МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \quad (1) \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \quad (2) \\ \sin 2\beta = \pm \cancel{\frac{1}{8}} \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{2}{\sqrt5} \quad (3) \end{cases}$$ подст. (2) и (3) в (1)

$(1):\ \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$$ ~~Пусть $\sin 2\alpha = x$; тогда $\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1-x^2}$~~

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2\sqrt{1-x^2} = -1 \\ x + 2\sqrt{1-x^2} - 1 \\ x + 2\sqrt{1-x^2} = -1 \\ x - 2\sqrt{1-x^2} = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x+1) - 2\sqrt{(x+1)(x-1)} = 0 \\ (x+1) + 2\sqrt{(x+1)(x-1)} = 0 \end{array}\right.$$ при $x=1$ $\begin{cases} \sin 2\alpha = -1 \\ \cos 2\alpha = \pm 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x = -1$ не подходит $\Rightarrow$ разделим на $(x+1)$:

$$\left[\begin{array}{l} 1 - 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \\ 1 + \underbrace{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow x \in \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow 1 - 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 4\frac{(x-1)}{(x+1)} = 1 \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = x+1 \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 5 \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \end{cases}$$

[~~$\sin 2\alpha - (1 - 2\cdot$~~ Пусть $\sin 2\alpha = x$ тогда $\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow x \pm 2\sqrt{1-x^2} = -1$

$(x+1) \pm 2\sqrt{(1-x)(x+1)} = 0$

$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1} \pm 2\sqrt{1-x}\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \text{ — не подх.} \\ \sqrt{x+1} = \pm 2\sqrt{1-x} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 2\sqrt{1-x} \\ \underbrace{\sqrt{x+1}}_{\geq 0} = -2\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\geq 0} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 = 4(1-x) \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 = 0 \\ 1-x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \sin 2\alpha = \frac{3}{5} \\ \cos 2\alpha = \pm\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = \pm\frac{4}{5} \end{array}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$\log_3 4 + \log_3 5 =$

$= \log_3 20$

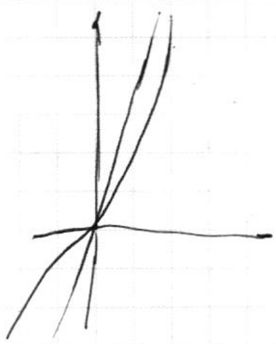
$\cancel{x^2 < 10x}$ $\quad 10x - x^2 > 0$

$10x - x^2 + -(10x - x^2)^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$\cancel{z +}$ $\quad z - z^{\log_3 4} \geqslant z^{\log_3 5}$

$z > 0$ $\quad z^1 \geqslant z^{\log_3 4} + z^{\log_3 5} \geqslant 2\sqrt{z^{\log_3 4} \cdot z^{\log_3 5}}$

$18^2 + 4 \cdot 3 \cdot 32$



$9 + (-9)^{\log_3 4} \geqslant 9^{\log_3 5}$

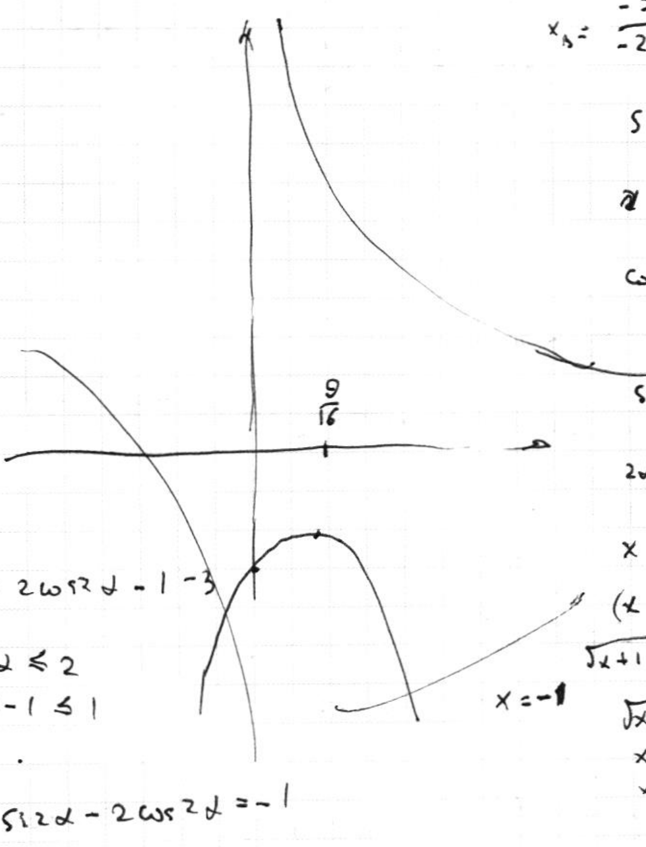
$9^2 \cdot 4$

$4(81 - 96)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\frac{16x - 20 + 4}{4x - 5} = 4 + \frac{4}{4x-5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$

$x_B = \frac{-36}{-2 \cdot 32} = \frac{36}{2 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{9}{16}$



$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2 \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$

$x \pm 2\sqrt{1 - x^2} = -1$

$(x+1) = -2\sqrt{(x+1)(x-1)}$

$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1} \pm 2\sqrt{x-1}\right) = 0$

