\frac{15}{2}+\frac{17}{2} =$

$17\cdot 2 =$

$\begin{array}{r}15\\+17\\\hline 32\end{array}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-6)^2+9(2y-1)^2$

$9(2y-1)^2=9(4y^2-4y+1)=36y^2-36y+9$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2-90=0.$

$x-6-6(2y-1)=x-6-12y+6=x-12y.$

$x-6-6(2y-1)=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2-90=0.$

$x-6=a$

$2y-1=b.$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2+9b^2-90=0.$

$a-\sqrt{ab}-6b=0.$

$(\sqrt{a})^2-\sqrt{b}\sqrt{a}-6\sqrt{b}^2=0.$

$D=b+24b=25b$

$\sqrt{a}=\frac{\sqrt{b}\pm5\sqrt{b}}{2}$

$\sqrt{a}=-2\sqrt{b}$

$\sqrt{a}=3\sqrt{b}$

-15
-17
$10 \quad 5$
15
1255

$\begin{cases}b=1\\a=9\end{cases}$

$\begin{cases}b=-1\\a=-9\end{cases}$

$34R=64R-32r$

$32r=30R$

$r=\frac{15}{16}R.$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b})(\sqrt{a}-3\sqrt{b})=0.$

$\sqrt{a}=-2\sqrt{b}$ – не удовл.

$\sqrt{a}=3\sqrt{b}$

$a=9b^2$

$90b^2=90$

$\begin{cases}b=\pm1\\a=\pm9.\end{cases}$

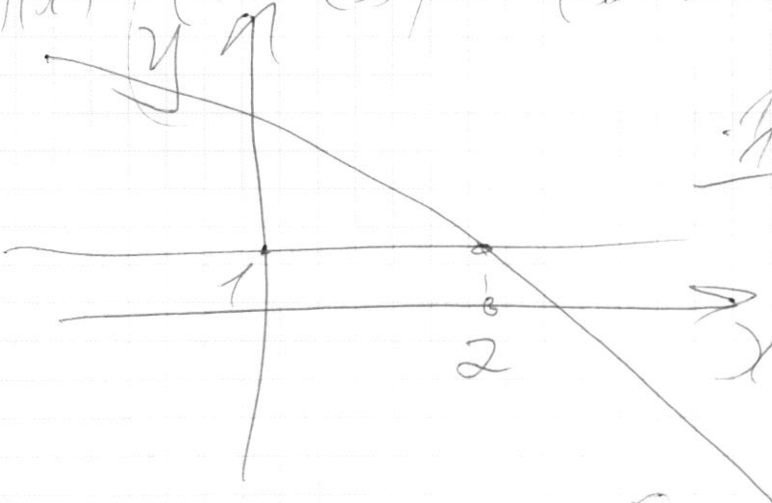
☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f'(x) = \left(\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x\right)' = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{4}{5} < 0.$



$\cdot\frac{15}{17}$

$\cdot 17 \quad 17$

$\times 17$
17
119
17
$= 289.$

$D = 100 - 36 = 64$

$x = \frac{10 \pm 8}{2} = 5 \pm 4$

$x = 1 \quad x = 9.$

$\cdot 15$
17
$+105$
15
255

$\boxed{x \in (0;1) \cup (9;10)}$

$x \in (-\infty; 2).$

$a < 2.$

$\log_3 t < 2.$

$\log_3 t < \log_3 9$

$t < 9.$

$10x - x^2 - 9 < 0$

$x^2 - 10x + 9 > 0.$

$D = 100 - 36 = 64.$

$x = \frac{10 \pm 8}{2} = 5 \pm 4.$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 9 \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty).$

$\dfrac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{2} + \frac{15}{2}} = \frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{32}$

$64R - 32r = 34R$

$30R = 32r$

$15R = 16r \quad r = \frac{15}{16}R$

$\frac{255}{16}.$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = \left(2R - \frac{15}{8}R\right)2R$

$+15$
17
32

$289 = 8R\left(2R - \frac{15}{8}R\right) =$

$289 = 16R^2 - 15R^2 = R^2$

$R = 17 \quad r = \frac{15}{16} \cdot 17 =$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

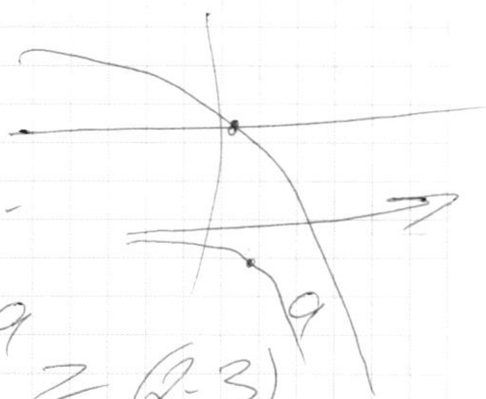
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{25}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\cancel{\log_a b^c}$ $\log_b c = $ $\log_b a \log_b c$

