МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\cancel{2\alpha}+4\beta-\cancel{2\alpha}}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\cancel{2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{}}$ $\quad 2\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$, тогда $\sin(2\beta) = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Если $\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, то

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\beta)$

$2\alpha + \cancel{2\beta} = \cancel{2\beta} + 2\pi n$, $\quad$ или $2\alpha+2\beta = \pi - 2\beta + 2\pi n$

$\alpha = \pi n$, $tg\,\alpha = 0$. $\quad \alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta + \pi n$

$tg\,\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right)$

Если $\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin(2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(-2\beta)$

$2\alpha+2\beta = -2\beta + 2\pi n$ $\quad$ или $2\alpha+2\beta = \pi+2\beta+2\pi n$.

$\alpha = -2\beta + \pi n$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $tg\,\alpha$ не опред.

$tg\,\alpha = tg\left(\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right)$

ответ: $tg\,\alpha = 0$; $tg\,\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right)$,

$tg\,\alpha = tg\left(-\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

пусть $3y-2=a$, $x-1=b$, тогда уравнение преобразуются в:

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ \frac{a^2}{3}+3b^2-\frac{25}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \ (1) \\ a^2+9b^2-25=0 \ (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $a-2b\geq 0$.

возведем (1) в квадрат

$$a^2-4ab+4b^2=ab$$

$$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2-25=0 \end{cases} -$$

$$5b^2+5ab-25=0$$

$a=\frac{5-b^2}{b}$ подставим в (2):

$$\frac{25-10b^2+b^4}{b^2}+9b^2-25=0 \ | \cdot b^2$$

$$25-10b^2+b^4+9b^4-25b^2=0$$

$$10b^4-35b^2+25=0 \Rightarrow 2b^4-7b^2+5=0$$

отсюда $b^2=1$ $b^2=\frac{5}{2}$.

1. $b=1$, $a=4$, тогда $x=2$; $y=2$.
2. $b=-1$, $a=-4$ не подходит по ОДЗ.
3. $b=\sqrt{\frac{5}{2}}$, $a=\frac{5-\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$ - не подходит по ОДЗ.

---

4. $b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$, $a=-\sqrt{\frac{5}{2}}$. $x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$, $y=\frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$.

Ответ: $(2;2)$

$\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}};\ \frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ ОДЗ: $x^2+6x>0$.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq \cancel{\log_4} 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

пусть $\log_4(x^2+6x)=t$

$3^t+4^t \geq 5^t \,|: 5^t$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1$

заметим, что и $\left(\frac{3}{5}\right)^t$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^t$ – убывающие функции,

также заметим, что при $t=2$ выполняется равенство, значит при всех $t\leq 2$ равенство будет выполняться.

$\log_4(x^2+6x)\leq 2$

$x^2+6x\leq 16$

$x^2+6x-16\leq 0$

$x_1=-8 \quad x_2=2$.

с учетом ОДЗ: $x\in(0;2]$

ответ: $x\in(0;2]$.

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\qquad$ $f(p)=[p/4]$

выпишем f от простых, а потом для всех натуральных от 3 до 27.

$f(3)=0$	$f(2)=0$	$f(10)=1$	$f(22)=2$
$f(5)=1$	$f(15)=1$	$f(12)=0$	$f(24)=0$
$f(7)=1$	$f(21)=1$	$f(14)=1$	$f(25)=2$
$f(11)=2$	$f(9)=0$	$f(15)=1$	$f(26)=3$
$f(13)=3$	$f(4)=0$	$f(16)=0$	$f(27)=0.$
$f(17)=4$	$f(6)=0$	$f(18)=0$	
$f(19)=4$	$f(8)=0$	$f(20)=0$	
$f(23)=5$	$f(9)=0$	$f(21)=1$	

$a, b \in N$

возьмём $n \in N$, $f(n) \neq 0$, $n = a \cdot b$. пусть $a \geq b$, тогда ~~f(b) f(a) ≥ 0~~. $f(b) < f(n)$

возьмём числа $n, \frac{1}{a}, b$, тогда $f(n \cdot \frac{1}{a}) = f(b) =$

$= f(n) + f(\frac{1}{a})$; $f(\frac{1}{a}) = f(b) - f(n) < 0$.

