МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 9 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x + 2y) - \sqrt{3} \sin(x + 2y) = -16 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABCD$ и CDD_1C_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых B_1C_1 и C_1D_1, плоскости CDD_1, а также плоскости ABC в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44 & (1) \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20 & (2) \end{cases} \Rightarrow \quad 4x - y = 64, \; y = 4x-64$$

Перепишем 1:

$$4x - \sqrt[3]{-(4x-y)(4x+y)} = 44,$$

$$4x - 4\sqrt[3]{-(4x+y)} = 44,$$

$$4x - 4\sqrt[3]{64-8x} = 44,$$

$$x - 2\sqrt[3]{8-x} = \cancel{20}\ 11.$$

~~?~~ При $x<0$, $x-2\sqrt[3]{8-x}$ будет <0.

Далее будем рассм-ть $x \geq 0$. Рассм-м $x-2\sqrt[3]{8-x}$ как $f(x)$.

$$f'(x) = 1 - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{8-x}^2}\cdot(-1) =$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{8-x}^2} \; (>0) \Rightarrow$$ функция

всегда возр-ет, а значит принимает нужное знач лишь при одном x. Подстановкой находим, что нужный $x=9$.

Тогда $y = -28$.

Ответ: $x=9$, $y=-28$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(x+\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}-x)$

5.

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos(\frac{\pi}{3}-x) \\ \cancel{\sin x} \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin(x+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

Найти $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$

$\parallel$

$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\cos y \sin x - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$

$\sin x \cos y + \cos x \sin y = 9\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$ искл.-м-то

$-16\sin(x+\frac{\pi}{6}) =$

$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$= -16\left(\cancel{\sin x \cdot \frac{1}{2}+} \sin x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right)$

$\cos(\frac{\pi}{3}-x) = \sin(x+\frac{\pi}{6})$

$=)$

$\cancel{\cos(x+y)}$

$\cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -\frac{16}{9}\sin(x+y)$

$\cos x\cos 2y - \sin x \sin 2y - \sqrt{3}\sin x \cos 2y - \sqrt{3}\cos x \sin 2y =$

$= -\frac{16}{9}\sin(x+y)$

$\cos(2y+x+\frac{\pi}{3}) = -8\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cos(2y+x+\frac{\pi}{3}) = -8\cos(\frac{\pi}{3}-x)$

$\cancel{-\sin}$

$(x+y)(y+2y)$

~~$\cos x(\cos^2 y - \sin^2 y) - 2\sin^2 x \cos y - \sqrt{3}\sin x(\cos^2 y - \sin^2 y)$~~

$\cos 2y(\cos x - \sqrt{3}\sin x) - \sin 2y(\sin x + \sqrt{3}\cos x) =$

$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$= 2\cos 2y(\cos(x+\frac{\pi}{3}) + 2\sin 2y \sin(x+\frac{\pi}{3}) =$

$= -16\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cos(2y+x+\frac{\pi}{3}) =$

$= -\sin(x+y) + \sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cos 2y\cos(x+\frac{\pi}{3}) - \sin 2y \sin(x+\frac{\pi}{3}) = -8\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cos(2y+x+\frac{\pi}{3}) = -8\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$-9\sin(x+\frac{\pi}{6}) + \sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cancel{-9\sin}\ -\sin(x+y) + \sin(x+\frac{\pi}{6})$

$x+y=\alpha,$

$x-\frac{\pi}{3}=\beta$

$\cos(2y+x+\frac{\pi}{3}) =$

$= 2\sin($

$\cos 2\alpha\cos\beta + \sin 2\alpha\sin\beta = -\sin\alpha + \cos\beta$

$2\sin\alpha$ игрд...

$\cos(2y+x+\frac{\pi}{3}) =$

$\cos(2(x+y) - (x-\frac{\pi}{3})) =$

$= -\sin(x+y) + \cos(\frac{\pi}{3}-x)$

$= \cos 2(x+y)\cos(x-\frac{\pi}{3})$

$+ \sin 2(x+y)\sin(x-\frac{\pi}{3})$

$\cos(2\alpha-\beta) = -\sin\alpha + \cos\beta$

$\cancel{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\sqrt{\frac{1}{1+\log_x 3}} \le -\frac{1}{1+2\log_x 3}$$

$\log_x 3 \overset{def}{=} \alpha$, т.к. $x \in (\frac{1}{9}; \frac{1}{3})$,

$\alpha \in (-1; -\frac{1}{2})$.

