МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

① $\sin(2\beta) = +\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta = \frac{2\sin2\alpha}{\sqrt5}+\frac{\cos2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1 = -1$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha) = 0$

$\cancel{\cos\alpha=0}$ $\quad \cos\alpha = 0$, тогда $tg\alpha$ не определён ×

$2\sin\alpha+\cos\alpha = 0$ $\quad \sin\alpha = -\frac{\cos\alpha}{2}$ $\quad tg\alpha = -\frac{1}{2}$

② $\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta = \frac{2\sin2\alpha}{\sqrt5}-\frac{\cos2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha-\cos2\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha-1 = -1$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0$, $\cancel{t=0}$ $tg\alpha = 0$ $\qquad 2\cos\alpha+\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha = -2\cos\alpha$, $tg\alpha = -2$

Тогда, $tg\alpha$ может равняться $0, -\frac{1}{2}, -2$, но т.к известно, что возможных значений ≥ 3, то все 3 значения $0, -\frac{1}{2}, -2$ возможны.

Ответ: $0; -\frac{1}{2}; -2$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

Пусть $a=x-2$, $b=y-1$, тогда:

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$a-2b=\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b\geq 0 \\ ab=(a-2b)^2\geq 0 \end{cases}$

$ab=(a-2b)^2=a^2-4ab+4b^2$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$(b-a)(4b-a)=0$

$b=a$ (1) $\quad 4b=a$ (2)

(1): $a=b \Rightarrow a^2=b^2$

$a^2+9b^2=10b^2=25$

$b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$b=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a-2b=-\sqrt{\frac{5}{2}}<0$

×

$b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a-2b=\sqrt{\frac{5}{2}}\geq 0$

$x=2+a=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y=b+1=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}})$ - реш.

(2): $a=4b \Rightarrow a^2=16b^2$

$a^2+9b^2=16b^2+9b^2=25b^2=25$

$b=\pm 1$

$b=1$

$a=4b=4$

$a-2b=2\geq 0$

$x=2+a=6$

$y=1+b=2$

$(6;2)$ - реш.

$b=-1$

$a=4b=-4$

$a-2b=-2<0$

×

$(6;2)$ и $(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}})$ - единственные возможные решения, подставив их в систему, получаем, что они оба подходят.

Ответ: $(6;2)$, $(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3) $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \iff x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

Т.к. на ОДЗ $x^2+18x>0$, то $|x^2+18x| = x^2+18x$

Пусть $a=\log_{12}(x^2+18x)$, тогда $x^2+18x=12^a$ и $a\in(-\infty;+\infty)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x-|x^2+18x|^{\log_{12}13}=$

$=5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x-(x^2+18x)^{\log_{12}13}=$

$=5^a+12^a-(12^a)^{\log_{12}13}=5^a+12^a-13^a\geq 0$

$5^a+12^a\geq 13^a$

$13^a>0$, тогда $\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1 \geq 0$

Заметим, что т.к. $0<\frac{5}{13}<1$ и $0<\frac{12}{13}<1$, то функция $f(a)=\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a-1$ монотонно убывает, и т.к. $f(2)=\frac{25}{169}+\frac{144}{169}-1=0$, то при всех $a\in(-\infty;2]$, $f(a)\geq f(2)=0$, а при всех $a\in(2;+\infty)$, $f(a)<f(2)=0$.

Тогда, $a\in(-\infty;2]$

$\log_{12}(x^2+18x)\in(-\infty;2]$

$0<x^2+18x\leq 12^2=144$

$x^2+18x>0 \iff x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$x^2+18x-144\leq 0$

$x_1=-24 \quad x_2=6$

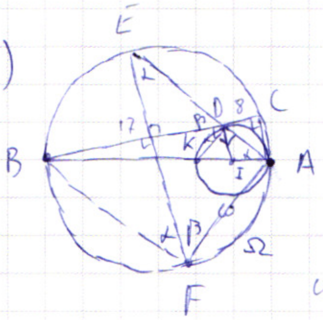
$\iff x\in[-24;6]$

$\begin{cases} x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty) \\ x\in[-24;6] \end{cases} \iff x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

Ответ: $[-24;-18)\cup(0;6]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4)



Пусть $K = AB \cap \omega$, радиус $\Omega = R$, рад. $\omega = r$

Т.к. ω и Ω касаются в точке A, то центры окр. и A лежат на одной прямой. Т.к. AB – диаметр Ω, то центр ω I лежит на $AB \Rightarrow AK$ – диаметр ω

Тогда $\angle BDI = 90^\circ$ (BD - кас. к ω)

$\angle BCA = 90^\circ$ (AB – диаметр.)