Посчитаем кол-во таких пар.

$15 = 3 \cdot 5$

$21 = 3 \cdot 7$

$10 = 2 \cdot 5$

$14 = 2 \cdot 7$

~~21 = 3·7~~

$22 = 2 \cdot 11$

$25 = 5 \cdot 5$

$26 = 2 \cdot 17$

всего семь пар и $f(\frac{1}{5}) = -1$

$f(\frac{1}{7}) = -1$

~~f(1/5) = −1.~~

$f(\frac{1}{11}) = -2$

$f(\frac{1}{17}) = -3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

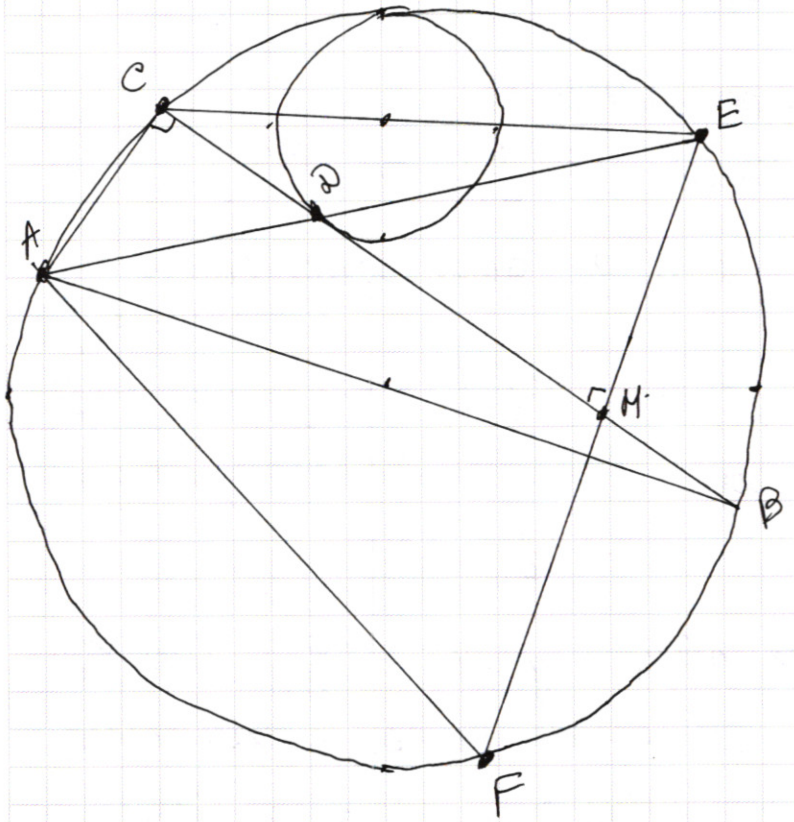
Заметим также, что $f(\frac{1}{2})=0$ $f(\frac{1}{3})=0$ $f(\frac{1}{4})=0$ $f(\frac{1}{6})=0$ и т.д. для всех чисел до 27.,

т.к. можно взять n, a, b, что $f(\frac{n}{a})=f(b)=f(n)+f(\frac{1}{a})$, где $f(n)=0$, $f(b)=0$, тогда $f(\frac{1}{a})=0$.

значит никакие другие пары для $f(\frac{a}{b})=f(a)+f(\frac{1}{b})$ не подходят, т.к. если мы берём пары, отличные от 7 найденных, то $f(a)\geq 0$ и $f(\frac{1}{b})\geq 0$, значит $f(\frac{a}{b})\geq 0$.

ответ: 7.

