МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Решение:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17}\\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{-\frac{1}{17}}{\sin(2\alpha+2\beta)} = \frac{-\frac{1}{17}}{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta\\ \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases} \Leftrightarrow \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \,|\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$(3x+y)^2 - (3x+y)\cdot 9\cdot 2 + 9^2$

$6xy -$

$\pm\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \pm 4\cos 2\alpha - 1$

$1-\cos^2 2\alpha = 16\cos^2 2\alpha \pm 8\cos 2\alpha + 1$

$17\cos^2 2\alpha \pm 8\cos 2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos 2\alpha = \frac{8}{17}\\ \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}\\ \cos 2\alpha = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \pm\frac{15}{17}\\ \cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17}\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2\alpha = 0\\ \sin 2\alpha = -1 \text{(если подставить 0 в } \sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \pm\frac{15}{8} \Rightarrow\\ \begin{cases}\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 0\\ \sin 2\alpha = -1\end{cases}\end{array}\right.$

т.к. $tg 2\alpha$ существует

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \pm\frac{15}{8}\\ \begin{cases}\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt2}{2}\\ \sin 2\alpha = -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\pm\frac{15}{8}(1-tg^2\alpha) = 2tg\alpha \;(1)\\ (2)\begin{cases}\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt2}{2}\\ \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\frac{\sqrt2}{2}\\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -1\end{cases}\end{array}\right.$

(2) Т.к. $2\sin\alpha\cos\alpha = -1 < 0$, то $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ разных знаков $\Rightarrow tg\alpha < 0$; $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm 1$ $\Big\}\; tg\alpha = -1$

(1) $\pm 15(1-tg^2\alpha) = 16 tg\alpha$

$15tg^2\alpha \pm 16tg\alpha - 15 = 0 \Leftrightarrow tg\alpha = \frac{\pm 16 \pm 34}{15} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg\alpha = \pm\frac{5}{3}\\ tg\alpha = \pm\frac{3}{5}\end{array}\right.$

$D = 256 + 4\cdot 225 = 1156 = 34^2$

$\Rightarrow tg\alpha \in \left\{-1; \pm\frac{5}{3}; \pm\frac{3}{5}\right\}$

Ответ: $-\frac{5}{3}$; -1; $-\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{3}$.

№5

Решение:

$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$

$2f(1)=f(1)$

$f(1)=0$

Т.к. $f(p)=[p/4]$, то $f(2)=0$; $f(3)=0$. Далее мы будем находить $f(x)$ при помощи разложения x на меньшие делители, либо с помощью $f(p)=[p/4]$

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$; $f(5)=1$; $f(6)=f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)=0$; $f(7)=1$; $f(8)=f(4\cdot 2)=f(4)+f(2)=0$; $f(9)=f(3\cdot 3)=0$; $f(10)=f(2\cdot 5)=0+1=1$; $f(11)=2$; $f(12)=f(4)+f(3)=0$; $f(13)=3$; $f(14)=f(2\cdot 7)=0+1=1$; $f(15)=f(3\cdot 5)=0+1=1$; $f(16)=f(8\cdot 2)=0$; $f(17)=4$; $f(18)=f(2\cdot 9)=0$; $f(19)=4$; $f(20)=f(4\cdot 5)=1$; $f(21)=f(7\cdot 3)=1$; $f(22)=f(11\cdot 2)=2$; $f(23)=5$; $f(24)=f(12\cdot 2)=0$; $f(25)=f(5\cdot 5)=2$; $f(26)=f(2\cdot 13)=3$; $f(27)=f(9\cdot 3)=0$; $f(28)=f(2\cdot 14)=1$

Т.к. $f(x/y)\overset{<}{}0 \Rightarrow f(x)=f(x/y\cdot y)=f(x/y)+f(y) < f(y)$

$f(x/y)<0$, $x/y\in[\frac{1}{7};7] \Rightarrow$ $x/y\notin\mathbb{Z}$, т.к. $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; ... $f(7)\geq 0$

Т.к. $f(x)<f(y)$

$f(x)\geq 0$ из вышеописанного перебора целых чисел } $f(y)>0$. Под это подходят 16 целых $y\in[4;28]$: 1) $y=5$; 2) $y=7$; 3) $y=10$; 4) $y=11$; 5) $y=13$; 6) $y=14$; 7) $y=15$; 8) $y=17$; 9) $y=19$; 10) $y=20$; 11) $y=21$; 12) $y=22$; 13) $y=23$; 14) $y=25$; 15) $y=26$; 16) $y=28$

Заметим, что $f(x)=5$ при одном $x\in[4;28]$; $f(x)=4$ при двух $x\in[4;28]$; $f(x)=3$ при двух $x\in[4;28]$; $f(x)=2$ при трёх $x\in[4;28]$; $f(x)=1$ при восьми $x\in[4;28]$; $f(x)=0$ при девяти $x\in[4;28]$; $f(x)<0$ или $f(x)>5$ ни при каких $x\in[4;28]$, $x\in\mathbb{Z}$

1) $y=5$: $f(y)=1 \Rightarrow f(x)\overset{0=}{<}f(y)=0$. Если $x/y\in\mathbb{Z}$, то $x\vdots 5 \Rightarrow f(x)>0$. Противоречие $\Rightarrow$ все $f(x)=0$ подходят, т.е. x принимает 9 знач.