Т.е.

$$\sqrt{\frac{1}{1+\alpha}} \le -\frac{1}{1+2\alpha}$$

Т.к. $-(1+2\alpha) > 0$,

$$\sqrt{\frac{(1+2\alpha)^2}{1+\alpha}} \le 1$$

Т.е. $(1+2\alpha)^2 \le 1+\alpha$.

$1+4\alpha+4\alpha^2 \le 1+\alpha$

$\alpha(3+\alpha) \le 0$

$3+\alpha > 0$,

$\alpha < 0$.

~~$\Rightarrow$ ... $x \in (\frac{1}{9}; \frac{1}{3})$~~

$\Rightarrow \alpha(3+\alpha) < 0$

Значит, для $x \in (\frac{1}{9}; \frac{1}{3})$ нер-во вып-ся.

Ответ: $x \in (\frac{1}{9}; \frac{1}{3}) \cup \{1\}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq \log_{9x}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

ОДЗ: 1. $\log_{3x} x^4 \geq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3}$, (осн $\neq 1$), $x > 0$ (осн > 0)

при $x > \frac{1}{3}$: $x^4 \geq 1$; при $x < \frac{1}{3}$, $x^4 \leq 1$

$\Rightarrow x \in (0; \frac{1}{3}) \cup [1; +\infty)$.

2. $x \neq 0$, $x > 0$, $x \neq \frac{1}{9}$.

$\Rightarrow$, итоговое ОДЗ: $x \in (0; \frac{1}{9}) \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{3}) \cup [1; +\infty)$.

Перепишем нер-во:

$2\sqrt{\log_{3x} x} \leq -2\log_{9x} x$ (ОДЗ не измен-сь),

$\sqrt{\log_{3x} x} \leq -\log_{9x} x$

Необх: $\log_{9x} x < 0$;

Т.е при $x > \frac{1}{9}$, $x \leq 1$; при $x < \frac{1}{9}$, $x \geq 1$.

$\Rightarrow x \in (\frac{1}{9}; 1]$.

Учитывая все огран-ия на x:

$x \in \cancel{(0; \frac{1}{9})}\ (\frac{1}{9}; \frac{1}{3}) \cup \{1\}$.

При $x = 1$: $0 \leq 0$ (нер-во вып-ся)

Далее считаем: $x \in (\frac{1}{9}; \frac{1}{3})$.

Перепишем нер-во:

$\cancel{\sqrt{\frac{1}{\log_x 3x}} \leq -\frac{1}{\log_x}}$

$\sqrt{\frac{1}{\log_x 3x}} \leq -\frac{1}{\log_x 9x}$ ~~ОДЗ $x \in (\frac{1}{9}; \frac{1}{3})$~~ (доп огран нет)

(прод-е на развороте)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

Пусть α ~~наим~~ α – первая из трёх степеней десятки.

Посмотрим, какие знач. она может принимать. (1-зн – число)

При $\alpha = 2$, имеем двузн + трёхзн + чзначн = ~~5-тизначн~~ 12345 (может быть)

При $\alpha = 1$: однозн + двузн + трёхзн – не может быть 5-тизначным. (Аналогично при $\alpha < 1$)

При $\alpha = 3$: 3зн + 4зн + 5зн – может быть ~~(может быть)~~

При $\alpha = 4$: 4зн + 5зн + 6зн – может быть ~~(но 6й знак = 0)~~

При $\alpha = 5$: 5зн + 6зн + 7зн – ~~не может быть. 7й знак может быть.~~

~~При $\alpha = 6$: 6зн + 7зн + 7зн – не может быть (~~ ~~искомое число –~~ ~~семизн. ⇒ у неё~~ ~~сумма будет иметь какие-то не-нулевые знаки~~ ~~после~~ ~~не будет соотв. 12345.~~ – не может быть, т.к. число 9значное, ~~от него есть ненулевые знак~~ сумма будет как минимум ≥ 1000000 и $\Rightarrow > 12345$. Аналогично при всех больших α.