№5



т.к. AB – диаметр, то $\angle ACB = 90°$

по условию $\angle CHE = 90°$
$H \in CB, EF$

$AC \perp BC; EF \perp BC \Rightarrow$
$AC \parallel EF$, тогда
ACEF – трапеция,
а т.к. она вписана,
то $AF = CE$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}$

$3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$

$3y-2=a \quad x-1=b.$

$a-2b=3y-2x$

$a-2b=\sqrt{ab}.$

$a^2=9y^2-12y+4$

$\frac{a^2}{3}=3y^2-4y+\frac{4}{3}$

$\frac{a^2}{3}+3b^2=3x^2+3y^2-4y-6x+\frac{13}{3}-\frac{25}{3}=0.$

$\frac{a^2}{3}+3b^2-\frac{25}{3}=0.$

$a^2+9b^2-25=0$

$a-2b=\sqrt{ab}.$

$a^2-4ab+b^2=ab.$

$a^2-5ab+b^2=0.$

$\cancel{a^2}+b^2-5ab=\cancel{a^2}+9b^2-25$

$a=\frac{-8b^2+25}{5b}.$

$b^2=1 \quad b^2=\frac{5}{2}$

$b=1 \quad b=-1. \quad b=\sqrt{\frac{5}{2}}$ - п.к.

$a=4 \quad a=-4 \quad a=\frac{5-\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}$

$x=2$

$y=2.$

п.к.

$b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a=\frac{5-\sqrt{\frac{5}{2}}}{-\sqrt{\frac{5}{2}}}$

$b^2=x^2-2x+1$

$3b^2=3x^2-6x+3$

$\frac{\sqrt{5}}{2} \vee \frac{5-\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}.$

$\frac{5}{2} \quad \frac{5}{2}.$

$\frac{-8b^2+25}{5b}-2b=\sqrt{}$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \\ a^2-5ab+4b^2=0. \end{cases}$$

