МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. По формуле суммы синусов правое уравнение принимает вид:

$2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{4}{17}$

Подставив значение из левого уравнения, получаем:

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta)=-\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, значит $\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$:

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\frac{8}{\sqrt{17}}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos^2\alpha-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin^2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\ \Big|:\cos^2\alpha\neq 0$

($\cos\alpha\neq 0$, т.к. по условию $tg\,\alpha$ определён.)

$\frac{8}{\sqrt{17}}tg\alpha+\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{17}}tg^2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}tg^2\alpha-\frac{1}{\sqrt{17}}\ \Big|\cdot\sqrt{17}$

$8\,tg\alpha=-2$, $tg\alpha=-\frac{1}{4}$.

2) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$:

$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\ \Big|\cdot\sqrt{17}$

$8\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\ \Big|:\cos^2\alpha\neq 0$

$8\,tg\alpha+tg^2\alpha=0$

$tg\alpha=0$ или $tg\alpha=-8$.

Т.к. по условию как минимум есть 3 различных значения $tg\alpha$, то все 3 найденных подходят.

Ответ: -8 ; $-\frac{1}{4}$; 0.

№2. $3y-2x = \sqrt{3y(x-1)-2(x-1)} = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

Рассмотрим 2 случая:

1) $3y-2 \geqslant 0$, тогда $x-1 \geqslant 0$

и $3y-2x = \sqrt{3y-2} \cdot \sqrt{x-1}$

Пусть $a = \cancel{3y}\sqrt{x-1}$, $b = \sqrt{3y-2}$

$x = a^2+1 \qquad y = \frac{b^2+2}{3}$

Исходная система принимает вид:

$$\begin{cases} b^2+2-2a^2-2 = ab & (1) \\ 3\cdot(a^2+1)^2+3\cdot\left(\frac{b^2+2}{3}\right)^2-6(a^2+1)-4\cdot\left(\frac{b^2+2}{3}\right) = 4 \ \cancel{\cdot 3} & (2) \end{cases}$$

(1) $b^2-2a^2 = ab$

(2) $3a^4+\cancel{6a^2}+3+\frac{b^4+4b^2+4}{3}-\cancel{6a^2}-6-\frac{4}{3}b^2-\frac{8}{3} = 4 \quad \Big| \cdot 3$

$9a^4+9+b^4+\cancel{4b^2}+4-18-\cancel{4b^2}-8 = 12$

$9a^4+b^4 = 25$

(1) $2a^2+ab-b^2=0$

$b^2(2(\frac{a}{b})^2+(\frac{a}{b})-1)=0$

$b=0$ или $2(\frac{a}{b})+(\frac{a}{b})-1=0$

$9a^4=25$

$a = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

$x = \frac{8}{3}$

$y = \frac{2}{3}$

Не подходит, т.к. $3y-2x = 2-\frac{16}{3} < 0$

$\frac{a}{b} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -1 \end{array}\right.$

$a = \frac{1}{2}b$:

$\frac{9}{16}b^4+b^4=25$

$\frac{25}{16}b^4 = 25$

$b^4=16$

$b=\pm 2$

$a = \pm 1$

$y = 2$, $x = 2$ — подходит.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a=-b$: $a^2=b^2$, $9a^4+a^4=25$

$a^4=\frac{25}{10}$, $a^2=\frac{5}{\sqrt{10}}$ $x=\frac{5}{\sqrt{10}}+1$

$b^2=\frac{5}{\sqrt{10}}$ $y=\dfrac{\frac{5}{\sqrt{10}}+2}{3}$

$3y-2x=\frac{5}{\sqrt{10}}+2-\frac{10}{\sqrt{10}}-2=-\frac{5}{\sqrt{10}}<0 \Rightarrow$ не подходит.

2) $3y-2\le 0$, тогда $x-1\le 0$, $a=\sqrt{1-x}$, $b=\sqrt{2-3y}$

Исходная система примет вид:

$$\begin{cases} ① \; 2a^2-ab-b^2=0 \\ ② \; 9a^4+b^4=25 \end{cases}$$

① $b^2(2(\frac{a}{b})^2-(\frac{a}{b})-1)=0$

$b=0$

$a^4=\frac{25}{9}$

$a^2=\frac{5}{3}$, $x=-\frac{2}{3}$

$b^2=0$, $y=\frac{2}{3}$

или $2(\frac{a}{b})^2-(\frac{a}{b})-1=0$

$\frac{a}{b}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\left[\begin{array}{l}1\\-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$a=b$ или $a=-\frac{1}{2}b$