Тогда $\triangle DBI \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{DB}{CB} = \frac{IB}{AB} = \frac{AB - IA}{AB} = \frac{2R-r}{2R}$

$\frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R}$ $\quad 34R = 50R - 25r \quad r = \frac{16}{25}R$

BD – касательная к $\omega \Rightarrow BD^2 = BK \cdot BA = (BA - AK) \cdot BA =$

$= (2R - 2r) \cdot 2R = (\frac{50}{25}R - \frac{32}{25}R) \cdot 2R = (2R \cdot \frac{3}{5})^2$

$17^2 = (\frac{6}{5}R)^2 \quad R = \frac{17 \cdot 5}{6} \quad r = \frac{16}{25}R = \frac{17 \cdot 5}{6} \cdot \frac{16}{25} = \frac{17 \cdot 8}{15}$

Пусть $\angle BAE = \alpha \Rightarrow \angle BFE = \angle BAE = \alpha$, $\angle BID = 2\angle BAD = 2\alpha$

(т.к. I – центр ω)

$\angle BDA = \angle BDI + \angle IDA = 90^\circ + \angle IDA > 90^\circ \Rightarrow \angle BAD = \alpha < 90^\circ$

~~$\frac{BI}{BD} = \sin 2\alpha$~~ ~~$\frac{2R-r}{17} = \frac{\frac{17\cdot5}{3} - \frac{17\cdot8}{15}}{17} = \frac{5}{3} - \frac{8}{15}$~~

$\frac{BD}{BI} = \sin 2\alpha = \frac{17}{2R-r} = \frac{17}{\frac{17\cdot5}{3} - \frac{17\cdot8}{15}} = \frac{1}{\frac{5}{3} - \frac{8}{15}} = \frac{1}{\frac{25-8}{15}} = \frac{15}{17}$

~~$\cos 2\alpha$~~ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ $\quad$ ($\cos\alpha > 0$, т.к. $\alpha < 90^\circ$)

~~$\sin^2 2\alpha$~~ $\frac{15^2}{17^2} = 4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$\sin^2\alpha = \frac{1+\frac{8}{17}}{2} > 1$ ✗ $\quad \sin^2\alpha = \frac{1-\frac{8}{17}}{2} = \frac{9}{34} \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$ $\quad (\alpha < 90^\circ)$

$\angle BFE = \alpha$, $\angle BFA = \frac{\pi}{2}$ (AB – диаметр) $\Rightarrow \angle EFA = \frac{\pi}{2} - \alpha =$

$= \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\angle EFA = \beta$, $\alpha + \beta = 90^\circ$

BD – кас. к $\omega \Rightarrow \angle BDK = \angle KAD = \alpha$

$\angle KDA = 90^\circ$ (KA – диам. ω) $\Rightarrow \angle KDE = 90^\circ \Rightarrow \angle BDE = \beta$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 продолжение)

$\angle FED = 90° - \angle BDE = \alpha$

$\angle AEF + \angle EFA = 90° \Rightarrow EF$ – диаметр $\Omega \Rightarrow \angle EAF = 90°$

Тогда, $EA = \cos\alpha \cdot EF$, $AF = \sin\alpha \cdot EF$

Тогда $S_{AEF} = \frac{1}{2} EF^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\cdot(2R)^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha =$

$= R^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = R^2 \cdot \sin(2\alpha) = \left(\frac{17\cdot5}{6}\right)^2 \cdot \frac{15}{17} = \frac{17\cdot5^3}{12}$

