МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{1}{5}$ (из 2-го уравнения)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

$$\sin^2(2\beta) + \cos^2(2\beta) = 1$$

$$\sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{5}{25}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\sin(2(\alpha+\beta)) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

1) $\sin(2\beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

$$\sin(2\alpha)\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} + \cos(2\alpha)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha) + 2\cos(2\alpha) + 1 = 0$$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$$

$$-\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3\cos^2\alpha = 0$$

$$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \,/ : \cos^2\alpha \neq 0$$

$\operatorname{tg}\alpha$ определён, поэтому $\cos\alpha \neq 0$.

$$\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 3 \\ \operatorname{tg}\alpha = -1 \end{array}\right.$$

2) $\sin(2\beta) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\sin(2\alpha)\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}-\cos(2\alpha)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha)-2\cos(2\alpha)+1=0$$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0$$

$$3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos^2\alpha=0 \quad |:\cos^2\alpha\neq0$$

$$3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Ответ: $-1;\ \frac{1}{3};\ 3.$

№2. $$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90\end{cases}$$

Сделаем замену: $\begin{cases} x-6=a \\ 6y-3=b.\end{cases}$

Тогда $a-2b=x-6-2(6y-3)=x-6-12y+6=x-12y$

$$\frac{b}{3}=\frac{6y-3}{3}=2y-1$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{\frac{b}{3}\cdot a} \\ a^2+b^2=90 \\ ОДЗ:\ ab\geq0\end{cases}$$

С учётом ограничения $a\geq2b$ и ОДЗ:

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=\frac{ab}{3} \\ a^2+b^2=90\end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1-е уравнение системы:

$3a^2-13ab+12b^2=0.$

Пусть $b=0$. Тогда $a=0$ (из 1-го уравнения)

$a=\pm\sqrt{90}$ (из 2-го уравнения)

Получаем противоречие, b не может быть равно нулю.

Пусть $\frac{a}{b}=t$. $3t^2-13t+12=0$

$D=169-144=25=5^2$

$t=\frac{13\pm5}{6}$ $\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{4}{3}\end{array}\right.$

1) $t=3$. $a=3b$

$9b^2+b^2=90$

$10b^2=90$

$b=\pm3$

$\left[\begin{array}{l} a=9;\ b=3 \\ a=-9;\ b=-3\end{array}\right.$ – пара не удовлетворяет ограничению $a\geq 2b$.

2) $t=\frac{4}{3}$; $a=\frac{4}{3}b$

$\frac{16b^2}{9}+b^2=90$

$\frac{25b^2}{9}=90$; $b^2=\frac{90\cdot9}{25}$; $b=\pm\frac{9\sqrt{10}}{5}$.

$\left[\begin{array}{l} a=\frac{12\sqrt{10}}{5};\ b=\frac{9\sqrt{10}}{5} \text{ – пара не удовлетворяет ограничению } a\geq 2b \\ a=-\frac{12\sqrt{10}}{5};\ b=-\frac{9\sqrt{10}}{5}\end{array}\right.$

$a=9;\ b=3.$

$\begin{cases} x-6=9 \\ 6y-3=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$ $(15;1)$

$\cancel{a=\frac{12\sqrt{10}}{5};\ b=\frac{9\sqrt{10}}{5}}$

$\cancel{\begin{cases} x=\frac{12\sqrt{10}}{5}+6 \\ y=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{9\sqrt{10}}{5}+3\right) \end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases} x=\frac{42\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{4\sqrt{10}}{5} \end{cases}}$

$a=-\frac{12\sqrt{10}}{5};\ b=-\frac{9\sqrt{10}}{5}$

$\begin{cases} x=6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{1}{6}\cdot\left(3-\frac{9\sqrt{10}}{5}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{18\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$

Ответ: $(x=15;\ y=1)$, $\left(x=\frac{18\sqrt{10}}{5};\ y=\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$

№3.

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$. Тогда $x^2-10x<0$; $|x^2-10x|=10x-x^2$

Пусть $10x-x^2=t;\ t>0$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

Пусть $\log_3 t=a;\ t=3^a$

$3^a+3^{a\cdot\log_3 4} \geq 5^a$

$3^a+4^a \geq 5^a \quad |:5^a \neq 0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a \geq 1.$

Пусть $a>2$. Тогда $\left(\frac{3}{5}\right)^a<\left(\frac{3}{5}\right)^2$, т.к. $\frac{3}{5}<1$.