$x = -1$

$\sqrt{x+1} = \pm 2\sqrt{x-1}$

$x + 1 = 4x - 2$ $\qquad x + 1 = x - 1$

$x = 3$ $\qquad x \in \varnothing$

$\sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha - 1 - 3$

$-2 \leq 2\cos 2\alpha \leq 2$

$-3 \leq 2\cos 2\alpha - 1 \leq 1$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha \leqslant 1$

$\cos 2\alpha \leq 1$

$-2\cos 2\alpha \geqslant -2$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 продолж

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{3}{5} \\ \cos 2\alpha = \pm\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \pm\frac{3}{4}$$

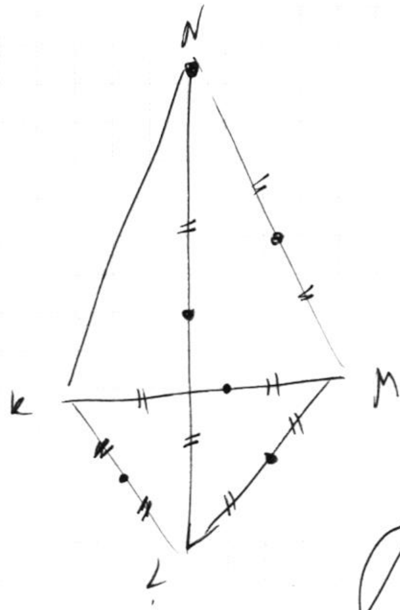
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3}{4} \\ \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{3}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{8\operatorname{tg}\alpha - 3+3\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 0 \\ \frac{-8\operatorname{tg}\alpha - 3+3\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 0 \end{array}\right.$$

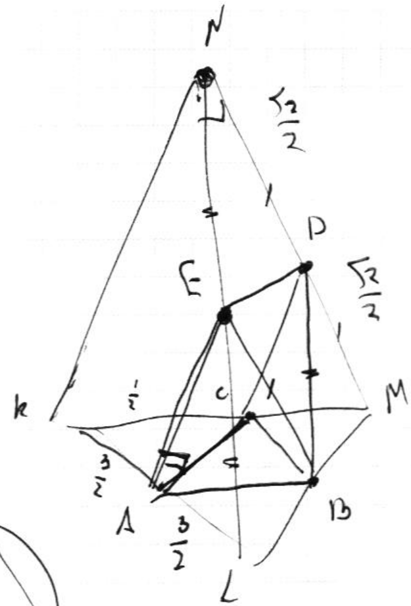
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \frac{3\operatorname{tg}^2\alpha + 8\operatorname{tg}\alpha - 3}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 0 & (1) \\ \frac{3\operatorname{tg}^2\alpha - 8\operatorname{tg}\alpha - 3}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

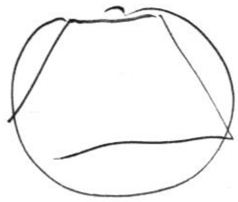
(1): $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{16+9}}{3} = -\frac{4\pm 5}{3} = -3;\ \frac{1}{3} \Rightarrow 1-\operatorname{tg}^2\alpha \neq 0$

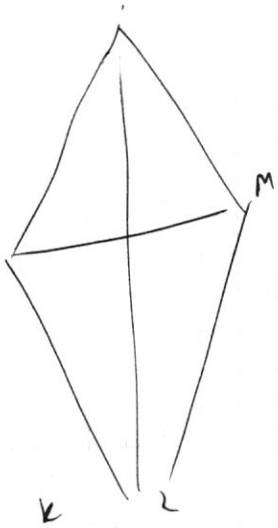
(2): $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4 \pm \sqrt{16+9}}{3} = \frac{4\pm 5}{3} = 3;\ -\frac{1}{3} \Rightarrow 1-\operatorname{tg}^2\alpha \neq 0$

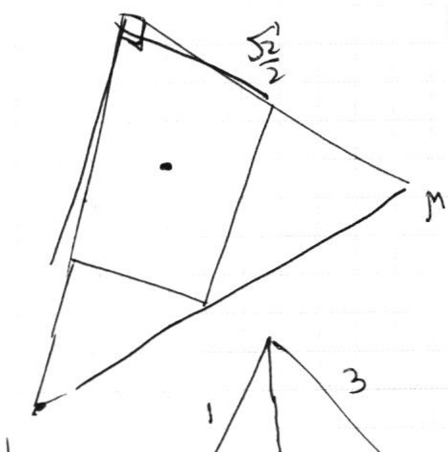
Ответ: $\left(-3;\ 3;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$