$5b^2+5ab=25$

$b^2+ab=5$

$a=\frac{5-b^2}{b}.$

$\frac{25-10b^2+b^4}{b^2}+9b^2=25 \,|\cdot b^2$

$25-10b^2+b^4+9b^4=25b^2$

$10b^4-35b^2+25=0$

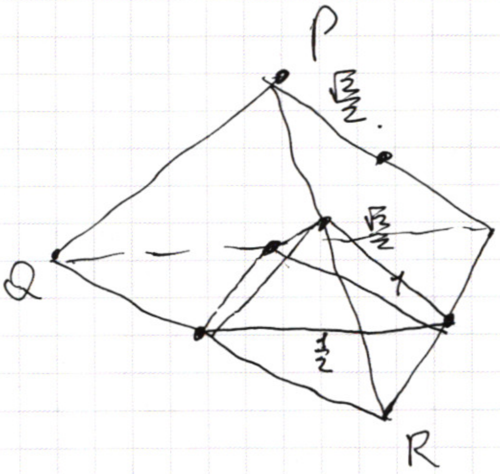
$2b^4-7b^2+5=0$

$2t^2-7t+5=0$

$t=1 \quad t=\frac{5}{2}.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

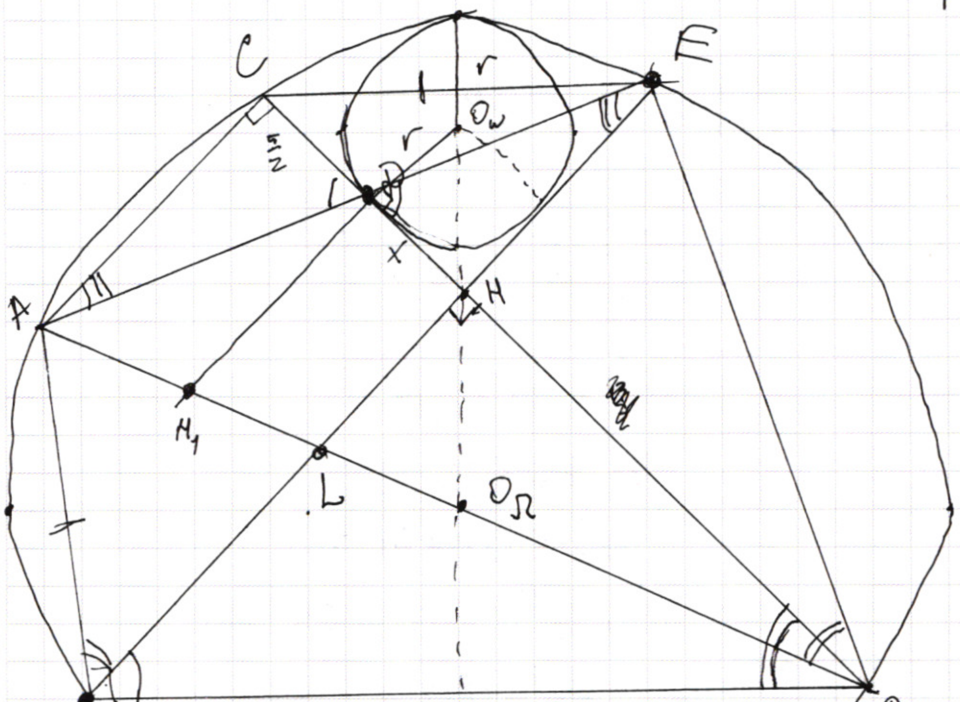
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$AF = CE.$

$AD \cdot DE = \frac{65}{4}$

$FH \cdot HE = \frac{65}{4}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\beta.$

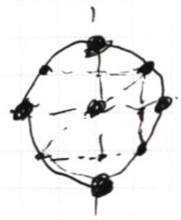
$\alpha = \pi n$

$\sin\alpha + \sin\beta = \cancel{\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))}$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta) = -\sin(2\beta)$

$\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{6}$ $\quad 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cancel{\sin 2\beta}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \right.$



$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos(2\beta) = -\frac{4}{17}$

$0.$

$\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cancel{\frac{4}{\sqrt{17}}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}} + \cos 2\alpha = -\cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\cancel{4\,tg 2\alpha + 2 = 0}$ $\quad \cancel{\sin 2\alpha \cdot 4 + \cos 2\alpha = -1}$

$\cancel{tg 2\alpha = \frac{1}{2}.}$ $\quad 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1.$

$\sin\left(2\alpha + \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\cancel{tg 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{1}{2}.}$ $\quad 2\alpha + \cancel{2\beta} = \cancel{2\beta} + 2\pi n$

$\alpha = \pi n$

$\cancel{1 - tg^2\alpha = 4 tg\alpha.}$ $\quad 2\alpha + 2\beta = \pi - 2\beta + 2\pi n$

$\cancel{tg^2\alpha + 4 tg\alpha - 1 = 0}$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{2} - 4\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \pi n.$

$\cancel{tg\alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = x \quad \cos 2\beta = y$

$xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}$.

$\begin{cases} 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \\ 9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2. \end{cases}$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2$

$18y^2-30xy+8x^2+4x+6y=4$

$3x^2+3y^2-6x-4y = 18y^2-30xy+8x^2+4x+6y$.

$15y^2-30xy+5x^2+10x+10y=0$.

$3y^2-6xy+x^2+2x+2y=0$.

$\cancel{3y^2}-6xy+x^2+2x+2y+4 = 3x^2+\cancel{3y^2}-6x-4y$

$2x^2+6xy-8x-6y-4=0$

$x^2+3xy-4x-3y-2=0$.

$3y(x-1)+x^2-4x-2=0$.

$(x-1)(3y+x-1)=0$.

$3y \geq 2x$

$3(x^2-2x+1)+3y^2-4y=7$

$3(x-1)^2+3y^2-4y=7$

$(3y-2x)^2 = 3xy-2x-3y+2$

$3y-2x = \sqrt{3xy-(3y+2x)+2}$

$3x^2+3y^2-2(3x+2y)=4$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ $\forall$ простого.