$\left(\frac{3}{5}\right)^a<\frac{9}{25}.$ $\left(\frac{4}{5}\right)^a<\left(\frac{4}{5}\right)^2$, т.к. $\frac{4}{5}<1$. $\left(\frac{4}{5}\right)^a<\frac{16}{25}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получаем, что при $a>2$ $\left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a<\frac{9}{25}+\frac{16}{25}$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a<1.$$

Если $a\leq 2$, то $\left(\frac{3}{5}\right)^a\geq\frac{9}{25}$; $\left(\frac{4}{5}\right)^a\geq\frac{16}{25}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a\geq 1.$

$a\leq 2$ – решение неравенства $\left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a\geq 1$

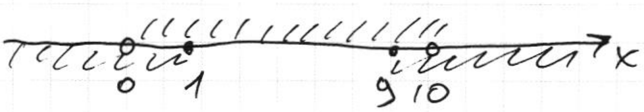
$$\log_3 t\leq 2$$

$$\log_3 t\leq\log_3 9$$

$$0<t\leq 9$$

$t=10x-x^2$; $0<10x-x^2\leq 9$

$$\begin{cases}10x-x^2>0\\10x-x^2-9\leq 0\end{cases}\qquad\begin{cases}x(x-10)<0\\x^2-10x+9\geq 0\end{cases}$$



Ответ: $(0;1]\cup[9;10)$.

№5.

$$f(ab)=f(a)+f(b)$$

$$f(1)=f(1)+f(1)$$

$$f(1)=0.$$

Рассмотрим значения $f(x)$ для всех натуральных x, $1\leq x\leq 25$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

Теперь для каждого значения $f(x)$ от 0 до 5 посчитаем, сколько чисел от 2-ух до 25-ти включительно принимают такие значения:

0 : 10
1 : 7
2 : 3
3 : 1
4 : 2
5 : 1

Заметим, что $f(1) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) - f(y)$. Тогда

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f(1) - f(y) = f(x) - f(y)$$

Нужно найти количество пар x, y ($x, y \in N$; $2 \le x \le 25$, $2 \le y \le 25$), что $f(x) - f(y) < 0$, т. е. $f(x) < f(y)$

1) $f(x) = 0$. $10 \cdot (7+3+1+2+1) = 10 \cdot 15 = 150$

2) $f(x) = 1$. $7 \cdot (3+1+2+1) = 7 \cdot 7 = 49$

3) $f(x) = 2$. $3 \cdot (1+2+1) =$ ~~...~~ $3 \cdot 4 = 12$

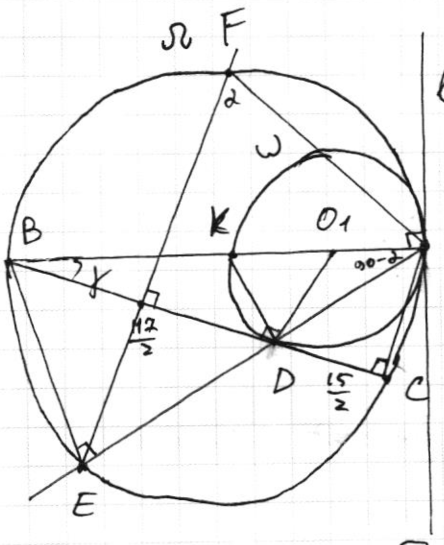
4) $f(x) = 3$. $1 \cdot (2+1) = 3$

5) $f(x) = 4$. $2 \cdot 1 = 2$

$150 + 49 + 12 + 3 + 2 = 150 + 49 + 17 = 199 + 17 = 216$

Ответ: 216

№4.



Решение:

Пусть R - ~~радиус~~ радиус окружности Ω, r - радиус окружности ω.

O_1 - центр окружности ω. Построим прямую l:

$AB \cap \omega_1 = K$. Прямая l проходит ~~BO_1~~ через точку A и перпендикулярна O_1A. A - точка касания l и окружности Ω, поэтому $BA \perp l$. $BA \perp l$; $O_1A \perp l$, значит, точки B, O_1, A лежат на одной прямой.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BO_1 = BA - O_1A = 2R - r.$

$\angle BCA = 90^\circ$ (опирается на диаметр)

Пусть $\angle ABC = \gamma$. По теореме синусов для $\triangle ABC$:

$$R = \frac{AC}{2\sin\gamma}. \quad (1)$$

D – точка касания BC и ω, $O_1D \perp BC$.