Ответ: $R = \frac{17\cdot5}{6}$, $r = \frac{17\cdot8}{15}$,

$\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}$

$S_{AEF} = \frac{17\cdot5^3}{12}$

№5) $f(1\cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y}) = 0$

$f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

Посчитаем все $f(n)$ для $n \in \mathbb{N}$, $n \in [1; 24]$

$f(1) = 0$ $f(2) = [\frac{2}{4}] = 1$ $f(3) = 1$ $f(4) = 2f(2) = 2$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 2$ $f(6) = f(2) + f(3) = 2$ $f(7) = 2$ $f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(9) = 2f(3) = 2$ $f(10) = f(2) + f(5) = 3$ $f(11) = [\frac{11}{4}] = 3$ $f(12) = f(6) + f(2) =$

$= 3$ $f(13) = 4$ $f(14) = 3$ $f(15) = 3$ $f(16) = 4$ $f(17) = 5$

$f(18) = 3$ $f(19) = 5$ $f(20) = 4$ $f(21) = 3$ $f(22) = 4$

$f(23) = 6$ $f(24) = 4$

Тогда для всех $f(y) = n$ подойдут те x, $f(x) < n$, $\cancel{f(x) \neq 0}$

Всего есть 1 число $x: f(x) = 0$

2 числа $x: f(x) = 1$

5 чисел $x: f(x) = 2$

8 чисел $x: f(x) = 3$

5 чисел $x: f(x) = 4$

2 числа $x: f(x) = 5$

1 число $x: f(x) = 6$

Тогда подходящих пар $(x; y)$ $1 \cdot 23 + 2 \cdot 21 + 5 \cdot 16 + 8 \cdot 8 +$

$+ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 226$

Ответ: 226

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6) $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$f(x) = -8x^2-30x-17$

$f(-\frac{11}{4}) = 5 \quad f(-\frac{3}{4}) = 1$

Т.к. ~~$-\frac{11}{4}a$~~ $ax+b \le$ ~~$-8x^2-3$~~ $f(x)$ на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, то

$b - \frac{11}{4}a \le 5$ и $b - (\frac{3}{4}+\Delta)a \le f(-\frac{3}{4}+\Delta)$ при $\Delta \to 0_* \Rightarrow$

$\Rightarrow b - \frac{3}{4}a \le 1$

Тогда прямая $ax+b$ на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ находится ~~ниже или совпадает~~ не выше чем прямая с точками $(-\frac{11}{4}; 5)$ и $(-\frac{3}{4}; 1)$

Прямая с точками $(-\frac{11}{4}; 5)$ и $(-\frac{3}{4}; 1)$ $= cx+d$

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}c + d = 5 \\ -\frac{3}{4}c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c = -2 \\ d = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Посмотрим на пересечения $\overset{-2x-\frac{1}{2}}{cx+d}$ и $\frac{12x+11}{4x+3} = g(x)$

$-2x - \frac{1}{2} = \frac{12x+11}{4x+3}$

$(2x+\frac{1}{2})(4x+3) = -12x-11$

$8x^2+8x+\frac{3}{2} = -12x-11 \quad |\cdot 2$

$16x^2+40x+25=0$

$(4x+5)^2=0$ Тогда, $-2x-\frac{1}{2}$ касается $g(x)$, в т. $-\frac{5}{4}$, тогда все прямые $\overset{ax+b}{}$ ниже $-2x-\frac{1}{2}$ на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$ ~~в т.~~ в точке $-\frac{5}{4}$ будут ниже $g(x)$, значит они не подходят. Тогда может подходить только прямая $-2x-\frac{1}{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6 продолжение) Докажем, что $-2x-\frac{1}{2}$ подходит:

$\frac{12x+11}{4x+3} \overset{?}{\leq} -2x-\frac{1}{2} \quad | \cdot (4x+3)\cdot(-1) > 0 \quad (x < -\frac{3}{4})$

$-12x-11 \overset{?}{\leq} (2x+\frac{1}{2})(4x+3) \; | \cdot 2$

$(4x+5)^2 \geq 0$

$-2x-\frac{1}{2} \overset{?}{\leq} -8x^2-30x-17 \; \cancel{| \cdot (-1)}$

$8x^2+30x+17-2x-\frac{1}{2} \overset{?}{\leq} 0$

$8x^2+28x+16{,}5 \overset{?}{\leq} 0 \; | \cdot 2$

$16x^2+56x+33 \overset{?}{\leq} 0$

$-\frac{3}{4}$ и $-\frac{11}{4}$ – корни $\Rightarrow$ на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ неравенство верно.

