МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{4\beta}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$$

$$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

1) $\sin\left(2\alpha+\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1.1. $2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$

$\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$

$tg\,\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

1.2. $2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$2\alpha = \frac{3\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi n$

$\cos^2\alpha = \left(\cos\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \sin\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 = \frac{9}{34}$

$tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{25}{9}$

$\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{5}{3}$

2) $\sin\left(2\alpha-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

2.1. $2\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi l \Rightarrow$

$\alpha = \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi l$

$\cos^2\alpha = \left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 = \frac{25}{34} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{34}{25} - 1 = \frac{9}{25} \Rightarrow$

$tg\,\alpha = \frac{3}{5}$

2.2. $2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$tg\,\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\frac{3}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$

№ 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$ ОДЗ $y-6x\geq 0$

I ур-ние: $36x^2-12xy+y^2=xy-6x-y+6$

$36x^2+(6-13y)x+y^2+y-6=0$

$D=36-156y+169y^2-144y^2-144y+864=25y^2-300y+$
$+900=(5y-30)^2 \Rightarrow x_1=\frac{13y-6+5y-30}{72}=\frac{18y-36}{72}=\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}$

и $x_2=\frac{13y-6-5y+30}{72}=\frac{1}{9}y+\frac{1}{3} \Rightarrow$ возможны

2 случая: $9x=y+3$ или $y=9x-3$ и $4x=y-2$ или
$y=4x+2$

1) $y=9x-3 \Rightarrow 9x^2+81x^2-54x+9-18x-108x+36=45$

$90x^2-180x=0 \Rightarrow x=0$ или $x=2$ $\quad (0;-3)\notin$ ОДЗ

~~(0; 2) (пара x = 2 и y = 10 ∉ ОДЗ)~~ $\quad (2;15)\in$ ОДЗ

2) $y=4x+2 \Rightarrow 9x^2+16x^2+16x+4-18x-48x-24=45$

$25x^2-50x-65=0 \Rightarrow 5x^2-10x-13=0$

$D_1=5^2+5\cdot 13=25+65=90=(3\sqrt{10})^2$

$x_1=\frac{5+3\sqrt{10}}{5}=1+\frac{3\sqrt{10}}{5}$ $\qquad x_2=1-\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$y_1=6+\frac{12\sqrt{10}}{5}$ $\qquad y_2=6-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$y_1-6x_1=6+\frac{12\sqrt{10}}{5}-6-$
$-\frac{18\sqrt{10}}{5}=-\frac{6\sqrt{10}}{5}<0$

эта пара $\notin$ ОДЗ

$y_2-6x_2=6-\frac{12\sqrt{10}}{5}-6+\frac{18\sqrt{10}}{5}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$

эта пара $\in$ ОДЗ

Ответ: $(2;15)$ и $\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5};\ 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Для любого числа k $f(k)=f(1\cdot k)=f(1)+f(k) \Rightarrow$ $f(1)=0$

$f(1)=f\left(\frac{k}{k}\right)=f(k)+f\left(\frac{1}{k}\right)=0 \Rightarrow f(k)=-f\left(\frac{1}{k}\right)$

Найдем для каждого k от 4 до 28 $f(k)$ и $f\left(\frac{1}{k}\right)$, основываясь на том что $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$, где p - простое, а также на том, что любое число $n\in N$ можно представить в виде произведения нескольких простых чисел.

x	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$f(x)$	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0	1
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	0	-1	0	-1	0	0	-1	-2	0	-3	-1	-1	0	-4	0	-4	-1	-1	-2	-5	0	-2	-3	0	-1

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y) \Rightarrow$ подходят все пары $(x;y)$ для которых $f(x)<f(y)$