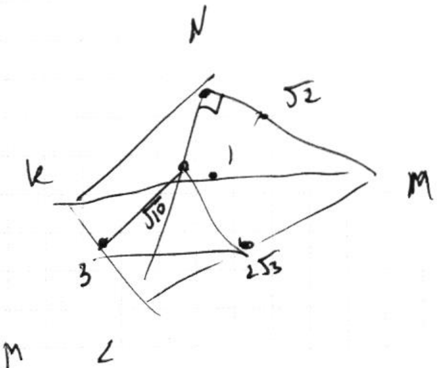


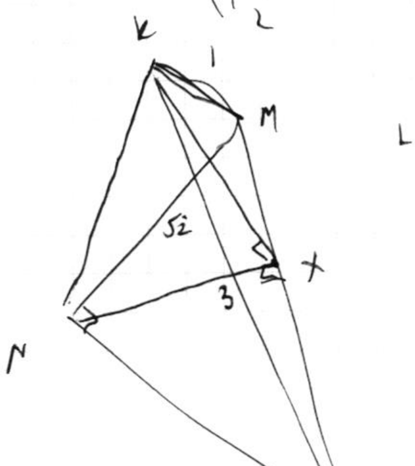


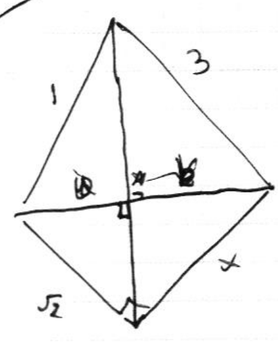












$$9 - b^2 = 1 - a^2$$

$$8 = b^2 - a^2$$

$$2 - a^2 = x^2 - b^2$$

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y)-(x-6)} \\ (x-6)^2-36+(6y-3)^2-9=45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

введем замену $p=x-6$; $q=2y-1$, заметим что $p-6q=x-12y$:

$$\begin{cases} p-6q=\sqrt{pq} \quad (1) \\ p^2+9q^2=90 \quad (2) \end{cases}$$

(1) проверим, что $q=0$ не подходит

$$\begin{cases} p-6\cdot 0=0 \Rightarrow p=0 \\ p^2=90 \end{cases} \quad p\in\varnothing$$

(1) $p-6q=\sqrt{pq} \quad \Big| :q$

$$\frac{p}{q}-\sqrt{\frac{p}{q}}-6=0$$

$\sqrt{\frac{p}{q}}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm5}{2}=3$ т.к. $\sqrt{f}\geq0 \Rightarrow \sqrt{\frac{p}{q}}=3 \Rightarrow \frac{p}{q}=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow p=9q$ подст во (2) $\quad 81q^2+9q^2=90 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q=\pm1 \\ p=9q \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q=\pm1 \\ p=\pm9 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=1 \\ p=9 \end{cases} (3) \\ \begin{cases} q=-1 \\ p=-9 \end{cases} (4) \end{array}\right.$ но при подст (4) в (1) получаем $-9+6=\sqrt{9}$ противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ p=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-1=1 \\ x-6=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=15 \end{cases}$

Ответ $(15; 1)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\qquad \sin = 2\cdot\sin(4\alpha+4\beta)\cdot\cos 4\beta = -\frac{2}{5}$

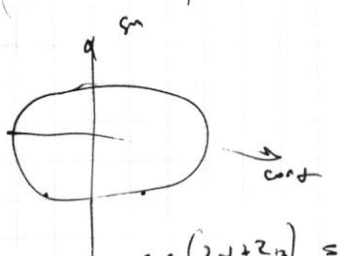
• $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \sin(a+b)$

$\sin a + \sin b = 2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(\underbrace{\alpha+\beta}_{a}) + \sin(\underbrace{\alpha-\beta}_{b}) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta)\cdot\frac{2}{\sqrt5} = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha$



$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1)$

$2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta$

$\frac{a+b}{2}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6}$ •

$x^2+36y^2-12x-36y = 45$

• $x-12y = \sqrt{(x-6)\cdot 2y-(x-6)} = ((x-6)(2y-1))^{\frac12}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5} \\ \sin 2\alpha+2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5} \end{array}\right.$

$(x-6)^2-36+(6y-3)^2-9 = 45$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2 = 90$

• $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$x + 2\sqrt{1-x^2} = -1$

$p^2+9q^2 = 90$

$p-6q = \sqrt{pq}$

$\left[\begin{array}{l} p = 3q \\ p = -2q \end{array}\right.$ $\qquad 9q^2 = 45$, $\quad q^2 = 5$, $\quad q = \pm\sqrt5$, $\quad p = \pm 3\sqrt5$

$\frac{p}{q} - \sqrt{\frac{p}{q}} - 6 = 0$

$z^2 - z - 6 = 0 \Rightarrow z = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\pm5}{2} = 3; -2$

$x-6 = 6y-3$

$\boxed{\begin{array}{l} x-6 = \pm\sqrt5 \\ 2y-1 = \pm 3\sqrt5 \end{array}}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№5 $f(a\,b) = f(a) + f(b) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$ (1)

Найдем все значения ф-ии от 2 до 25

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$
$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$
$f(4) = f(2) + f(2) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = f(2) + f(5) = 1$
$f(11) = 2$
$f(12) = 0$
$f(13) = 3$
$f(14) = f(2) + f(7) = 1$
$f(15) = f(5) + f(3) = 1$
$f(16) = 0$
$f(17) = 4$
$f(18) = 0$
$f(19) = 4$
$f(20) = f(10) + f(2) = 1$
$f(21) = f(7) + f(3) = 1$
$f(22) = f(11) + f(2) = 2$
$f(23) = 5$
$f(24) = 0$
$f(25) = 2$

Значение функции	Кол-во вариантов
5	1
4	2
3	1
2	3
1	7
0	10

Пусть $f(y) = 5$, тогда y (1) $f(x) < 5$ таких ~~значени~~ вариантов "y": 1
и вариантов "x": $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10$