Тогда $-2x-\frac{1}{2}$ ~~подходит~~ это единственная подходящая прямая

Ответ: $(-2; -\frac{1}{2})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 2\alpha \quad y = 2\beta$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{4}{5}$

$\sin(x+2y) + \sin x = \cancel{8 \sin}$

$= 2\sin(x+y)\cdot\cos(2y) = -\frac{4}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos(2y) = -\frac{4}{5}$

$\cos(2y) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cancel{\sin(x+y) =}$

$\cancel{\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y}$

$\cos(2y) = 2\cos^2 y - 1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cancel{= \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$

$\cancel{2+\sqrt{5} = t^2 2\sqrt{5}} \quad 2 = \sqrt{5}(2t^2-1)$

$t^2 = a + \frac{1}{a} = \frac{a^2+1}{a}$ $\quad \cancel{t^2 + 2 = \frac{(a-1)^2}{a}}$

$tg x = tg 2\alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$

$= \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) +$

$+ \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$

$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} +$

$+ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(x+2y) + \sin x =$

$= \sin x\cos 2y + \cos x \sin 2y + \sin x = -\frac{4}{5}$

$\sin x$

$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$2+\sqrt{5}+1 = 3+\sqrt{5} =$

$= \frac{3\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}$

$2\cos^2 y = \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad \cos^2 y = \frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} =$

$t^2 = \frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \cancel{\sqrt{5}-1 + \sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{2} = t^2$

$\cos 2y = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2y = \pm \cancel{\sqrt{\frac{3}{5}}} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin x\cos 2y + \cos x\sin 2y + \sin x = -\frac{4}{5}$

$\sin 2y = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2\sin x}{\sqrt{5}} + \frac{\cos x}{\sqrt{5}} + \sin x = -\frac{4}{5}$

$\sin x(2+\sqrt{5}) + \cos x = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad x = 2\alpha$

$y = 2\beta$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{4}{5}$

$\sin(x+y)$

$2\sin(x+y)\cos(y) = -\frac{4}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos y = -\frac{4}{5}$

$\cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{4}{5} \quad \frac{1}{5}$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2\sin x}{\sqrt{5}} \pm \frac{\cos x}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad tg x = \sqrt{}$

$\cos 2y = \frac{3}{5}$ $\quad \sin 2y = 2\sin y\cos y = \pm\frac{4}{5}$

$2\sin x \pm \cos x = -1$

$2\sin x + \cos x = -1$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{4}{5}$

$tg x =$

$\sin(x+2y) + \sin x =$

$= \sin x\cos 2y + \cos x \sin 2y + \sin x = -\frac{4}{5}$

$\frac{3\sin x}{5} \pm \frac{4\cos x}{5} + \sin x = -\frac{4}{5}$

$8\sin x \pm 4\cos x = -4$

$2s$

$\underline{2\sin x \pm \cos x = -1}$

$2\sin x + \cos x = -1$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

$2\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$2\cos\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$ $\quad \cos\alpha + 2\sin\alpha = 0$

$\times$ $\quad \underline{tg\alpha = -2}$

$2\sin\alpha = -\cos\alpha$

$\underline{tg\alpha = -\frac{1}{2}}$

$2\sin x - \cos x = -1$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1 = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

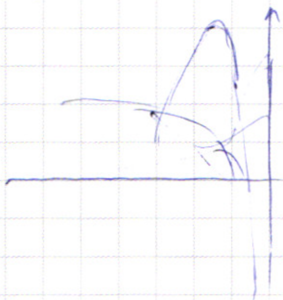
$\sin\alpha = 0$ $\quad \sin\alpha = -2\cos\alpha$

$\underline{tg\alpha = 0}$ $\quad \underline{tg\alpha = -2}$

$\underline{0,\ -2,\ -\frac{1}{2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x)=\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$ $g(x)=$