$f(3)=0$	$f(2)=0$.	$f(10)=1$	$f(22)=\cancel{1}2$
$f(5)=1$	$f(15)=1$	$f(12)=0$	$f(24)=0$
$f(7)=1$	$f(21)=1$	$f(14)=1$	$f(25)=2$
$f(11)=2$	$f(9)=0$	$f(15)=1$	$f(26)=3$.
$f(13)=3$	$f(4)=0$	$f(16)=0$	$f(27)=0$.
$f(17)=4$	$f(6)=0$	$f(18)=0$	
$f(19)=4$	$f(8)=0$	$f(20)=0$	
$f(23)=5$	$f(9)=0$	$f(21)=1$	

$f(3) = f\left(9 \cdot \frac{1}{3}\right) = f(9) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

$f(5) = f\left(\frac{25}{5}\right) = f(25) + f\left(\frac{1}{5}\right) = 2 + x = 1$ $\quad f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$.

$x = -1$.

$\overset{2}{25} \to \overset{1}{5}$

$\overset{3}{26} \to \overset{0}{2}$

$\overset{3}{26} \to \overset{3}{13}$

$22 \to 2$

$22 \to 11$

$21 \to 3$

$21 \to 7$

$15 \to 3$

$15 \to 5$

$14 \to 2$

$10 \to 2$

7 пар.

$15 \to 3 \cdot 5$

$15 \quad \frac{1}{3}$.

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

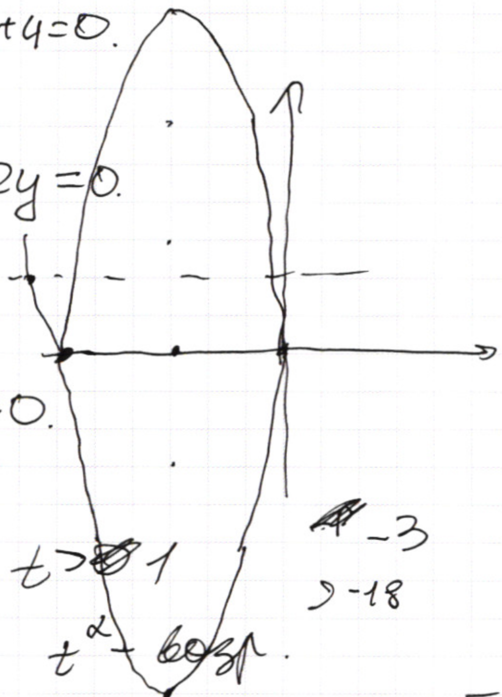
$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0.$

$18y^2-30xy+8x^2+4x+6y-4=0$

$(5y-3x)^2-7y^2-x^2+4x+6y+4=0.$

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0.$

$(5y-3x)^2-4y^2+x^2-2x+2y=0.$



$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq 5^{\log_4 x^2+6x}-x^2$

$|x^2+6x|^{\log_4 3}-|x^2+6x|^{\log_4 5}+x^2+6x\geq 0.$

$f(x)=(x^2+6x)^\alpha$ $\quad x^2+6x=t$

$t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}+t\geq 0.$

$t>1$

-3

>-18

$t(t^{\log_4 3-1}-t^{\log_4 5-1}+1)\geq 0.$

t^α - возр.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x-5^{\log_4 x^2+6x}\geq 0.$

$t^{\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5}$

$\log_t(t^{\log_4 3}+t)\geq \log_4 5$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}-5^{\log_4(x^2+6x)}\geq 0.$

$\log_t(t^{\log_4 3-1}+1)\geq \log_4 5$

$3^t+4^t-5^t\geq 0.$

$3^t+4^t\geq 5^t$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t$ - убыв.

$\left(\frac{4}{5}\right)^t$ - убыв.

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\geq 1$

$t=2$. - выполн.