1. $f(x)=0$ x: 9 чисел y: 16 чисел $9\cdot16=144$
2. $f(x)=1$ x: 8 чисел y: 8 чисел $8\cdot8=64$
3. $f(x)=2$ x: 3 числа y: 5 чисел $3\cdot5=15$
4. $f(x)=3$ x: 2 числа y: 3 числа $2\cdot3=6$
5. $f(x)=4$ x: 2 числа y: 1 число (23) $2\cdot1=2$

Всего вариантов $144+64+15+6+2=231$

Ответ: 231

№ 6

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$

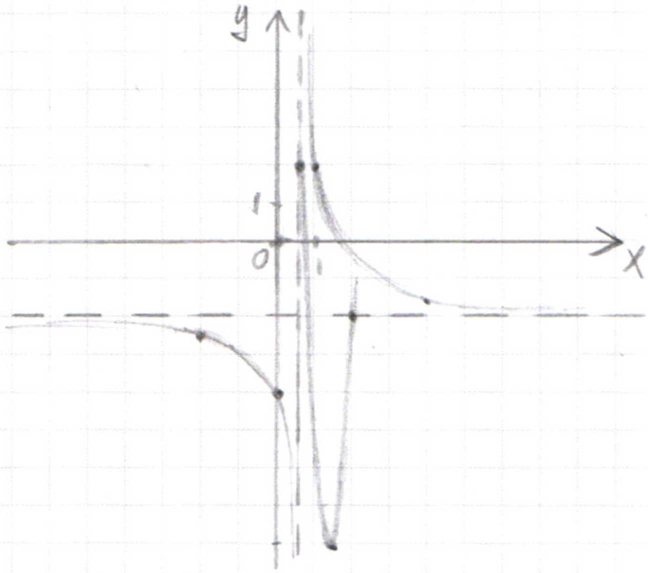
у нее есть вертикальная асимптота $x = \frac{2}{3}$

и горизонтальная $y = -2$

$f'(x) = \frac{-12}{(3x-2)^2} < 0 \Rightarrow$ функция убывает на $D(f)$

Рассмотрим функцию $g(x) = 18x^2 - 51x + 28$: минимум $g(x)$ находится в т. $x_0 = \frac{51}{36} = \frac{17}{12} \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$ и $g(x_0) = \frac{18 \cdot 17^2}{12^2} - \frac{3 \cdot 17^2}{12} + 28 = 28 - \frac{289}{8} < -8$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{18 \cdot 4}{9} - \frac{51 \cdot 2}{3} + 28 = 2$, $g(2) = -2$



Найдем прямую, проходящую через $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и $(2; -2)$:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + b = 2 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -3, \ b = 4$$

Определим взаимное расположение $y = -3x + 4$ и $f(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$: $-3x + 4 = \frac{2(4-3x)}{(3x-2)} \Rightarrow (4-3x)(3x-2) = 2(4-3x)$ $\Rightarrow (4-3x)(3x-4) = 0 \Rightarrow (3x-4)^2 = 0$ и значит функции касаются в т. $x = \frac{4}{3}$. Тогда никакое другое расположение $y = ax + b$ не подходит, потому что тогда она не будет одновременно ниже $f(x)$ и выше $g(x)$ на $\left[\frac{2}{3}; 2\right] \Rightarrow (-3; 4)$ – единств. ответ. Ответ: $a = -3$, $b = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x-x^2>0 \Rightarrow x\in(0;26)$

Поскольку по ОДЗ $26x-x^2>0$, $|x^2-26x|=26x-x^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)^{\log_5 5} \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$12^{\log_5(26x-x^2)}+5^{\log_5(26x-x^2)} \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

Введем замену: $a=\log_5(26x-x^2)$

$12^a+5^a \geq 13^a$

Заметим, что при $a=2$ $12^a+5^a=13^a$

Функции $f(a)=12^a+5^a$ и $g(a)=13^a$ монотонные

$\Rightarrow$ решением является либо $a\in(-\infty;2]$, либо $a\in[2;+\infty)$. При $a=1$ $12^a+5^a>13^a \Rightarrow a\in(-\infty;2]$