Пусть $f(y) = 4$ аналогично $f(x) < 4$ вариантов "y": 2
и вариантов "x": $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10$

Пусть $f(y) = 3$ "y": 1
"x": $3 \cdot 7 \cdot 10$

Пусть $f(y) = 2$ "y": 3
"x": $7 \cdot 10$

Пусть $f(y) = 1$ "y": 7
"x": 10

Пусть $f(y) = 0$ "x": $\varnothing$

Перемножая и складывая все полученные комбинации получаем

$2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 + 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 + 3 \cdot 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10 =$

$= 7 \cdot 10\,(2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 3 + 1) = 70\,(6 + 6 + 3 + 3 + 1) = 70 \cdot 19 =$

$= 1400 - 70 = 1330$

Ответ: 1330

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

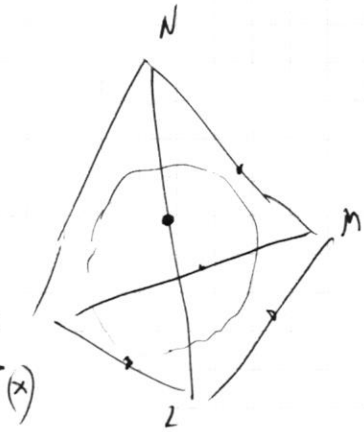
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$p + (-p)^{\log_3 4} \geq p^{\log_3 5}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$



$f(2) = 0$

$f(3) < 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) =$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

$f(y) = 7 \quad : 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10$

$f(y) = 5 \quad 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10$

$f(y) = 4 \quad 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10$

$f(y) = 3$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 7$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$\frac{3}{5}$

7 : 1

5 : 1

4 : 2

3 : 1

2 : 3

1 : 6

0 : 10

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) \pm \sin 2\alpha =$

$= 2 \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta = \frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \cos 2\alpha \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \pm 2 \cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha + 1 = 2\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha \pm 2(1 - 2\sin^2$

$\sin 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = -1$

$\sin 2\alpha + 4\cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = \frac{1}{2}$

$\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = -1}$

$\frac{3}{5} \pm \frac{8}{5} = -1 \quad 2\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$x \pm 2\sqrt{1 - x^2} = -1$

$(x+1) = 4(1-x)$

$5 = 3x$

$x = \frac{5}{3} > 1$

$(x+1) \pm 2\sqrt{(1-x)(1+x)} = 0$

$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1} \pm 2\sqrt{x-1}\right) = 0$

$x + 1 = 4 - 4x$

$5x = 3$

$\frac{3}{5} \pm 2\frac{4}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

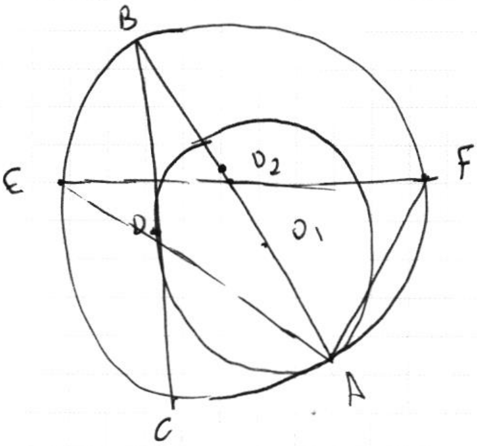
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5 ~~Постро~~ .

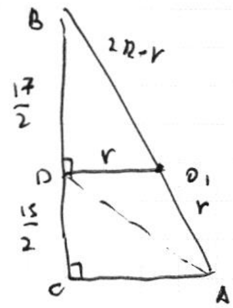
$BD = \frac{17}{2}$ O_1 - ц. меньшей окр ω

$CD = \frac{15}{2}$ O_2 ц. большей окр Ω



Рассмотрим $\triangle ABC$: BA диам $\Rightarrow \angle ACB$ п/у

$O_1D \perp BC$



Пусть R - радиус Ω

r - радиус ω

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ (по 2 углам)

$\Rightarrow \dfrac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{2}+\frac{15}{2}} = \dfrac{2R-r}{2R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{17}{32} = \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R} \Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{15}{32} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{15}{16} \Rightarrow R = \frac{16}{15} r$, по т.

Пифагора в $\triangle BDO_1$ $BD^2 + DO_1^2 = BO_1^2 \Rightarrow \frac{17^2}{4} + r^2 = \left(\frac{32}{15} - 1\right)^2 r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{17^2}{4} = r^2\left(\left(\frac{17}{15}\right)^2 - 1\right) = \frac{r^2}{15^2} \cdot (2 \cdot 32) = \frac{r^2 \cdot 8^2}{15^2} \Rightarrow \left[r = \frac{17 \cdot 15}{8 \cdot 2} = \frac{17 \cdot 15}{16}\right] \Rightarrow \left[R = \frac{16}{15} r = \right.$

$\left. = \frac{17 \cdot 16}{16} = 17\right]$ ~~т.к.~~ по св-ву хорд $AD \cdot DE = CD \cdot DB$ (1)

Из п/у $\triangle ADC$ $AD^2 = AC^2 + CD^2$; $\Rightarrow AD^2 = BA^2 + CD^2 - BC^2 =$