$g(0)=-17$

$g(-1)=5$

$g(-2)=11$

$g(-3)=1$

$-32+60-17$

$-72+90-17=1$

$f(0)=\frac{11}{3}$

$f(-1)=1$

$f(-2)=\frac{13}{5}$

$f(-3)=\frac{25}{9}$

$\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)=$

$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

1) $\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{4}{5}\end{cases}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot$

$\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$ $\sin2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

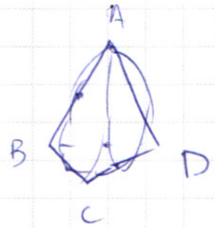
① $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=\frac{2\sin2\alpha}{\sqrt5}+\frac{\cos2\alpha}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0$

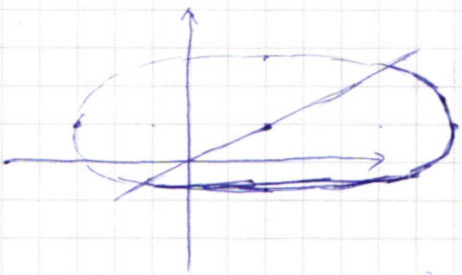

A
B
D
C

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x^2+9y^2-4x-18y=12$

$(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$



$3y-3=\pm5$

$y=\frac{8}{3}$ $y=-\frac{2}{3}$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$$\begin{cases} xy-x-2y+2\geq0 \\ x-2y\geq0 \\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \end{cases}$$

$y\leq\frac{x}{2}$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+2y-2+4y^2=0$

$\cancel{\frac{1}{4}x^2+x}$ $x(x-5y+1)+4y^2-4xy+4y+6y-2$

$(x-4y)(x-y+1)+6y-2=0$

$(x-2y)^2=x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-xy+x=4xy-4y^2-2y+2$

$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)$

$\cancel{y}$ $x=3$

$(3-2y)^2=y-1$

$4y^2-13y+10=0$

$(ax+by+c)(\alpha x+\beta y+\gamma)=\ldots$

$a\alpha=1$

$b\beta=4$

$c\gamma=-2$

$a\gamma+\alpha c=1$

$b\gamma+\beta c=2$

$a\beta+b\alpha=-5$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$ $\begin{array}{r} 144 \\ \times 4 \\ \hline 576 \end{array}$ $\begin{array}{r} 576 \\ +324 \\ \hline 900 \end{array}$

ОДЗ: $x^2+18x>0$ $D=324+$ $x^2+18x-144 \leq 0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$ x_1 x_1 $\frac{-18 \pm 30}{2} = $

$\cancel{\log_{12}(x^2+18x) = a}$ $12^{\log_{12}}$ $= -24$, 6

$12^a = x^2+18x$

18

$5^a + 12^a \geq 13^a$ $8 \cdot 26$

$25+36 \geq 144^{\log_{12}13} - 18 \cdot 8$

$\left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1$ $25+144 \geq 13 \cdot 13$ $\cancel{20}$ $8 \cdot 6$

$a \in (0; 2]$

$\log_{12}(x^2+18x) \in (-\infty; 2]$

$0 < x^2+18x \leq 144$ $x^2+18x-144=0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$ ~~ОДЗ~~

ОДЗ: $x^2+18x>0$

~~На о~~

Т.к. на ОДЗ $x^2+18x>0$, то $|x^2+18x| = x^2+18x$

Пусть $a = \log_{12}(x^2+18x)$ Тогда $x^2+18x = 12^a$ и $a \in (-\infty; +\infty)$

$5^a + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

$5^a + 12^a \geq (12^a)^{\log_{12}13} = 12^{\log_{12}13 \cdot a} = 13^a$

~~5^a~~ $13^a > 0$

$f(a) = \left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a - 1 \geq 0$

~~$f'(a)$~~ $\frac{5}{13} < 1$ и $\frac{12}{13} < 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a - 1$ ~~убывающ~~ монотонно убывает

$a = 2$ — корень f, т.к. $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 - 1 = \frac{25+144}{169} - 1 = 0$,

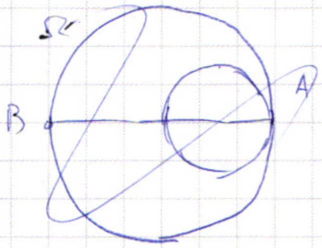
тогда при $a \in (-\infty; 2]$, $f(a) \geq 0$, а при $a \in (2; +\infty)$, $f(a) < 0$