Вернемся к замене: $\log_5(26x-x^2)\leq 2$

$26x-x^2\leq 25 \Rightarrow x^2-26x+25\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$

С учетом ОДЗ $x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

$f(5) = f(1) + f(5)$

$f(1) = 0 \quad f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0 + 0 = 0$

$f(28) = \cancel{f(2) + f(2) + f(7) = 0 + 0 +}\ f(4) + f(7) = f(2) + f(2) + f(7) =$

$= 1$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1

$f\left(\frac{1}{5}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{25}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{25}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(3) = f(6) + f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f(5) = f(25) + f\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$

$2f(x) = f(x^2) \qquad f(x^2) = f(x) + f(x) \qquad f(1) = f\left(\frac{x}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(x) = f(x^2) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(x) = 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0	1

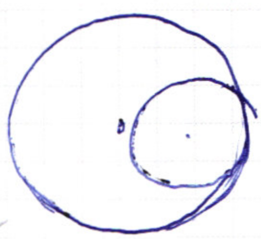
$f(x) = 0 \quad f(y) > 0 \qquad 8 \cdot 16$

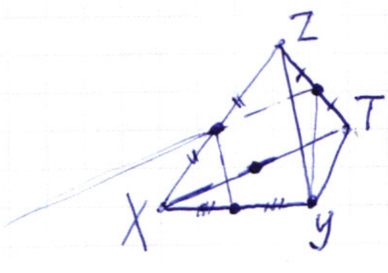
$f(x) = 1 \quad f(y) > 1 \qquad 8 \cdot 8$

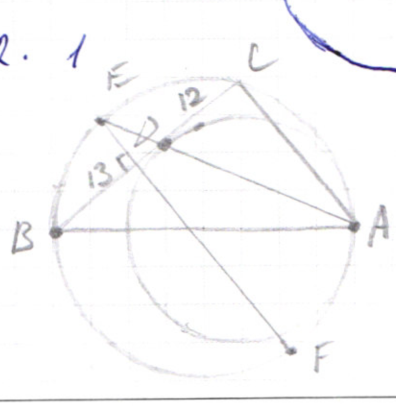
$f(x) = 2 \quad f(y) > 2 \qquad 3 \cdot 5$

$f(x) = 3 \quad f(y) > 3 \qquad 2 \cdot 3$

$f(x) = 4 \quad f(y) > 4 \qquad 2 \cdot 1$







ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = \frac{8-6x}{3x-2}$ $\quad \cancel{k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8-6x}{3x^2-2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x}-6}{3x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-6}{3x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\ }}$

$y' = \frac{-6(3x-2)-3(8-6x)}{(3x-2)^2} = \frac{-18x+12-24+18x}{(3x-2)^2} = -\frac{24}{(3x-2)^2} < 0$

$y' = 2 \cdot \frac{-3(3x-2)-3(4-3x)}{(3x-2)^2}$

$y = 2 \cdot \frac{4-3x}{3x-2} = -2 \cdot \frac{3x-4}{3x-2} = -2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3x-2}\right) =$