Из п/у $\triangle BCA$ $AC^2 = BA^2 - BC^2$

$= 4R^2 + \frac{15^2}{4} - \frac{32^2}{4} = \frac{16 \cdot 17^2 + 15^2 - 32^2}{4} =$

$= \frac{16 \cdot 17^2 - (32-15)(32+15)}{4} = \frac{16 \cdot 17^2 - 17 \cdot 57}{4} = \frac{17}{4}(16 \cdot 17 - 57) = \frac{17}{4}(272 - 57) =$

$= \frac{17}{4} \cdot 215 = \frac{17}{4} \cdot 5 \cdot 43 \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{17 \cdot 5 \cdot 43}}{2}$ в (1)

$\times 17$
16
102
17
272

$DE = \frac{CD \cdot BD}{AD} = \dfrac{\frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2} \cdot 2}{\sqrt{17 \cdot 5 \cdot 43}}$

~~$AD^2 =$~~ $AC^2 = BA^2 - BC^2 = 34^2 - 16^2 = (34-16)(34+16) = 18 \cdot 50 \Rightarrow AC = 2 \cdot 3 \cdot 5 =$

$= 30$

$\Rightarrow AD^2 = \frac{15^2}{4} + 4 \cdot 15^2 = 15^2 \frac{17}{4} \Rightarrow AD = \frac{15}{2}\sqrt{17}$ подст в (1)

$DE = \frac{17}{2} \cdot \frac{15}{2} : \frac{15}{2} \cdot \sqrt{17} = \frac{17}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{2}{15\sqrt{17}} \Rightarrow \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow AE = AD + DE = \frac{15}{2}\sqrt{17} + \frac{\sqrt{17}}{2} =$

$= 8\sqrt{17}$

$\Rightarrow$ по т. синусов в $\triangle AEF$: $2R = \frac{AE}{\sin \angle EFA} \Rightarrow \sin \angle AFE = \frac{8\sqrt{17}}{2 \cdot 17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \boxed{\angle AFE = \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

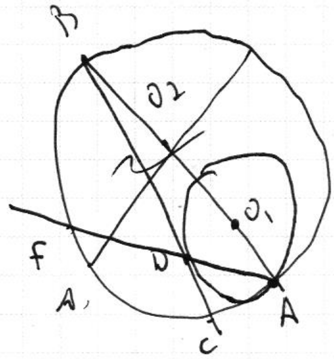
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

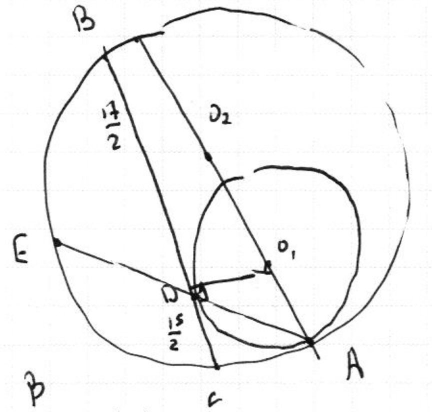
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 13

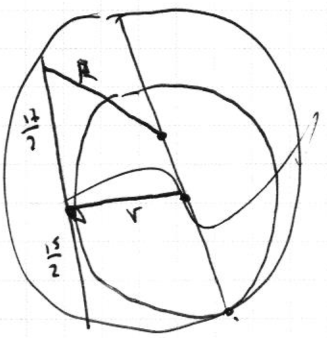




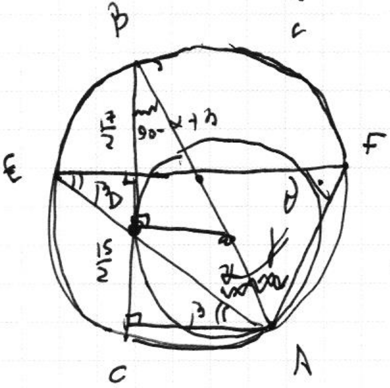
5

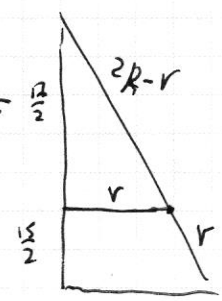
3

$3\left(\frac{25}{4}+11\right)$



$\frac{3^2}{2}$





$\frac{345+12}{\sqrt{357}}$

$17^2-16^2=$

$=1\cdot 33$

$$\frac{2R-r}{2R}=\frac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{2}+\frac{15}{2}}=\frac{17}{32}$$