$b^{\log_b c^{\log_b a}} = c^{\log_b a}$



$t+4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

$\log_3 t = a$ $\quad 3^a + (2\cdot 2)^a \geq (2\cdot 3)$

$t=3^a$ $\quad \frac{4}{5} \vee \frac{16}{25}$ $\quad \frac{4}{5}\ 1 \vee \frac{4}{5}$

$3^a + 4^a \geq 5^a$ $\quad \log_5 5^a$

$\cancel{3^a + 2^{2a} \geq (2\cdot 3)^a}$ $\quad \log_5 3 + \log_5 4 \vee 1$

$\log_5(3^a+4^a) \geq a$ $\quad \log_a(b+c)$

$a\log_5 3 + a\log_5 4 \geq a$ $\quad \log_a b + \log_a c = \log_a bc$

$a(\log_5 3 + \log_5 4 - 1) \geq 0$

$\log_3 t(\log_5 3 + \log_5 4 - 1) \geq 0$

$\left(\frac{3}{2}\right)^a + 2^a \geq 3^a$ $\quad \left(\frac{3}{5}\right)^a + \left(\frac{4}{5}\right)^a \geq 1$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\left(\frac{3}{4}\right)^a + 1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^a$ $\quad -x$

$\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=\frac{25}{25}=1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{4}{5}\right)^1 = 1$

$\cancel{\log_3 t}$ $\quad \cancel{t = \log_3}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-6=-9 \\ 2y-1=-1 \end{cases}\right.$$

$$\left[\begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}\right.$$

$\sqrt{2\cdot 15-12-15+6}$

$\sqrt{9}=3.$

$\cancel{15-2} \neq 15-12=3$

$225 \cancel{+36} - 12 \cdot 15 \cancel{-36} = 45.$

$15 \cdot 12 = 30 + 15 = 180.$

$225 - 180 = 45$

$7^{\log_2 8}$

$7^{\log_2 8} = 7^3$

$8^{\log_8 7} =$

$2^{3\log_8 7}$

$8^{\log_2 7}$

$= 147.$

$2^x = 3$

$\log_2 3$

$2^x = \frac{1}{4}$

$-3 = \sqrt{0-0+3+6} \neq 3.$

№ 3.

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2 + |10x-x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2>0$

$x(10-x)>0$

$x \in (0;10)$

$10x-x^2=t, \quad t>0$

$t+|t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} > 0$

$t^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$

$2^{\log_2 4} =$

$\log_2 4 = 2.$

$a^{\log_b c}$

$a^{\log_b c} = 6.$

$3^{\log_3 9} = 9$

$\log_b c \log_b c = \log_2 4 = 2$

$a^{\log_b c} = 6$

$t+t^{\log_3 6}$

$6^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha.$

$\cancel{\sin x + \sin y = 2\sin x} \quad 2\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin$

$\cancel{\sin(x+x) = 2\sin x\cos x.}$

$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-}{}$ $\quad \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\sin x + \sin y = 2\sin$

$\sin x + \sin 2x = \sin x + 2\sin x\cos x$

$\sin x + \sin 2x = 2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\cos\frac{x-2x}{2} =$

$2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} = 2\sin\left(\frac{4\alpha + 4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) =$

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}.$

$\div\frac{2}{85}$ $\cos 2\beta = \div\frac{2}{85}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{85}$

$\cancel{\sin 2}$ $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta =$

$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{85} + 2\pi n$

$\beta = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{85} + \pi n$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45.$

$45=36+9$

$45=25+20$

$45=16+29$

$45=49-5.$

$36+45=81$

$x^2+36y^2=(x+6y)^2 - 12xy.$

$(x-6y)^2+12xy$

$x^2+36y^2=(x+6y)^2-12xy.$

$\sqrt{x(2y-1)-6(2y-1)}=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$\sqrt{(2y-1)(x-6)}=x-12y$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9-90=0$

$x^2-12x+36+36y^2-36y-45=0$

$x^2-12x+36y^2-36y$

$(x-6)^2=x^2-12x+36.$

$x^2-12x+36+36y^2-36y=81$

$45+36=81$

$(x-6)^2+36y^2-36y-81=0.$

$(x-6)^2+5(12y^2-12y+27)=0.$

$(6y-\cancel{1}3)^2=36y^2-36y+9=9(4y^2-4y+1).$

$\cancel{(6y-3)}$

$\sqrt{(2y-1)(x-6)}=x-12y.$

$(x-6)^2+9(4y^2-4y-9)$

$(x-6)^2+(6y-3)^2$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9-72=0$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2+72=0.$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)