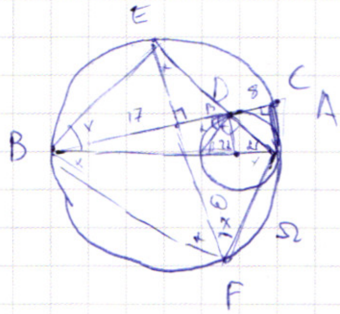
Тогда, $a \in (-\infty; 2]$. $\log_{12}(x^2+18x) \in (-\infty; -2]$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\alpha+\beta=90^\circ$

$\frac{17}{2R-r}=\frac{25}{2R}$

$34R=50R-25r$

$25r=16R \quad r=\frac{16}{25}R$

$x=90^\circ-\alpha$

$17^2=(2R-2r)\cdot 2R=$

$=\left(\frac{18}{25}R\right)\cdot 2R$

$17^2=4\cdot\frac{R^2}{25} \quad R=\frac{17\cdot 5}{2}$

$r=\frac{16}{25}\cdot\frac{17\cdot 5}{2}=\frac{17\cdot 8}{5}$

$\cos 2\alpha=\frac{1}{\frac{2R-r}{r}}$ $\frac{2R-r}{r}=\frac{2R}{r}-1=$

$=\frac{17\cdot 5}{17\cdot 8}\cdot 5=$

$=\frac{25}{8}$

$\frac{8}{25}$

$\frac{8}{25}=1-2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha=\frac{17}{25}$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{17}}{5\sqrt{2}} \quad \alpha=\arcsin\frac{\sqrt{17}}{5\sqrt{2}} \quad x=90^\circ-\arcsin\frac{\sqrt{17}}{5\sqrt{2}}$

$f(1)=$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(1)=0$

$f(p^\alpha)=f(p)+f(p^{\alpha-1})=\alpha f(p)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right) \quad f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$f(p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n})=$

$=\alpha_1 f(p_1)$

$\begin{array}{r} +\,131 \\ 95 \\ \hline 226 \end{array}$

$23+44+5\cdot 19+6\cdot 4=$

$=67+64+95=$

$=$

$\cancel{\dfrac{12x+11}{4x+3} < ax+b \le -8x^2-30x-17}$

2) $x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)} = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$x=a+2$

$x-2=a \quad y-1=b \quad y=b+1 \quad x-2y=a-2b$

$a^2+9b^2=5^2$

$a-2b=\sqrt{ab} \iff \begin{cases} a-2b\ge 0 \\ \cancel{ab\ge 0} \quad ab=(a-2b)^2 \end{cases}$

$ab=(a-2b)^2$

$ab=a^2-4ab+4b^2$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$\cancel{(a-1)}$

$a(a-b)+4b(b-a)=(b-a)(4b-a)=0$

$b=a \quad 4b-a=0$

$a=4b$

$\cancel{36+36-24-36=12}$

$a^2+9b^2=5^2 \quad a^2+9b^2=5^2$

$\cancel{6-4=\sqrt{12-6-4+2}}$

$10b^2=5^2 \quad 25b^2=25$

$b^2=\frac{5}{2} \quad b=\pm 1$

$\cancel{b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}}$

$b=1 \quad b=-1$

$b=\sqrt{\frac{5}{2}} \quad b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a=4 \quad a=-4$

$a=\sqrt{\frac{5}{2}} \quad a=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a-2b=2\ge 0 \quad a-2b=-2<0$

$a-2b=-\sqrt{\frac{5}{2}}<0 \quad a-2b=\sqrt{\frac{5}{2}}\ge 0$

$x=6$

$y=2$

$\cancel{a}\ b\ge 0 \quad x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

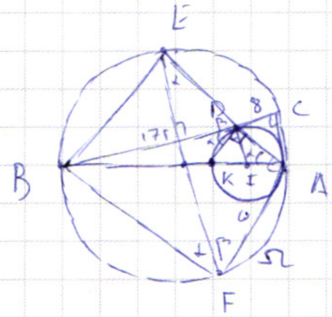
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР (заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~т.к~~ BA