$$\frac{17^2}{4}+r^2=(2R-r)^2$$

$$\frac{17^2}{4\cdot 2{,}4\cdot 4{,}4}$$

$\frac{15^2}{4}+33$

$44R-22r=34R$

$10R=22r$

$64R-32r=\cancel{17}\,34R$

$30R=32r$

$15R=16r$

$225+120+12$

$5R=11r$

$R=\frac{11}{5}r=2{,}2$

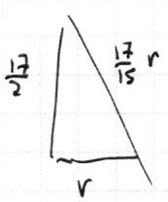
$R=\frac{16}{15}r$

$\frac{32}{15}r-r=\frac{17}{15}r$

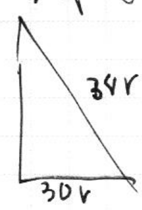
$\frac{17^2}{4}+r^2=3{,}4^2r^2$

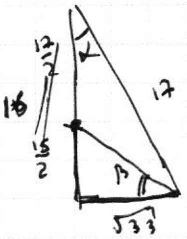
$(3{,}4^2-1)$

$$\frac{17^2\cdot 100}{4\cdot 24\cdot 44}$$



$17\cdot 15$





$4r\cdot 64r=(17\cdot 15)^2$

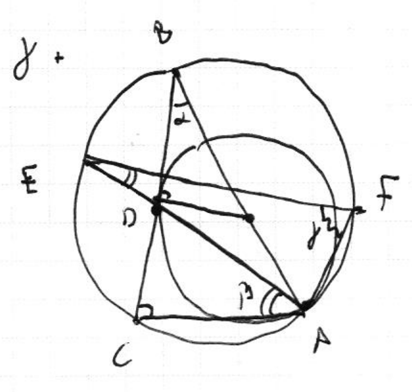
$r=\frac{17\cdot 15}{2\cdot 8}=\frac{17\cdot 15}{32}$ $\quad R=\frac{17\cdot 16}{32}=\frac{17}{2}$

$\smile FBC=2(\gamma+\alpha+\beta)=360-2\beta$

$90-(\alpha+\beta)+\cancel{(\gamma+\alpha+\beta)}+\beta$

$\alpha\ \gamma+$

$\theta+\beta$



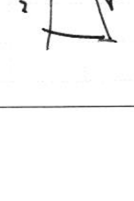
$\gamma=\alpha+\beta$

$\cos\ \sin\gamma=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta+\cos\alpha$

$AD\cdot ED=BD\cdot DC$

~~AE~~

16



☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4 продолжение

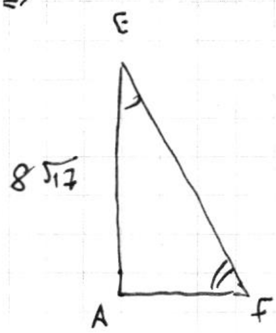
$AC \perp BC$, $EF \perp BC$ $\Rightarrow$ $EF \parallel AC \Rightarrow \angle DAC = \angle AEF$ (накр. леж) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle AEF = \sin\angle DAC = \frac{CD}{AD} = \frac{15}{2} : \frac{15}{2}\cdot\sqrt{17} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

из $\triangle ACD$

заметим, что $\cos\angle AEF = \sqrt{1-\sin^2\angle AEF} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \sin\angle AFE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEF + \angle AFE = 90° \Rightarrow \triangle AEF$ п/у



$S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF = \frac{1}{2}AE\cdot AE\cdot tg\angle AEF = \frac{1}{2}AE^2\cdot tg\angle AEF =$

$= \frac{1}{2}\cdot 8^2\cdot 17\cdot\frac{\sin\angle AEF}{\cos\angle AEF} = \frac{32\cdot 17}{1}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = 8\cdot 17 = \boxed{136}$

№3

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 + (-10x - x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5} \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4}\cdot(-1)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5} \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (10x-x^2) + (-1)^{2/\log_3 2}\cdot(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5} \\ 10x-x^2>0 \end{cases}$$

введем замену $p = 10x - x^2$

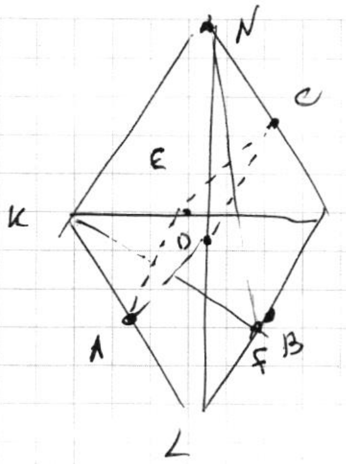
$$\begin{cases} p + p^{\log_3 4} \geq p^{\log_3 5} \\ p>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^{\log_3 3} + p^{\log_3 4} \geq p^{\log_3 5} \\ p>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^{\log_3 p} + 4^{\log_3 p} \geq 5^{\log_3 p} \\ p > 0 \end{cases}$$

введем функцию $f(x) = 5^x - (3^x + 4^x)$ при $x = 2$; $f(x) = 0$
при $x > 2$ $f(x) \geq 0 \Rightarrow \log_3 p \leq 2 \Rightarrow p < 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x - x^2 \leq 9 \\ 10x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{$$

№7



~~Пусть сфера касается ре~~

Пусть A, B, C, D, E ~~это~~ середины ребер

1) $ND = LD$, $LB = BM$ $\Rightarrow$ $DB \parallel NM$, $DB = \frac{NM}{2}$ - ср. линия $\triangle LNM$

аналогично $CD \parallel LM$; $CD = \frac{LM}{2}$

$\Rightarrow$ $NDCB$ - параллелограмм

т. N, D, C, B лежат на одной сфере $\Rightarrow$ $NDCB$ - впис параллелограмм

$\Rightarrow$ $NDCB$ - прямоугольник

2) $AL = AK$, $DL = DN$ $\Rightarrow$ AD ср. линия $\triangle LKN$ $\quad$ $AD \parallel KN$, $CE \parallel KN$ $\Rightarrow$ $AD \parallel CE$, $AE \parallel CD$ $\Rightarrow$