1. $\alpha = 2$. ~~Переставим~~ Число, состоящее из первых (первых с конца, т.е. знаков с малыми разрядами) ~~двух~~ знаков исходного α, предст-м как $\underbrace{z}_{\text{двузн}} + \underbrace{100b + 1000a}_{\text{цифры}}$

Тогда $12345 = 1000a + 200b + 3z$.

По mod 100:

045 ⋮ 3
1345 ⋮ 3
245 ⋮ 3

$45 \equiv 3z \pmod{100}$ ~~$z \equiv 15 \bmod 100$~~

$\Rightarrow z = 15$.

По mod 1000:

$345 \equiv 200b + 45$, $300 \equiv 200b$

Таких нат. b не сущ.

2. $\alpha = 3$. Число, состоящее из первых α (5-ти) (с конца) знаков исходного, представим как $\underbrace{z}_{\text{трёхзн}} + \underbrace{1000b + 10000a}_{\text{цифры}}$.

~~Тогда~~ (прод-е на развороте)

Тогда $12345 = 10000a + 2000b + 3z$

По mod 1000:

$345 \equiv 3z$,

$0345 \vdots 3$
$1345 \not\vdots 3$
$2345 \not\vdots 3$

~~$115 = z$~~

$\Rightarrow 345 = 3z$, $z = 115$.

По mod 10000:

$2345 \equiv 2000b + 345$

~~$\Rightarrow b = 1$;~~ $20000 \equiv 2000b$.

$b = 0, 1$.

Значит, $a = 1$.

Итак: ~~Перед~~

У исходного числа могут быть такой вид: $\overline{xy1\cancel{0}115}$ ← 1 алиб.

Т.к $x > 0$. возможных в-в xy — 90.

$\Rightarrow$, при $\alpha = 3$, у нас ~~90~~ $90 \cdot 2 = 180$ возм в-в этих числа

3. $\alpha = \cancel{5}$ 4. Число, состоящее из первых 6ти знаков (с конца) нек-го

представим как $100000a + 10000b + z$ — 4хзн число.

$\underbrace{}_{2 \text{ цифры}}$

Тогда $12345 = 100000a + 20000b + 3z$ По mod 10000: $2345 \equiv 3z$

~~Т.к z — 4хзн,~~ Варианты: $2345 = 3z$, ✗
$12345 = 3z$, ✓
$22345 = 3z$. ✗

$\Rightarrow z = 4115$.

~~По mod~~ 100000:

$1\cancel{2345 = 100000a}$

$\Rightarrow$ При $a \geq 1$, $100000a > 12345 \Rightarrow a = 0$.

$12345 = 20000b + \cancel{345} \cancel{4115}$ 12345,

$b = 0$

~~$\Rightarrow$ число имеет вид: $\overline{x0\ 0\ 345}$~~ ~~$\Rightarrow$ число имеет вид: $\overline{x000\ 12345}$~~