$\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$, по 2-ум углам

$$\frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC}; \quad \frac{r}{AC} = \frac{17}{2\cdot 16}; \quad AC = \frac{32r}{17} \quad (2)$$

Из $\triangle BO_1D$ (прямоугольного): $\sin\gamma = \frac{O_1D}{BO_1} = \frac{r}{2R-r}$ (3)

Объединяем (1), (2), (3):

$$R = \frac{32r}{2\cdot 17\cdot \sin\gamma} = \frac{16r}{17\cdot\sin\gamma} = \frac{16\cdot r}{17\cdot r}\cdot(2R-r) = \frac{16(2R-r)}{17}$$

$$17R = 32R - 16r; \quad 15R = 16r; \quad r = \frac{15}{16}R \ (4)$$

По теореме Пифагора для $\triangle BO_1D$:

$$BD^2 + O_1D^2 = BO_1^2$$

$$\frac{289}{4} + r^2 = (2R-r)^2 \qquad \text{Используя (4):}$$

$$\frac{289}{4} = 4R^2 - 4Rr; \quad \frac{289}{4} = 4R^2 - 4R\cdot\frac{15R}{16}; \quad \frac{289}{4} = \frac{16R^2 - 15R^2}{4}.$$

$$R = 17; \quad r = \frac{15\cdot 17}{16} = \frac{255}{16}; \quad AC = \frac{32\cdot r}{17} = \frac{32\cdot 255}{17\cdot 16} = 30$$

Пусть $\angle AFE = \alpha$. $\angle EBA = \angle AFE$ (вписанные, опираются на одну дугу)

$\angle BEA = 90^\circ$. $\angle BAE = 180^\circ - \angle BEA - \angle EBA = 90^\circ - \alpha$.
(опирается на диаметр)

$BK = BA - AK = 2R - 2r = 2(R - r) = 2\cdot\left(17 - \frac{255}{16}\right) = 2\cdot\left(\frac{272-255}{16}\right) = \frac{17}{8}.$

$\sin\gamma = \frac{AC}{2R} = \frac{30}{2\cdot17} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17};\ \cos\gamma = \frac{8}{17}$

По т. косинусов:

$KD = \sqrt{BK^2 + BD^2 - 2\cdot BK\cdot BD\cdot\cos\gamma} = \sqrt{\frac{289}{16} + \frac{289}{4} - 2\cdot\frac{17}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{17}}{2}\cdot\frac{\cancel{8}}{\cancel{17}}} =$

$= \sqrt{\frac{289 + 4\cdot289}{16} - 17} = \sqrt{\frac{1445 - 272}{16}} = \frac{\sqrt{1173}}{4}.$ Для $\triangle KDA$: $r = \frac{KD}{2\sin(90-\alpha)}$

Ответ: $R = 17;\ r = \frac{255}{16}.$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

ОДЗ: $2xy-12y-x+6 \geq 0$

$-12xy$

$-12(x+3y)$

$x^2+12xy+36y^2-12x-36y=45$

$$\begin{cases} (x+6y)^2-12x-12xy-36y=45 \\ x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \end{cases}$$

$6 \quad 12$

-27

$\sqrt{30-12-15+6}$ ③

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$15^2+36-12\cdot15-36=$

$(15-12)\cdot$

$x^2-12x+36-\cancel{36}+36y^2-36y+9-\cancel{9}=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$x-6=a$

$6y-3=b \quad 2y-1=\frac{b}{3}$

$12y-6=2b$

$a-2b=(x-6)-(12y+6)=$

$=x-12y$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{\frac{ab}{3}} \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$a-2b\geq0$