диаметр ω на AB

AK - диаметр $\omega \Rightarrow \angle KDA = 90°$

BD - кас. $\Rightarrow \angle DAK = \angle BDK = \alpha$

$\angle BDA > 90°$, $\alpha < 90°$

$\angle BDI = 90°$, $\angle BCA = 90°$, $\angle CBA$ - общ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDI \sim BCA \Rightarrow \frac{BD}{BI} = \frac{BC}{BA}$

$\frac{17}{2R-r} = \frac{25}{2R}$ $\quad 34R = 50R - 25r \quad r = \frac{16}{25}R$

BD - кас $\Rightarrow BD^2 = BK \cdot BA$ $\quad 17^2 = (2R-2r)\cdot 2R = (2R - \frac{32}{25}R)\cdot 2R =$

$= \frac{36}{25}R^2 \quad R = \frac{17\cdot 5}{6} \quad r = \frac{16}{25}\cdot R = \frac{16}{25}\cdot\frac{17\cdot 5}{6} = \frac{17\cdot 8}{15}$

$2R - r = \frac{17\cdot 5}{3} - \frac{17\cdot 8}{15} = 17\cdot\frac{25-8}{15} = \frac{17^2}{15}$

$\angle EAB = \angle EFB = \alpha$

$17 \times 17 = 119 + 17 = 189$, $189 - 125 = 64$

$\angle AFE + \angle EFB = 90°$ (AB - диаметр) $\Rightarrow \angle EFB = 90° - \alpha$

$\angle DIB = 2\alpha \quad \sin 2\alpha = \frac{BD}{BI} = \frac{17}{2R-r} = \frac{17}{} : \frac{17^2}{15} = \frac{15}{17} \quad \cos 2\alpha = \frac{8}{17}$

~~$2\alpha < 90° \Rightarrow \sin\alpha > 0$~~

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{25}{34}$

$2\alpha < 90$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{15^2}{34^2} = \sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)$

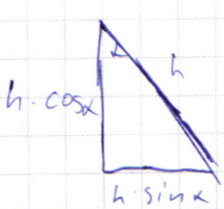
$\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \frac{15^2}{34^2} = 0$

$t^2 - t + \frac{15^2}{34^2}$

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289$, $289 - 225$

$D = 1 - \frac{15^2}{17^2} = \frac{8^2}{17^2}$

$\sin^2\alpha = \frac{1 - \frac{8}{17}}{2} = \frac{9}{34}$



$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(x) = -8x^2 - 30x - 17$

$8x^2+30x+17$

$\frac{121}{2} - \frac{115}{2} + 17 = 20$

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -8\cdot\frac{9}{16} + \frac{90}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 = 1$

$f\left(-\frac{11}{4}\right) = -8\cdot\frac{121}{16} + \frac{330}{4} - 17 = \frac{115}{2} - \frac{121}{2} - 17 = \cancel{-20}\ 5$

$f(-1) = 5$

$f(-2) =$

$g(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$

$12x+11 = 4x+3$

$8x = -8$

$12x+11 = 8x+6$

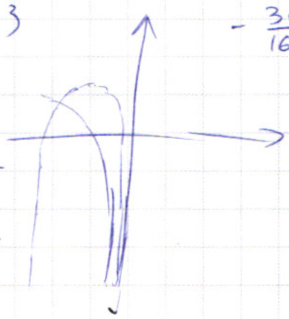
$4x = -5$

$x = -\frac{5}{4}$

$-\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$\cancel{g\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{-9+11}{}}$

$g\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{-33+11}{-11+3} = \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4}$



$15 \cdot 11 = 165$

$\frac{-22+11}{-8+3} = \frac{11}{5}$

$\frac{-33+11}{-11+8} = \frac{11}{4}$

$-8\left(-\frac{11}{4}\right)^2$

$-\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17 = 5$

$17 \cdot 8 = 136$

$225 - 136 = 89$

$f\left(-\frac{15}{8}\right) = -\frac{225}{8} + \frac{225}{4} - 17 = \frac{225}{8} - 17 = \frac{89}{8}$