2) $y=7$: $f(y)=1 \Rightarrow f(x)\overset{0=}{<}f(y)=0$. Аналогично 1), все $f(x)=0$ подходят $\Rightarrow x$ приним. 9 знач.

3) $y=10$: $f(y)=1 \Rightarrow f(x)=0$, т.к. $f(x)<f(y)$. Если $x\vdots y$, $f(y)>0$, то $f(x)=f(k\cdot y)=f(k)+f(y)\overset{\geq 0}{}\geq f(y) \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

=> все $f(x)=0$ подходят => у x приним. 8 знач.

Аналогично для всех $y: f(y)=1$

А и $y=11: f(y)=2 \Rightarrow f(x)\in\{0;1\}$. Т.к. при $x/y\in\mathbb{Z}$, $f(x)\geq f(y)$ по п.3), то противоречие

Все $x: f(x)\in\{0;1\}$ подходят.

Аналогично для остальных y. Таким образом для 8 $y: f(y)=1$ подходят 8 $x: f(x)=0$

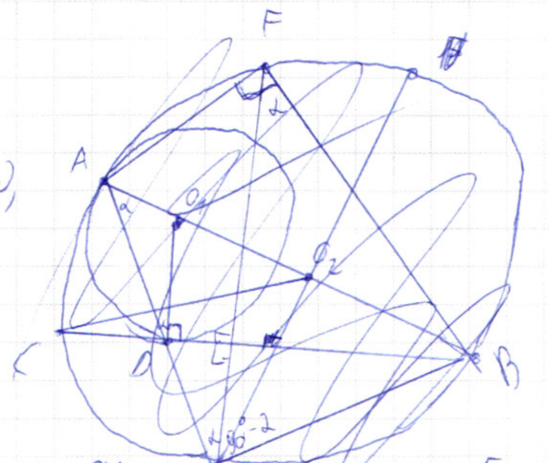
Для 3 $y: f(y)=2$ подходят 8 $x: f(x)=0$ и 8 $x: f(x)=1$. Для 2 $y: f(y)=3$ подходят $8+8+3=20$ $x: f(x)\in\{0;1;2\}$. Для 2 $y: f(y)=4$. Подходят $8+8+3+2=22$ $x: f(x)<4$

Для 1 $y: f(y)=5$ подходят $9+8+3+2+2=24$ $x: f(x)<5$.

Суммарно получаем $8\cdot 9+3\cdot 17+2\cdot 20+2\cdot 22+1\cdot 24=231$ пара

Ответ: 231 пара

№4



1) $A\in O_1O_2$ по св-ву касающ. окр. (O_1-центр ω, O_2-центр Ω)

2) $O_1D\perp BC$ по св-ву касат. $\Rightarrow O_1D\parallel EF$

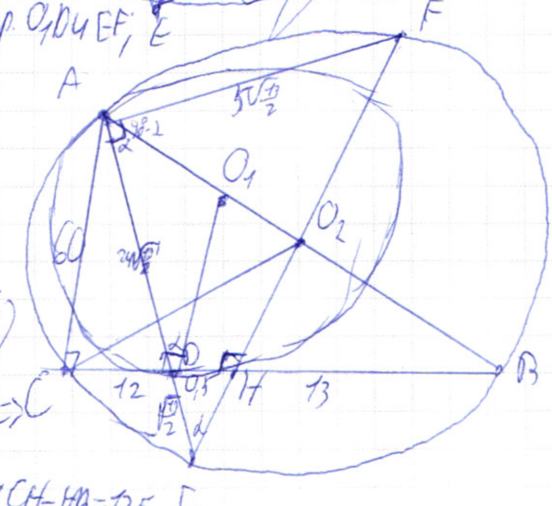
3) Пусть $\angle DAO_1=\alpha$, тогда $\angle ADO_1=\alpha$ по св-ву р/б $\triangle AO_1D$; $\angle AEF=\alpha=\angle ADO_1$ по св-ву паралл. пр. O_1D и EF;