$-\frac{12\sqrt{10}}{5}+\frac{18\sqrt{10}}{5}$

$30+12=$

$9+15=$

6

$30-12=$

$-\frac{12\sqrt{10}}{5};-\frac{9\sqrt{10}}{5}$

$a^2-4ab+4b^2=\frac{ab}{3}$

$3a^2-13ab+12b^2=0 \;/:b^2\neq0 \quad t=\frac{a}{b}$

$\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$3t^2-13t+12=0$

$D=169-144=25=5^2$

$t=\frac{13\pm5}{6} \quad t_1=3$

$t_2=\frac{4}{3}$

$15-9=6$

$\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$a=3b$

$9b^2+b^2=90$

$10b^2=90$

$b=\pm3$

$(9;3),(-9;-3)$

$a=\left(\frac{27\sqrt{10}}{5};\frac{9\sqrt{10}}{5}\right)$

$\frac{16}{9}b^2+b^2=90$

$a^2=90$

$a=\pm$

$25b^2=90\cdot9$

$\frac{4}{3}\cdot9=12$

$b^2=\frac{90\cdot9}{25};\ b=\pm\frac{9\sqrt{10}}{5}$

$b\pm\sqrt{\frac{9\cdot9\cdot10}{5\cdot5}}=\frac{9\sqrt{10}}{5}$

$\frac{27^2\cdot10}{25}+\frac{81\cdot10}{25}=\frac{810\cdot10}{25}$

$27\cdot27=189+54=729$

$729+81=810$

$810/5=162$

$288+162=450$

$\frac{810}{25}=\frac{162}{5}$

$\frac{144\cdot10}{5\cdot5}$

$13-5=\frac{8}{6}$

$9\cdot9\cdot10$

$9\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик $tg\alpha - ?$ 3 знач.

$\cos\alpha \neq 0$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$tg(2\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

$\sin x + \sin y - ?$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \cdot \sin b$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

$\cancel{tg 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin}$

$$\begin{cases} a+b = x \\ a-b = y \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\sqrt{\frac{25}{25} - \frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad \sqrt{\frac{20}{25}} = 2\sqrt{5}$

$\cos(2\beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$4\alpha+4\beta \quad 2\alpha+4\beta-2\alpha$

$\cancel{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{4}{5} \quad \sqrt{5}$

$\cancel{\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha}$ I) $\frac{\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$-2(2\cos^2\alpha - 1) = -4\cos^2\alpha + 3$

$\cancel{\sin 2\alpha} + \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha = 0$

$-\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha \quad 3 \ -2 \ -1$

$\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 1 = 0}$

-3 $\quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

$-3; 1$

$-tg^2\alpha + 2tg\alpha + 3 = 0$

$-1 \quad \frac{1}{3}$

$D = 4 + 12 = 16$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$tg\alpha = 3; \ tg\alpha = -1$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$AC = \frac{32r}{17}$

$BK = 2r = 2R - BK = 2R - \frac{289}{8R} = \frac{16R^2 - 289}{8R}$ $2 \cdot 2 \cdot 5$

$\boxed{r = \frac{16R^2 - 289}{16R}}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2

$16R^2 - 289$

23	24	25
5	0	2

$BO^2 + DO_1^2 = BO_1^2 \quad (2R - r)^2$

$\frac{289}{4} + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$

$\boxed{4R^2 - 4Rr - \frac{289}{4} = 0}$

$D = 8r^2 + 4 \cdot 4 \cdot \frac{289}{4} = 8r^2 + 289 \cdot 4$

0 : 10

1 : 7

2 : 3

3 : 1

4 : 2

5 : 1

$10 \cdot (25 - 10) +$

$10 \cdot 15 +$

$+ 7 \cdot 7 +$

$+ 3 \cdot 3 +$

$+ 4 \cdot 1$

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ для простого p

$2 \le x \le 25$; $2 \le y \le 25$; $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\quad f(y) =$ $\quad f(25) = f(5)$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 0$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f($

$f = 0$: 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; 22; 24;

$f = 1$: 5; 7; 25

$f = 2$: 11

$f = 3$: 13

$f = 4$: 17; 19

$f = 5$: 23

$f(1) = f(1) + f(1)$

$a = a + a$

$a = 2a = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) - f(x)$

$a \cdot b = c$ $\quad \cancel{f(c)} = f(a) + f(b)$

$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) + f(1) = f(x) - f(y)$

2:

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{\cancel{x}}{r} = \frac{17}{2\cdot 16}$ 32 $\quad 2^8 \to 26 \quad \frac{AC}{r} = \frac{16}{17}$

$\sin y = \frac{\cancel{2r}}{2R}$

$\frac{256 r^2}{289} + 64 = \frac{74529}{256 r^2}$

$R = \frac{AC \cdot 17}{2 \cdot 2r} = \frac{17 AC}{4r}$

$\frac{256 r^4}{289 r^2} + \frac{64 r^2}{r^2} = \frac{74529}{256 r^2}$

$AC = \frac{4Rr}{17}$

$256 \cdot 256 r^4 + 64 \cdot 256 \cdot 289 r^2 - 74529 \cdot 289 = 0$

$\boxed{r = \frac{16R^2 - 289}{16R}}$

$16^2 = 256$

$BK \cdot 2R = \frac{289}{4}$

$\triangle BO_1D$: $O_1D = r$

$\sin\beta =$

$BO_1 = BA - O_1A = 2R - r$

$BD = \frac{17}{2}$

$2r = 2R - \frac{289}{8R}$

$r^2 + \frac{289}{4} = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$r = \frac{273}{16R}$