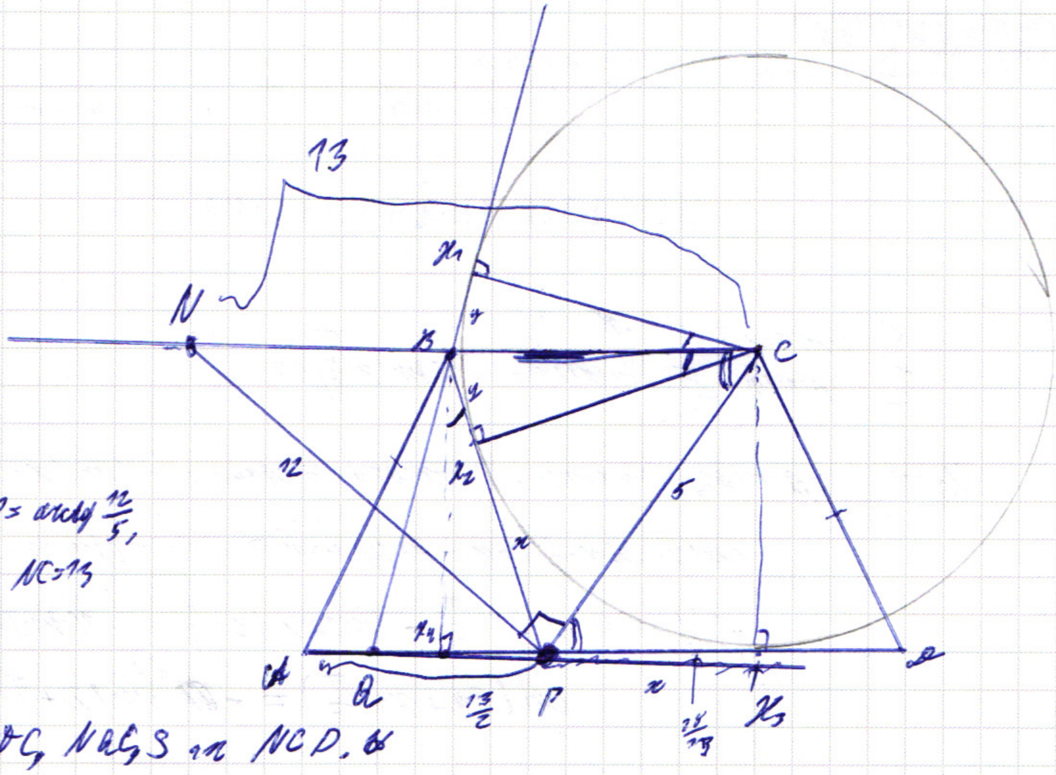
$\Rightarrow$ число имеет вид: $\overline{x004115}$. $x > 0$, $\Rightarrow$ вариантов: 9.

$\Rightarrow$ Всего в-в: $180 + 9 = 189$.

Ответ: 189.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

4.

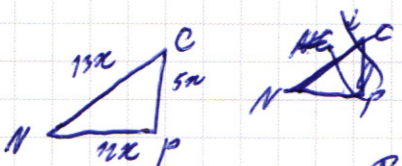


$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$,

$AP = \frac{13}{3}$ $NC = 13$

Найти: $\angle ADC$, NQ, S тр NCD.

Решение:



Обозначим $NP = 12x$, $CP = 5x \Rightarrow NC = 13x$

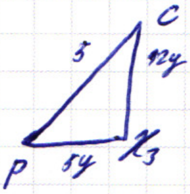
Т.к $NC = 13$, $NP = 12$, $CP = 5$.

Равенство ~~к~~ касат-х: $PX_3 = PX_2$,

$QX_3 = QX_1$, $BX_2 = BX_1$

Т.к у нас трапеция

$BC \parallel AD$, $\Rightarrow \angle BCP = \angle CPD$. $\Rightarrow$



r(окруж)

$\Rightarrow CX_3 = \frac{12}{5}\ \frac{60}{13}$, $PX_3 = \frac{25}{13} = PX_2$

~~$\Rightarrow r$(окр) =~~

$25 = 169y^2$, $y = \frac{5}{13}$.

5.

$$\begin{cases} \sin(x+y) = tg\left(\frac{\pi}{3}-x\right) & (1) \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) & (2) \end{cases}$$

Из (2): $\cos x \cos 2y - \sin x \sin 2y - \sqrt{3}\sin x \cos 2y - \sqrt{3}\cos x \sin 2y = -16\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\cos(2y)(\cos x - \sqrt{3}\sin x) - \sin 2y(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = -16\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2\left(\cos 2y \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \sin 2y \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right) = -16\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(2y+x+\frac{\pi}{3}\right) = -8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

$[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}]$

$f(x)$

$\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2} \le ax+b \le -\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$ $g(x)$

ОДЗ: $x \in [-\frac{5}{2}; \frac{55}{2}]$.