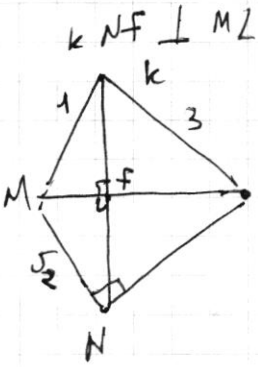
аналогично CE ср. линия $\triangle MKN$

$ADCE$ - параллелограмм

A, D, C, E лежат на одной сфере, аналогично $ADCE$ - прямоугольник

$DA \perp AE$, $NK \parallel AD$, $AD \parallel ML$ $\Rightarrow$ $KN \perp ML$ $\quad$ проведем плоск через $KL \perp ML$

$KNF \perp ML$ $\Rightarrow$ $NF \perp ML$; $KF \perp ML$



Пусть $MF = a$; $FL = b$; $NL = x$

по т. Пиф $\triangle MNF$ и $\triangle NFL$

$NF^2 = 2 - a^2 = x^2 - b^2$ $\Rightarrow$ $b^2 - a^2 = x^2 - 2$

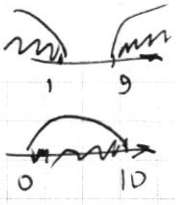
аналогично $\triangle MKF$ и $\triangle KFL$

$KF^2 = 1 - a^2 = 9 - b^2$ $\Rightarrow$ $b^2 - a^2 = 8$

$\Rightarrow$ $x^2 - 2 = 8$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt{10}$ $\Rightarrow$ $ML = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

№4 продолжение

$$\begin{cases} 10x - x^2 \le 9 \\ 10x - x^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \ge 0 \\ x^2 - 10x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-9) \ge 0 \\ x(x-10) \le 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \\ x \in [0; 10] \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 1] \cup [9; 10]$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$p + (-p)^{\log_3 4} \geq p^{\log_3 5}$ $\alpha \geq 2$ $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$

$p + p^{\log_3 4} \cdot (-1)^{\log_3 4}$ $5^\alpha - 4^\alpha$ $p \geq 9$

$p + p^{\log_3 4} \geq p^{\log_3 5}$ $3^\alpha + 4^\alpha$ $27 + 64 \geq 125$ $3^\alpha + 4^\alpha \geq 5^\alpha$

$3^3 + 4^3 \geq 5^3$

$a^\alpha = b$

$p \geq p^{\log_3 5} - p^{\log_3 4}$ $c^\alpha = b^\beta$ $x\left(5^{(x-1)} - 3^{(x-1)} - 4^{(x-1)}\right)$

$a^\beta = c$ $3^\alpha + (3+1)^2 \geq \frac{5^x}{5} - 3$

$p^{\log_3 4} \geq p^{\log_3 5} - p^1 \geq 2\sqrt{p^{\log}}$

$4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$

$\log_3 4 + \log_3 5$ $p^{\log_3 4} \geq 2 \cdot p^{\frac{1}{2}\cdot\log_3 \frac{5}{3}}$ $x - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$ $\alpha > 1$ $5^\alpha - 4^\alpha \leq 3^\alpha$

$x = 1$ $3^\alpha + 4^\alpha \geq 5^\alpha$

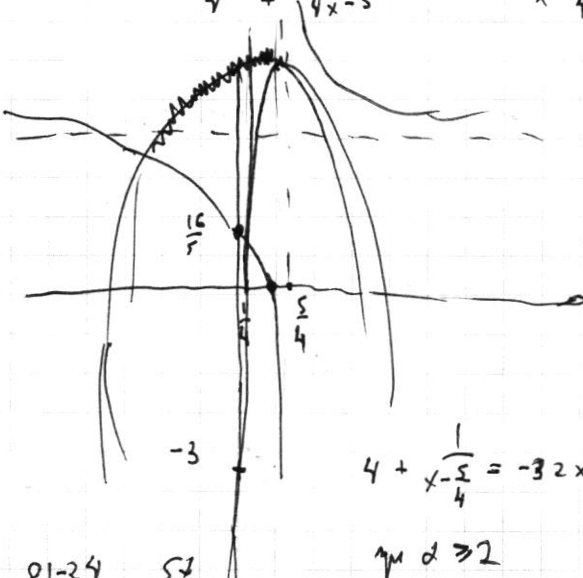
$18^2 - 4\cdot3\cdot32$ $\log_3 (4+1)$ $4 + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$ $\log(a+b)$

$4(81-96)$ p $-p^1$

$18^2 - 32\cdot3$

$\frac{5}{3}$

$9^2\cdot4 - 8\cdot4\cdot3$



$-32x^2 + 36x - 3$

$-8\cdot4x^2 + 4\cdot9x - 3$

$4(81-24)$

$4\cdot57$

$x_B = \frac{36}{64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$81 + 256 \geq 625$

$x(36 - 32x) - 3$

$\frac{9}{16}(36-18)$

$4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}} = -32x^2 + 36x - 3$

при $\alpha \geq 2$

$\frac{9\cdot18}{16} = \frac{9\cdot9}{8} = \frac{81}{8} - 3 = \frac{81-24}{8} = \frac{57}{8}$

3 5 4

$3^\alpha + 4^\alpha \geq 5^\alpha$

$\frac{9}{16}$ $x(36-32x) - 3$

$\frac{9}{16}\cdot(36-18) - 3$ 3^α 3 $\alpha\left(3^{\alpha-1} + 4^{\alpha-1}\right)$ $\alpha\cdot5^{\alpha-1}$