$10a^4=25$

$a^2=\frac{5}{\sqrt{10}}=b^2$

$\frac{9}{16}b^4+b^4=25$

$b^2=4$

$a^2=\frac{b^2}{4}=4$

$x=1-\frac{5}{\sqrt{10}}$

$y=\dfrac{2-\frac{5}{\sqrt{10}}}{3}$ — подходит

$3y-2x=2-\frac{5}{\sqrt{10}}-2+\frac{10}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}>0$

$x=\cancel{6}-3$

$y=\cancel{6}-\frac{2}{3}$

Подходит

Ответ: $(-3;-\frac{2}{3})$, $(2;2)$, $(1-\frac{5}{\sqrt{10}};\dfrac{2-\frac{5}{\sqrt{10}}}{3})$.

№3. ОДЗ: $x^2+6x>0$.

Значит, $|x^2+6x| = x^2+6x$

Тогда исходное ~~уравнение~~ неравенство примет вид:

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$$

Пусть $\log_4(x^2+6x)=t$:

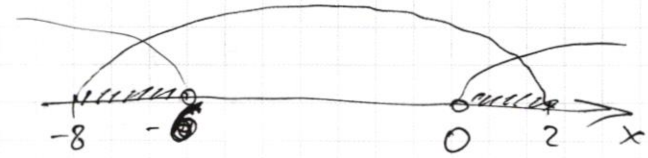
$$3^t+4^t \geq 5^t \quad \Big| : 4^t > 0$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^t+1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^t$$

Функция слева монотонно убывает (т.к. $\frac{3}{4}<1$), а функция справа — возрастает. Тогда их равенство может достигаться только при единственном значении $t=2$. При этом требуемое неравенство выполняется для $t \leq 2$.

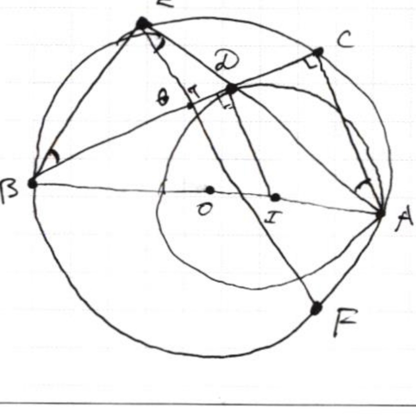
$$\begin{cases} \log_4(x^2+6x) \leq 2 \\ x^2+6x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+6x \leq 16 \\ x(x+6)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+6x-16 \leq 0 \\ x(x+6)>0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+8)(x-2) \leq 0 \\ x(x+6)>0 \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$.

№4



$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть O — центр большой окр-ти, I — центр малой окр-ти.

$\angle IDB$ — прямой, т.к. BD — кас., ID — радиус

$\angle BCA$ — прямой, т.к. опирается на диаметр.

Тогда $\triangle BDI \sim \triangle BCA$ по 2 углам (прямой и соответственные при $DI \parallel CA$)

$BC = BD + DC = 9$. $\frac{BD}{BC} = \frac{BI}{BA} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{18}$

$36R - 18r = 26R$

$18r = 10R$, $R = \frac{9}{5}r$.

$BI^2 = ID^2 + DB^2$, $(2R-r)^2 = r^2 + BD^2$

$\left(\frac{169}{25} - 1\right)r^2 = \frac{169}{4}$, $\frac{12}{5}r = \frac{13}{2}$, $\boxed{r = \frac{65}{24}}$

$\boxed{R = \frac{117}{24}.}$

Пусть $EF \cap BC = G$. $\angle FEA = 90° - \angle EDG = 90° - \angle CDA = \angle CAD$

Значит, хорды EC и AF равны

$\angle EFA = \angle EBA$ (опир. на EA)

$\sin\angle EBA = \frac{EA}{BA} = \frac{ED + DA}{2R}$

т.к. EA и BC — хорды, пересекающиеся в т. D, то

$ED \cdot DA = BD \cdot DC$

$\cos\angle CBA = \frac{BC}{2R} = \frac{9}{2R}$

$DA^2 = BD^2 + BA^2 - 2 \cdot BD \cdot BA \cdot \cos\angle CBA = \frac{169}{4} + 4R^2 - 26R \cdot \frac{9}{2R}$

$= \frac{169}{4} + 4R^2 - 117 = \frac{169 - 468}{4} + \frac{117^2}{144} = \frac{-299}{4} + \frac{117^2}{144}$