$275+100x-4x^2 \ge 0$

$D = 2500+4400=3600$

$x = \frac{-50 \pm 60}{-4}$

$x_1 = -\frac{5}{2}; x_2 = \frac{55}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2}} \cdot (25-2x)$

$\Rightarrow$ возр-ет до $x = \frac{25}{2}$. (На пром $[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}]$ возр-ет)

$-x^2 \cdot 4 + 20x + 135 = 0$

$D_1 = 100+540 = 640$

$g'(x) = \frac{1}{3}(-2x+5)$. $\Rightarrow$ возр-ет до $x = 2{,}5$, потом убывает

Необх: $\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2} \le -\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$

$f(\frac{5}{2}) =$

$= \sqrt{\frac{275}{4}-\frac{250}{4}-\frac{25}{4}} = 0$

$g(-\frac{5}{2}) = +\frac{1}{3}(-\frac{25}{4}-\frac{25}{2}+\frac{135}{4}) =$

$= 5.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \cos(2y+x+\frac{\pi}{3}) = -8\sin(x+\frac{\pi}{6}) \\ \sin(x+y) = 9\cos(\frac{\pi}{3}-x) \end{cases}$$

$$\cancel{\cos((x+y)+(y+\tfrac{\pi}{3})) = \cos(x+y)\cos(y+\tfrac{\pi}{3}) - \sin(x+y)\sin(y+\tfrac{\pi}{3})}$$

$$\cos(2y+x+\frac{\pi}{3}) = -\sin(x+y) + \sin(x+\frac{\pi}{6})$$

6.

$$\cos(x+y)\cos(y+\frac{\pi}{3}) - \sin(x+y)\sin(y+\frac{\pi}{3}) = -\sin(x+y) + \sin(x+\frac{\pi}{6})$$

$$\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2} \le \dots \le -\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{95}{4}$$

если $x \in [-\frac{5}{3}; \frac{9}{2}$

$$\frac{275}{4} - \frac{250}{4} - \frac{25}{4} = 0$$

$-2x+26 \quad x=12{,}5$

$= \frac{25}{2}$

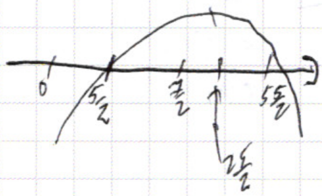
$\frac{9}{2}$

$$\frac{275}{4} + \frac{225}{2} - \frac{81}{4} =$$

$= \frac{225}{4}$

вершина

(график



$$275+100x-4x^2=0$$

$$D/4 = 2500+1100 = 3600$$

$$x = \frac{-50 \pm 60}{-4} \quad (\dots -\frac{5}{2}, \dots +\frac{110}{4} = \frac{+55}{2}$$

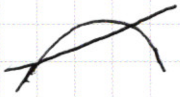
Необх.

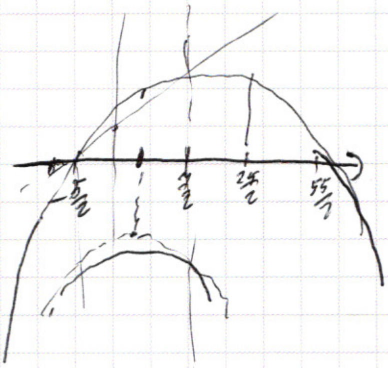
$$\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2} \le \dots \le -\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{95}{4} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-x^2+5x+\frac{180}{4}\right)$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)





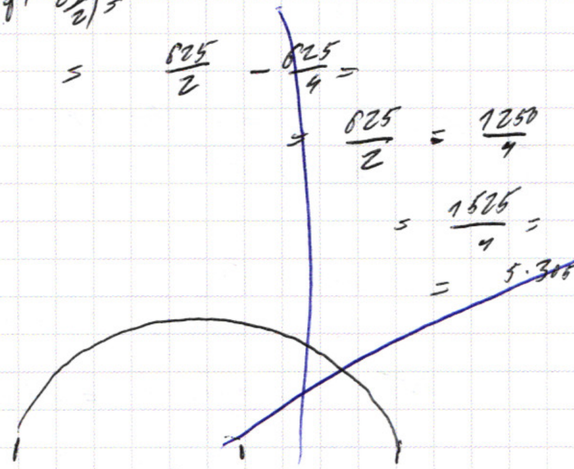
$f\left(\frac{25}{2}\right) =$

$= \frac{625}{2} - \frac{625}{4} =$

$= \frac{625}{2} = \frac{1250}{4}$

$= \frac{1525}{4} =$

$= 5\cdot 305 = 5\cdot 2\cdot 07$



~~$\frac{x^2}{3} + \frac{5}{x} + \frac{145}{4}$~~

~~$f =$~~

$\frac{-2x+5}{3}$

$x = \frac{5}{2}$

$F\left(-\frac{5}{2}\right) = \cancel{25}$

$\frac{1}{3}\left(-x^2+5x+\frac{125}{4}\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}+\frac{125}{4}\right) =$