$f(-2) = -32+60-17 =$

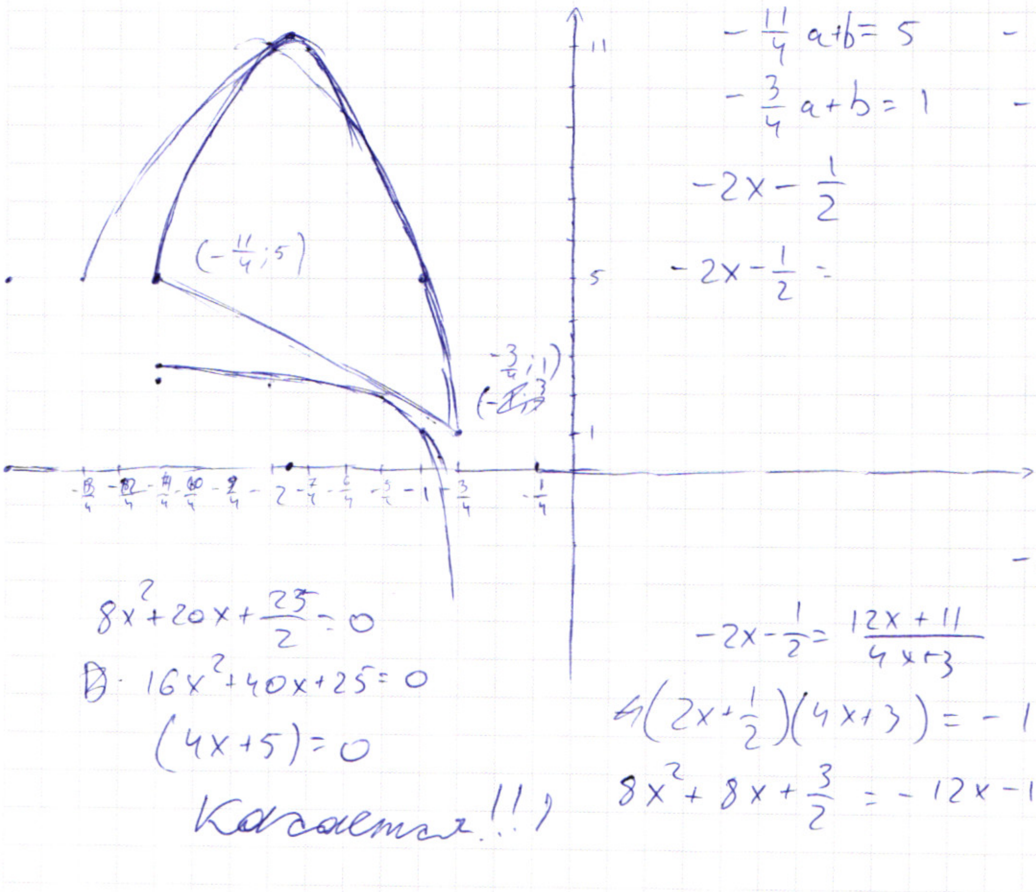
$-8x^2 - 30x - 17 - ax - b \geq 0$ на $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$8x^2 + 30x + 17 + ax + b \leq 0$

$-\frac{14}{8}\ \ -\frac{16}{8}\ \ -\frac{7}{4} > \ \ > -2$

$8x^2 + (30+a)x + (17+b) \leq 0$

$ax + b$



$-\frac{11}{4}a + b = 5$

$-\frac{3}{4}a + b = 1$

$-\frac{33}{4}a + 3b = 15$

$-\frac{33}{4}a + 11b = 11$

$11b - 3b = -4$

$b = -\frac{1}{2}$

$-2x - \frac{1}{2}$

$-2x - \frac{1}{2} =$

$-\frac{3}{4}a - \frac{1}{2} = 1$

$-\frac{3}{4}a = \frac{3}{2}$

$a = 2$

$-\frac{3}{4}$

$\cancel{9+42+57}$

$9-42+33$

$8x^2 + 20x + \frac{25}{2} = 0$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$(4x+5) = 0$

Касается!!!

$-2x - \frac{1}{2} = \frac{12x+11}{4x+3}$

$4\left(2x+\frac{1}{2}\right)(4x+3) = -12x - 11$

576

$8x^2 + 8x + \frac{3}{2} = -12x - 11$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)