$= \frac{4}{3x-2} - 2 \qquad y' = \frac{0(3x-2) - 3\cdot 4}{(3x-2)^2} =$

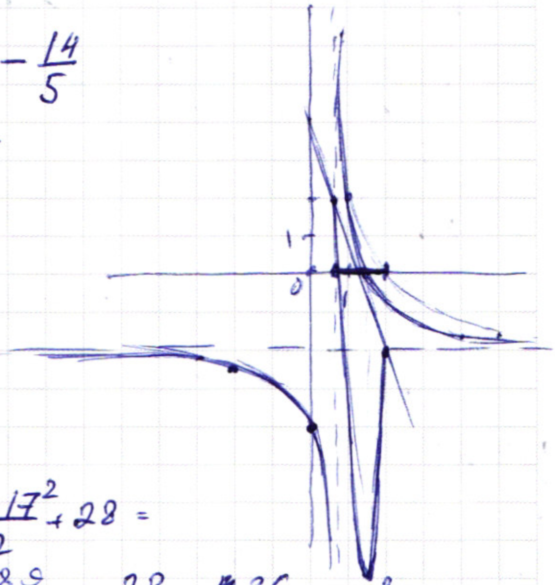
$y(0) = -4$

$y(-1) = \frac{4}{-5} - 2 = -\frac{14}{5}$

$y(1) = \frac{4}{1} - 2 = 2$

$y\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{4}{0,5} - 2 = 6$

$y(-2) = -2,5$



$y = 18x^2 - 51x + 28$

$x_0 = \frac{51}{36} \approx 1,5 \qquad \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$y(x_0) = \frac{18\cdot 17^2}{12^2} - \frac{3\cdot 17^2}{12} + 28 = \frac{1,5\cdot 17^2}{12} - \frac{3\cdot 17^2}{12} + 28 =$

$= -\frac{3\cdot 17^2}{24} + 28 = 28 - \frac{17^2}{8} = 28 - \frac{289}{8} \approx 28 - 36 = -8$

$y(2) = 18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 = 72 - 102 + 28 = -2$

$y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{18\cdot 4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$

$\begin{cases} \frac{2}{3}a + b = 2 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \qquad \frac{4}{3}a = -4 \Rightarrow a = -3 \quad b = 4$

$-3x + 4 = \frac{-3x+4}{3x-2} \cdot 2 \qquad (4-3x)(3x-2) = 2(4-3x)$

$x = \frac{4}{3} \qquad 3x - 2 = 2 \qquad x = \frac{4}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \Rightarrow \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\left(2\alpha + \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi k,\ k\in Z$

$2\alpha = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi l,\ l\in Z$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in Z \\ 2\alpha = \pi + \cancel{\frac{\pi}{2} - \arccos}\ \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi l,\ l\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k\in Z \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \pi l = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \pi l = \end{array}\right.$$

$= \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi l$

1. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ 2. $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) =$

$\cancel{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{34}{9} - 1 = \frac{25}{9} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{5}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

ОДЗ: $y-6x \geq 0$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 6 \\ \hline 864 \end{array}$$

I. $y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$36x^2-13xy+y^2+6x+y-6=0$

$36x^2+(6-13y)x+y^2+y-6=0$

$D=36-156y+169y^2-\cancel{4y^2}\,144y^2-144y+864=$

$=25y^2-300y+900=(5y-30)^2$

$x_1=\frac{13y-6+5y-30}{72}=\frac{18y-36}{72}=\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{13y-6-5y+30}{72}=\frac{1}{9}y+\frac{1}{3}$

$36\left(x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{9}y-\frac{1}{3}\right)=0$

$(4x-y+2)(9x-y+3)=0$

$y=4x+2 \qquad y=9x+3$

$9x^2+16x^2+16x+4-18x-\cancel{48y}\,48x-24=45$

$25x^2-50x-65=0 \qquad x^a+x^b-x^c \geq 0$

$5x^2-10x-13=0$

$D_1=25+65=$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ. $26x-x^2>0 \quad x\in(0;26)$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)-(26x-x^2)^{\log_5 13} \geq 0$

$t=26x-x^2, \ t>0$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13} \qquad 12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

$\log_t\left(t^{\log_5 12}+t\right) \geq \log_t\left(t^{\log_5 13}\right) \qquad \log_t\left(t^{\log_5 12}+t\right) \geq \log_5 13$

$1+\log_t\left(t^{\log_5 12-1}+1\right) \geq \log_5 13$

$12^a+5^a \geq 13^a$

При $a=2$ $\quad 12^2+5^2=13^2 \qquad a\leq 2 \qquad 26x-x^2 \leq 25$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)