$\frac{289}{4} = 4R^2 - \frac{4 \cdot 273}{16\cdot 4}$

$r = R - \frac{289}{16R} = \frac{16R^2 - 289}{16R}$ $\quad 4R^2 = \cancel{\frac{289 + 4\cdot 273}{4\cdot 16}} =$

$r = \frac{8 \cdot 273}{16\sqrt{1381}} = \frac{273}{2\sqrt{1381}}$ $\quad \cancel{R = \frac{\sqrt{1381}}{8}}$

$\frac{289}{4} = 4R^2 - \cancel{4R} \cdot \frac{16R^2 - 289}{\cancel{16R}\ 4}$

$4R^2 = \frac{562}{4} = \frac{281}{2} =$

$289 = 16R^2 - 16R^2$

$R^2 = \frac{281}{8}, \quad R = \frac{\sqrt{281}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{562}}{2}$

1381 | 7, 7, 68, 63, 51, 19; 273 + 289 = 562; 273, 4, 1092, 289, 1381; 1381 | 1; 25 · 25 = 625, 1381, 125, 50, 90; 35 · 35 = 1225, 175, 105; 45 · 45 = 2025, 225, 180; 37 · 37 = 1369, 259, 111; 2050; 562 | 2, 281; 2812 | 2

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin y = \frac{O_1O}{BO_1} = \frac{r}{2R-r}$

$\frac{r}{AC} = \frac{17}{2\cdot 16}$; $AC = 32r$

$2R = \frac{AC}{\sin y}$; $2R = \frac{AC(2R-r)}{r}$

из пор. $AC = \frac{32r}{17}$

$2rR = AC(2R-r)$

$2rR = \frac{32r}{17}(2R-r) \quad |\cdot 17$

$(2R-r)^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

Из прям. треуг: $\frac{289}{4} + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$

$\frac{289}{4} = 4R^2 - 4rR$

$34rR = 64rR - 32r^2 \quad |:2r$

$17R = 32R - 16r$

$15R = 16r$; $r = \frac{15}{16}R$

$-4rR = -4\cdot\frac{15}{16}R^2 = -\frac{15}{4}R^2$

$\frac{289}{4} = 4R^2 - \frac{15}{4}R^2$

$\frac{289}{4} = \frac{16R^2 - 15R^2}{4}$

$R = 17$

$r = \frac{17\cdot 15}{16} = \frac{255}{16}$

$17 \cdot 15 = 255$

$\sqrt{900+256}$

$AC = \frac{32\cdot 255}{17\cdot 16} = \frac{32\cdot 17\cdot 15}{17\cdot 16} = 30$

$272 - 255 = 17$

$BK = \frac{17^2}{8\cdot R} = \frac{17^2}{8\cdot 17} = \frac{17}{8}$

$2R - 2r = 34 - \frac{255}{8} = \frac{289-255}{8}$

$30^2 + 16^2 = 34^2$

$900 + 256 = 1156$

$34 \cdot 34 = 1156$

$15 + 8 = 17$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$ Тогда $x^2-10x<0$; $|x^2-10x|=\underbrace{10x-x^2=t}$

$10x-x^2+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$ $\qquad \log_3 4<$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$\boxed{\log_3 t=a;\ t=3^a}$

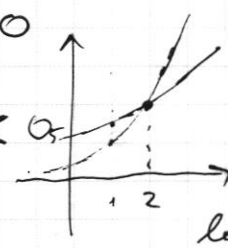
$5^{\log_3 t}=a$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a-\left(\frac{3}{5}\right)^2<0$

$\log_3 t=\log_5 a$

$\left(\frac{3}{5}-1\right)(a-2)<0$

$t=3^{\log_5 a}$



$3^{\log_3 4}$

$3^b+4^b \geq$

$\log_5 a=b$

$a=5^b$

$3^{\log_5 a}+3^{\log_5 a\cdot\log_3 4} \geq a$

$a^x+a^y-a^z \geq 0$

$3^{\log_5 a}+4^{\log_5 a} \geq a$

$3^b+4^b \geq 5^b$

$3^b+4^b=5^b$

$3^b=5^{\log_5 3^b}$

$3^b=5^{\log_5 3^b}=5^{b\log_5 3}$

$5^{b\log_5 3}+5^{b\log_4 3} \geq 5^b$

$k,l<1$

$a\leq 2$

$3^a+3^{a\log_3 4} \geq 5^a$

$1^a \geq 5^a \quad |:5^a$

$\left(\frac{3}{5}\right)^1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a-\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\left(\frac{3}{5}-1\right)(a-2)$