$t\leq 2$ - тоже. $\quad x\geq 0$

$|x^2+6x|\leq 2.$

$x^2+6x-2\leq 0.$

$-x^2-6x\leq 2$

$x^2+6x+2\geq 0$

$+\quad -6\quad -\quad 0\quad +$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{36+8}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{44}}{2}=$

$=-3+\sqrt{11}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

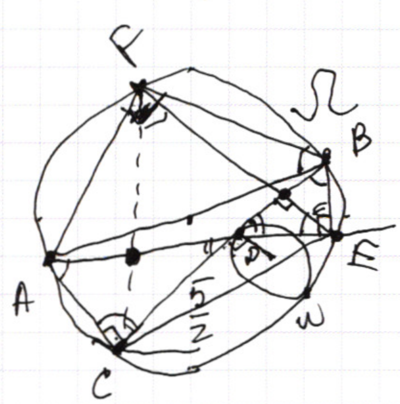
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

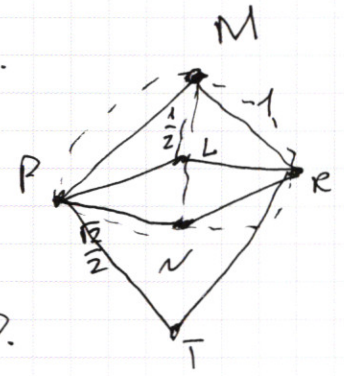
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$BD = \frac{13}{2}$. $CD = \frac{5}{2}$.

$AD \cdot DE = \frac{65}{4}$.

$AF = CE$.



$BC = 9$. $AF = 9$.

$AD \cdot DE = \frac{65}{4}$

$x(9-x) = \frac{65}{4}$.

$x^2 - 9x + \frac{65}{4} = 0$. 21 3.

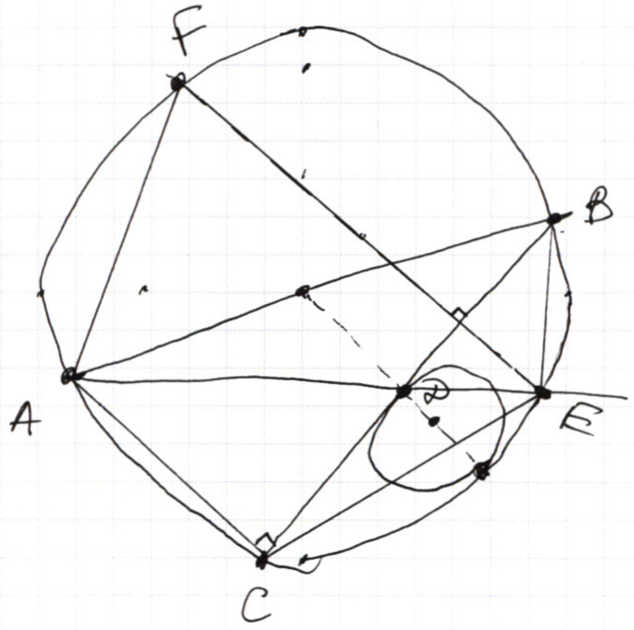
$\cancel{\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{}}$

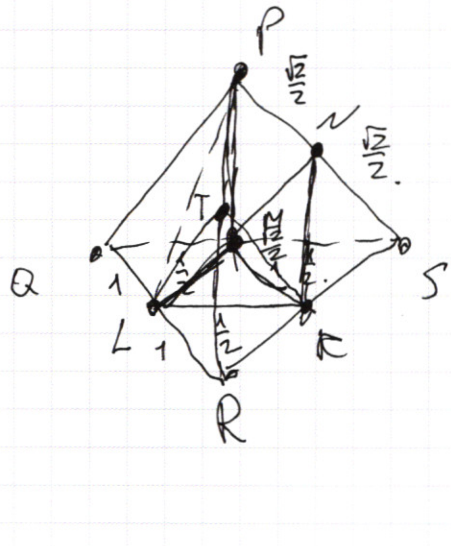
$x^2 - 36x + 65 = 0$.

$\cancel{\frac{BF}{AC} = \frac{13}{5}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$AF = CE$. CD, BD, BC.





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)