$ED = \frac{BD \cdot DC}{DA}$, ~~по т. синусов~~ $\cancel{\frac{EA}{\sin\angle EBA} = 2R}$

$$\sin\angle EBA = \frac{EA}{BA} = \frac{ED+DA}{2R}$$

$$\angle EBA = \arcsin\left(\frac{\frac{BD\cdot DC}{DA}+DA}{2R}\right) = \arcsin\left(\frac{\frac{65}{4}+DA^2}{2R\cdot DA}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{\frac{65}{4}+\frac{117^2}{144}-\frac{299}{4}}{\frac{117}{2}\cdot\sqrt{\frac{117^2}{144}-\frac{299}{4}}}\right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y-2x\geq 0 \qquad 3y\geq 2x$

$3y-2\geq 0 \qquad y\geq \frac{2}{3} \qquad 3y\geq 2$

$x-1\geq 0 \qquad x\geq 1 \qquad -2x\leq -2$

2) $3y-2\leq 0$, тогда $x-1\leq 0$

$a=\sqrt{1-x} \qquad b=\sqrt{\cancel{3y-2}\,2-3y}$

$x=1-a^2 \qquad y=\frac{\cancel{b^2-2}\,2-b^2}{3}$

$2-b^2-2+2a^2=ab$

$2a^2-b^2=ab$

$2a^2-ab-b^2=0$

$b^2\left(2\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)-1\right)=0$

$b=0$ или $\frac{a}{b}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\begin{cases}1\\-\frac{1}{2}\end{cases}$

$y=\frac{2}{3} \qquad a=b,\ a=-\frac{1}{2}b$

$x^2=a^4-2a^2+1$

$y^2=\frac{b^4-4b^2+4}{9}$

$3a^4-\cancel{6a^2}+3+\frac{b^4-4b^2+4}{3}-6+\cancel{6a^2}-\frac{4}{3}(2-b^2)=4 \;/\cdot 3$

$9a^4+\cancel{3}9+b^4-\cancel{4b^2}+4-18-8+\cancel{4b^2}=12$

$9a^4+b^4=25$

1) $b=0$

$a^4=\frac{25}{9}$

$a^2=\frac{5}{3}$

$x=-\frac{2}{3} \qquad y=\frac{2}{3}$

2) $b=a$

3) $a=-\frac{1}{2}b$:

$\frac{9}{16}b^4+b^4=25$

$b^2=2$

$a^2=\frac{b^2}{4}=1$

$x=0$

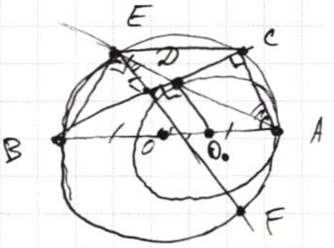
$y=0$

$\log_4 (x^2+6x) = t$

$3^t + 4^t \geq 5^t \quad |:4^t$

$\left(\frac{3}{4}\right)^t + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^t$

$\searrow \qquad \nearrow$



$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$BC = \frac{18}{2} = 9$

$\Rightarrow t = 4$ – ед. корень. ~~~~ при $t \leq 4$ лево >, право, а при $t > 4$ лево < право. $\triangle BDO_0 \sim \triangle BCA$

$\cancel{9R + 9r = 13R}$

$\cancel{4R = 9r}$

$\cancel{\frac{R}{r} = \frac{9}{4}}$.

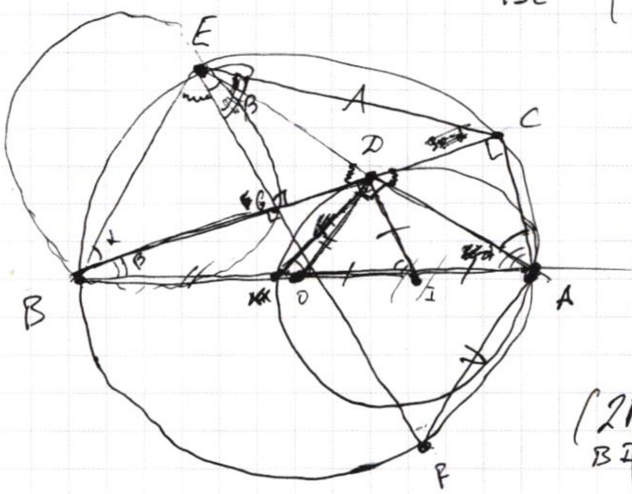
$\frac{BD}{BC} = \frac{R+r}{2R} = \frac{13}{18}$