$3^a+4^a \geq 5^a \quad |:5^a>0$

Пусть $a<2$: $\left(\frac{3}{5}\right)^a<\frac{9}{25}$

$\frac{9}{25}+\frac{16}{25}<1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a \geq 1$

$\left(\frac{4}{5}\right)^a<\frac{16}{25}$

$a>2$: $\left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\log_3 t \le 2$

$\log_3 t - \log_3 9 \le 0$

$(3-1)(t-9) \le 0$

$t \le 9$

$2^5 \cdot 2^4 = 2^9$

$rR = AC(R-r)$; $AC = \frac{32}{15}$

$rR = \frac{32}{17} rR - \frac{32}{17}$

$\frac{15}{17} rR = \frac{32}{17}$

$rR = \frac{32}{15}$

$r = \frac{32}{15R}$

$10x - x^2 \ge 0$

$x(10-x) > 0$

0 ; 10

$10x - x^2 \le 9$

$-x^2 + 10x - 9 \le 0$

$x^2 - 10x + 9 \ge 0$

$D = 100 - 36 = 64$

$x = 9; 1$

$f(x) = f(y) + f(\frac{1}{y})$

0 ; 1 ; 9 ; 10 ; x

$(0;1] \cup [9;10)$

$\frac{32}{15} = \frac{16R^2 - 289}{16}$

$32 \cdot 16 = 15 \cdot 16R^2 - 289 \cdot 15$

$15 \cdot 16R^2 = 32 \cdot 16 + 289 \cdot 15$

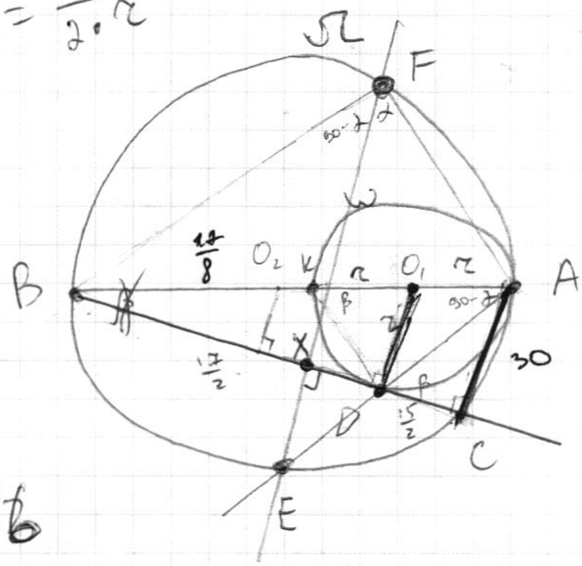
$R^2 = \frac{32}{15} + \frac{289}{16} = 512 +$

$R = \frac{AC}{2\sin\gamma}$; $\sin\gamma = \frac{r}{2R - r}$

$R = \frac{AC(2R-r)}{2r}$, $R = \frac{AC(R-r)}{r}$ 9;1

$\tan\beta = \frac{2AC}{15} = \frac{64r}{255}$

$\frac{AD}{DK} = \frac{64r}{255}$; 10.



r-? R-? $\angle AFE$-? S_{AEF}? d-? 443

$AD^2 = BK \cdot 2R$

$\frac{r}{AC} = \frac{17}{32}$

$\frac{289}{4} = BK \cdot 2R$

$BK + 2r = 2R$

$AC^2 + 16^2 = 4R^2$

$BC = 16$

$\frac{17}{2} + \frac{15}{2} = \frac{32}{2}$

$273 \times 273 = 74529$

74529

$289 - 16 = 273$

$$\begin{cases} 32r = 17AC \\ 8 \cdot BK \cdot R = 289 \\ BK + 2r = 2R \\ AC^2 + 256 = 4R^2 \end{cases}$$

$AC = \frac{32r}{17}$

$BK = \frac{289}{8R}$

$\frac{289}{8R} - 2R = 2r$

$\frac{1024r^2}{289} + 256 = \frac{4 \cdot 74529}{256r^2}$

$289 \cdot 5 = 1445$

$1445 - 272 = 1173$

$289 - 225 = 64$

$272 - 255 = 17$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)