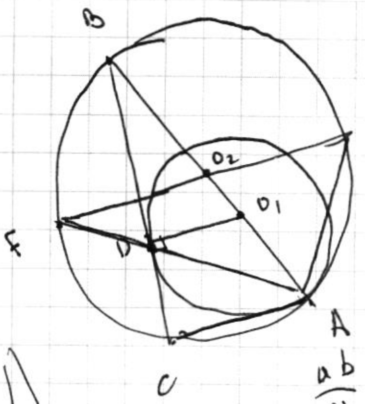
$\frac{9\cdot9}{8} - 3$ $3^\alpha + 4^\alpha \geq 5^\alpha$

$\alpha\cdot3^{\alpha-1} + \alpha\cdot4^{\alpha-1}$ $\alpha \leq 2$ $0{,}1$ $\frac{1}{2}$

$\boxed{\alpha = 2}$ $\sqrt{3} + \sqrt{4} \geq \sqrt{5}$ 3

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$\frac{3}{3}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$

$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{a+b}\leq\frac{(a+b)}{2}\leq 5$

$\frac{17}{10}+\frac{30}{10}=\frac{47}{10}$

$8-\frac{15}{2}=$

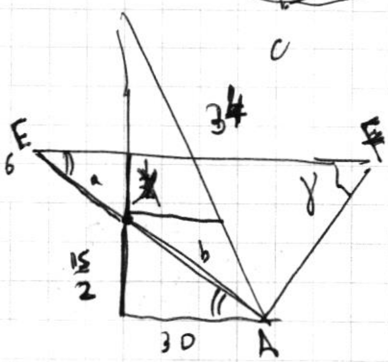
$\frac{1}{2}$

$p+p^{\log_3 4}$ $\frac{2}{3}$

$\frac{ab}{a+b}\leq\frac{a+b}{2}\geq$ p

$1+1^{\log}$ $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$

$\frac{17}{2}$



$16-\frac{15}{2}=$

$b^2=(34-16)(34+16)=18\cdot 50$ $p+p^{\log_3 4}\geq p^{\log_3 5}$

$b=3\cdot 5\cdot 2=30$

$p\geq p^{\log_3 5}-p^{\log_3 4}$

$x=$

34

$\frac{2x}{15}$ $a\cdot b=\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2}$ $a=\frac{17}{2\sqrt5}$

$2R=\frac{AE}{\sin\gamma}$

$p+p^{\log_3 4}\geq p^{\log_3 5}\geq p^{\log_3 4}$

$\sin\gamma=\frac{AE}{2R}$

$\frac{15}{2x}=\frac{b}{a}$

$15^2\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{2}\cdot\sqrt5$ $p\geq 0$

$\log_3 4$

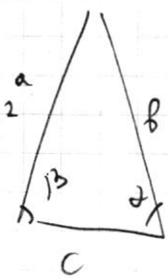
$p=0$

$\frac{17}{2\sqrt5}$

$10x-x^2\leq 25=5^2$

$\lg$ $\alpha>0$

$p\geq 0$



$x=\frac{17}{10}$

$a=\frac{15\cdot 17}{2}$ $\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2b}$

$3^\alpha+4^\alpha\geq 5^\alpha$

$\frac{1}{2}a\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin\alpha$

$\alpha\geq 1$

$\frac{15}{2x}=\frac{4}{15\cdot 17}\cdot b^2\,\frac{15^2}{4}\cdot 5$ 5

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(180-$

$\frac{5\cdot 18}{17}=\frac{18}{2x}$

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta$

$\sin\beta=\frac{DC}{AD}=\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\geq 2p^{\frac{1}{2}\log_3 12}$

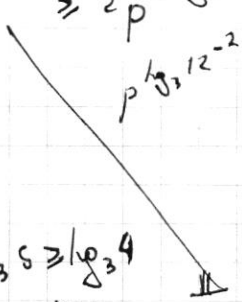
$\frac{c}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{1}{2}$

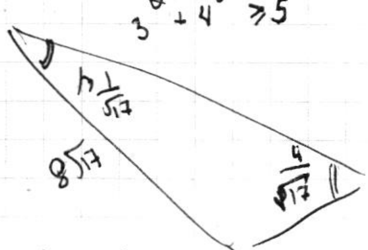
$p^{\log_3 12-2}$

$\cos\alpha$ $\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{17}}}=$

$3^\alpha+4^\alpha\geq 5^\alpha$

$\frac{1}{\sqrt{17}}$ $=\frac{17-1}{}=\frac{4}{\sqrt{17}}$





$\log_3 5\geq\log_3 4$

p p

$p+p^{\log_3 4}\geq p^{\log_3 5}\geq p^{\log_3 4}$

$p^{\log_3 3}+p^{\log_3 4}\geq p^{\log_3 5}$ $3^\alpha+4^\alpha\geq 2\sqrt{3^\alpha\cdot 4^\alpha}$

$3^\alpha+4^\alpha\geq 5^\alpha$ $p^1+p^{\log_3 4}\geq p^{\log_3 5}$ $3^\alpha+4^\alpha\geq(4+1)^\alpha=4^\alpha\ \dots\ 1^\alpha$

$3^\alpha\geq$