$\frac{2R}{2R-r} = \frac{9}{\frac{13}{2}} = \frac{18}{13}$

$26R = 36R - 18r$

$18r = 10R$

$\frac{R}{r} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$



$\cancel{(2R-r)^2 + (r)^2 = BD^2}$

$R = \frac{9}{5} r$

$\left(\frac{13}{5} r\right)^2 + r^2 = BD^2$

$\cancel{\left(\frac{169}{25} + 1\right) r^2 = BD^2}$

$BI = 2R - r = \frac{18}{5} r - \frac{5}{5} r = \frac{13}{5} r$

$ID = r$

$\cancel{\frac{194}{25} r^2 = \frac{169}{4}}$

$\cancel{r^2 = \frac{169 \cdot 25}{4 \cdot 194}, \ r = \frac{13 \cdot 5}{2 \cdot \sqrt{194}}}$

$\frac{169}{25} r^2 = BD^2 + r^2$

$\frac{144}{25} r^2 = BD^2$

$\frac{12}{5} r = BD \qquad r = \frac{5}{12} BD = \frac{65}{24} \qquad R = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{12} BD = \frac{117}{24}$

$ED \cdot DA = BD \cdot DC$

$\cancel{\frac{ED}{DA} = \frac{CD}{DC}}$

$\cos\beta = \frac{BC}{BA} = \frac{9}{2R}$

$\cancel{\alpha + 2\alpha}$

$CA = \sqrt{4R^2 - 81}$

$\to AD^2 =$ по т. cos $\Rightarrow ED$

$\cos\beta = \frac{BC}{2R}$

$\to AD$ и $CA \to \cos 2\alpha \to \sin\alpha$

$\to \sin\beta$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cancel{-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha \cdot \left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}+1\right) = -\frac{8}{17}}$

2) $\sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{\underbrace{(x-1)}_{a}}\sqrt{\underbrace{(3y-2)}_{b}}$

$3y - 2x \geq 0$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$x = a^2+1$

$y = \frac{b^2+2}{3}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} = a$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} = b$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha+$
$+2\beta) = a\cdot\cos 2\beta + b\cdot\sin 2\beta$

$+ \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) =$

$= -\frac{2\cos 2\beta}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin(2\beta) = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$: $\sin\cancel{(2\alpha+2\beta) = -2\sin 2\beta}$

$\sin(2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№2. $3y-2x=\sqrt{|(x-1)|}\cdot\sqrt{|3y-2|}$

$x-1\geq 0$ и $3y-2\geq 0$

1) $3y-2x=ab$ $\quad a=\sqrt{x-1}$ $\quad b=\sqrt{3y-2}$

$a^2=x-1$ $\quad b^2=3y-2$

$b^2\cancel{+2}-2a^2\cancel{-2}=ab$ $\quad x=a^2+1$ $\quad y=\frac{b^2+2}{3}$

$b^2-2a^2=ab$ $\quad x^2=a^4+2a^2+1$

$y^2=\frac{b^4+4b^2+4}{9}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$\cancel{9y^2}\cancel{18y}\,3y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2$

$18y^2-30xy+8x^2+4x+6y=3x^2+3y^2-6x-4y$

$15y^2-30xy+5x^2+10x+10y=0$

$3y^2-6xy+x^2+2x+2y=0 \quad |:y^2$, если $y\neq 0$!

$3-6\frac{x}{y}\cancel{+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$

$3a^4+6a^2+3+\frac{b^4\cancel{+4b^2+4}}{3}-6a^2-6-\frac{4}{3}(b^2+2)=4 \quad |\cdot 3$

$9a^4\cancel{+18a^2}+9+b^4\cancel{+4b^2}+4\cancel{-18a^2}-18\cancel{-4b^2}-8=12$

$\begin{cases}9a^4+b^4=25\\ b^2-2a^2=ab \quad |:b^2\end{cases}$

$1-2\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)=0$, $\frac{a}{b}=c$

$2c^2+c-1=0$

$D=1+8=9$

$c=\frac{-1\pm 3}{4}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ -1\end{array}\right.$

...

№3. $(x^2+6x)>0$, $\log_4(x^2+6x)=t$, $(x^2+6x)=4^t$

$3^t+\cancel{\log_4}\,t\geq 5^t$ $\quad 5^t-3^t-t\leq 0$

$f(t)=5^t-3^t-t$

$f'(t)=5^t\cdot\ln 5-3^t\cdot\ln 3-1$

$3^t+t=5^t$

$\cancel{t}\,t\ln 3+\ln t=t\ln 5$

$\ln t=t(\ln 5-\ln 3)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)