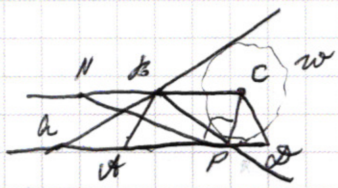
$= \frac{175}{3\cdot 4}$

~~SA~~

$CX_3^2 = \ldots = CD^2 =$

$= \ldots = CD(CD-14)$

CX_3



$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20 \end{cases}$$

~~ОДЗ: |y|≥|4x|~~

$\Rightarrow \quad 4x - y = 64$

$4y = 4x - 64$

~~4x~~

$(y+4x)(y-4x)$

~~$\Rightarrow 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2}$~~

$\Rightarrow y - 4x = -64$

(Можно поделить по телами)

$\sqrt{64} = 4$

~~y=~~ $y = 4x - 64$

$4x - 4\sqrt{(y-4x)} = 44$

$4x - 4\sqrt[3]{64-8x} = 44$

$x - \sqrt[3]{64-8x} = 11$

~~$x - 11 = \sqrt[3]{64-8x}$~~

При x=0:
против-е

$x - 2\sqrt[3]{8-x} = 11$

~~$x - 11 = 2\sqrt[3]{8-x}$~~

$x - 11 = 2\sqrt[3]{8-x}$

~~$f'(\ldots) = (8-x)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{8-x}^2}$~~

$=$

~~$1 - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{8-x}^2}$~~

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

~~При x=9:~~

~~x=~~

При x=9: подх

ф-я возр-ет

$1 + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{8-x}^2}$

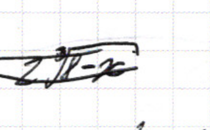
$\sqrt[3]{8}^2 = 4$

$\Rightarrow \sqrt[3]{8-x}^2 \geq 4$ (⇒ ко-ен)

Т.е подходит при x=9

$36 - y = 64$: $y = -28$ (ко-ен)

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 28 \\ \hline 208 \\ +\ 56 \\ \hline 788 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ \times\ 16 \\ \hline 486 \\ +\ 81 \\ \hline 1296 \end{array}$$



$\Rightarrow$ рм $=$ 528
508

$= 4 \cdot 132 =$
$= 8 \cdot 66$
$4 \cdot 127 = 4 \cdot$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

ОДЗ: $x>0$; $x \ne \frac{1}{3}$, $x \ne \frac{1}{9}$

$2\sqrt{\log_{3x} x} \le -2\log_{9x} x$

$\sqrt{\log_{3x} x} \le -\log_{9x} x$

Также:

$\log_{3x} x^4 \ge 0$:

$4\log_{3x} x \ge 0$

1) При $3x>1$:

$x \ge 1$.

(т.к. $x>1$).

2) При $3x<1$:

$x<0$

(либо — нет её пере-ия)

Нет.

При $x>\frac{1}{3}$ $x \ge 1$

т.к. $x \in$

начальн...

$[\frac{1}{3};1]$

$\frac{1}{3}$ x 1

~~$x \in$~~ $[\frac{1}{3};1)$ \ не прин.

x

Хотя

$-\log_{9x} x \ge 0$

т.к. $\log_{9x} x \le 0$

$9x > 1$:

$[\frac{1}{9};1]$

ничего-того

$\Rightarrow x \in [\frac{1}{9};1]$

$\Rightarrow x \in (\frac{1}{9};\frac{1}{3}) \cup (1;1)$

$a>1$ | Попробуем возвести

$\log_{3x} x \le (\log_{9x} x)^2$

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

~~$\log$~~ =

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_{3x} x = \frac{\log_{9x} x}{\log_{9x} 3x}$

$\ne 0$

$\log_{9x} 3x$

~~$\log_{9x} 3x$~~

$\log_{3x} x \cdot \log_{9x} 3x = \log_{9x} x$

$\frac{1}{\log_x 3x} \le \frac{1}{(\log_{x} 9x)^2}$ | ~~$\frac{\log_{9x} x}{\log_{9x} 3x} \le (\log_{9x} x)^2$~~ <0

$\Rightarrow \frac{1}{\log_{9x} 3x} \ge \log_{9x} x$

~~$1 \ge \log_{9x} x \cdot \log_{9x} 3x$~~

~~$1 \ge \log_{9x} x\,(\log_{9x} 3 + \log_{9x} x)$~~

$\frac{1}{\log_x 3x} \le \frac{1}{(\log_x 3x + \log_x 3)^2}$

$1 \ge$ $\log_{9x} x (\log_{9x} 3$

$a^2 + ab - 1 \le 0$

$1 \ge a^2 + ab$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3.

$10^{\alpha}, 10^{\alpha+1}, 10^{\alpha+2}$

тут типа α

Число цифр-α

$z \cdot 3 + 2a + b$

$z \cdot 3$ было 345.

~~1345~~
2345
3345
45

0345 только тут

1345
2345 (для всех и все?)

где-то $z:3$

$\Rightarrow z = 115$.

Последняя цифра

5 чисел

Мб: ~~$\alpha = 2$~~ (ненадо)

(z:3)

$\alpha = 3$ или $\alpha = 4$:

(Мб $\alpha = 5$ (хуже))

Отв-к: $\alpha + 2$ знач.

456

$\alpha = 5$:

$3z = 12345$

$z = 04115$

Но: тогда где итд имеют 0, чего не мб. (против-е)

Но $\alpha \neq 6$ т.к тогда был бы хотя бы 1 - и противоречие

1) $\alpha = 3$

1000

$3z + 2a + b$

0345

$z = 115$

$a = 7$, $b = 7$

$\Rightarrow$ число: 1 1115 тут мб любое

вначале: от но со ...

11115

100 - 10 = 90.

(Но! остаток 5 ...

$\alpha = 4$: и тут число

$3z = 12345$

$\Rightarrow z = 4115$

$1 + \cancel{a = 3}$

$2a = 3a$

$= 1$

~~$b = 1$~~ $a = 7$

$\Rightarrow$ число: 4 0 1 4115 - число

тут (только противное

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{\frac{1}{\log_x 3x}} \le -\frac{1}{\log_x 9x}$$

$$\sqrt{\frac{1}{1+\log_x 3}} \le -\frac{1}{1+2\log_x 3}$$

$\log_x 3 = \alpha$

$$\sqrt{\frac{1}{1+\alpha}} \le -\frac{1}{1+2\alpha}$$

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$-x^2 \cdot 4 + 20x + 135 = 0$

$\cancel{\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1+4\alpha+4\alpha^2}}$

$g_{1,4} =$

$\alpha = b^2$

$\log_b c = \frac{\log(b^2 c)}{2}$

$\cancel{1+4\alpha+4\alpha^2 = 1+\alpha}$

При $x=1$, $\log = 0$

$\log\left(\frac{1}{3}\right)^{3} \ge \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{3}\right)3 =$

$= -\frac{1}{2}$

$\cancel{\ge -1}$

$$\sqrt{\frac{(1+2\alpha)^2}{1+\alpha}} \ge 1$$

$\Rightarrow$ что ≥ 1

$\alpha = \log_x 3$

$\log\left(\frac{1}{3}\right)3 = -1$

$\alpha \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{(1+2\alpha)^2}{1+\alpha} \ge 1$$

$1+4\alpha+\alpha^2 \ge 1+\alpha$

$(\log_x 3)$

$3\alpha+\alpha^2 \ge 0$

$\Rightarrow$ может только на в-т

$\cancel{\ge 0}$

$\alpha(3+\alpha) \ge 0$

≥ 0

$-25-50+135 = 60/4 = 15$

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)