$\angle AEO_2=\alpha$ по св-ву р/б $\triangle AO_2E$

4) $\angle AEO_2 \overset{=\alpha}{=} \angle AEF \Rightarrow O_2\in EF \Rightarrow \angle EAF=90^\circ$ как опир. на диаметр EF

5) $\triangle CO_2B$ - р/б, O_2E - высота $\Rightarrow CH=HB=\frac{BC}{2}$ ($H=EF\cap BC$)

$BC=CD+DB=25$ $\Rightarrow$ C



$\Rightarrow CH=HB=12,5$

6) $DH = CH - CD = 12{,}5 - 12 = 0{,}5$

7) $\angle ACB = 90^\circ$ как опир. на диаметр AB, $\angle CDA = \angle EDB$ как вертикальные, $\angle EHD = 90^\circ$ по усл. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle EHD$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DH} = \frac{12}{0{,}5} = 24 \Rightarrow AD = 24DE$

8) По св-ву хорд в окр. Ω, $AD \cdot DE = BD \cdot DC = 12 \cdot 13 = 156$

$24DE \cdot DE = 156$

$24DE^2 = 156$

$2DE^2 = 13$

$DE = \sqrt{\frac{13}{2}} \Rightarrow AD = 24\sqrt{\frac{13}{2}}$

9) По т. Пифагора в $\triangle ACD$, $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{\frac{576 \cdot 13}{2} - 144} = \sqrt{288 \cdot 13 - 144} = \sqrt{144 \cdot 25} = 60$

10) $\left.\begin{array}{l}\angle AEF = \angle DAC \text{ из подобия } \triangle ACB \text{ и } \triangle EHD \\ \angle EAF = \angle ACD = 90^\circ\end{array}\right\} \triangle AEF \sim \triangle CAD$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{EA}{AF} = \frac{60}{12} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow AF = \frac{EA}{5} = \frac{ED + DA}{5} = \frac{25\sqrt{\frac{13}{2}}}{5} = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$

11) ~~$\angle AFE = \operatorname{arctg}$~~ $\operatorname{tg}\angle AFE = \frac{EA}{AF} = \frac{25\sqrt{\frac{13}{2}}}{5\sqrt{\frac{13}{2}}} = 5 \Rightarrow \angle AFE = \operatorname{arctg} 5$

12) $S_{\triangle AEF} = \frac{AE \cdot AF}{2}$, т.к. он п/уг $\Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{5\sqrt{\frac{13}{2}} \cdot 25\sqrt{\frac{13}{2}}}{2} = \frac{125 \cdot 13}{4} = \frac{1625}{4} = 406{,}25$

13) $EF = \sqrt{AE^2 + AF^2}$ по т. Пифагора в $\triangle AEF$; $EF = \sqrt{625 \cdot \frac{13}{2} + 25 \cdot \frac{13}{2}} = \sqrt{650 \cdot \frac{13}{2}} = \sqrt{325 \cdot 13} = \sqrt{5^2 \cdot 13^2} =$

$= 65$; $O_2E = R_\Omega = \frac{EF}{2} = 32{,}5$

14) $\triangle DAO_1 \sim \triangle EAO_2$ по 2 углам: $\angle EAO_2$ - общий, $\angle ADO_1 = \angle AEO_2 = \alpha \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{O_1D}{O_2E} =$

$= \frac{24\sqrt{\frac{13}{2}}}{25\sqrt{\frac{13}{2}}} = \frac{24}{25} \Rightarrow AD = \frac{24 AE}{25} = \frac{24 \cdot 32{,}5}{25} = \frac{12 \cdot 65}{25} = \frac{156}{5} = 31{,}2 = R_\omega$

Ответ: $R_\Omega = 32{,}5$; $R_\omega = 31{,}2$; $\angle AFE = \operatorname{arctg} 5$; $S_{\triangle AEF} = 406{,}25$.

№2

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6 \\ y - 6x \geq 0 \\ 9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 12xy + 36x^2 = (x-6)(y-1) \\ y \geq 6x \\ (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$

$((3x-3) - (y-6))^2 = (3x-3)^2 - 6(x-1)(y-6) + (y-6)^2 = 90 - (6y^2 - 42xy + 216x^2)$

$(3x - y + 3)^2 = 90$ ~~$+ 6y^2 - 42xy + 216x^2$~~ $6(y-6x)^2$

~~$(3x + y - 9)^2 - (6y - 36x)^2 = 90 \Leftrightarrow (4y - 33x - 9)(39x - 5y - 9) = 90$~~ $(3x - y + 3)^2 + 6(y - 6x)^2 = (3x-3)^2 +$

$+ (y-6)^2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Начертим графики функций $\frac{8-6x}{3x-2}$ и $18x^2-51x+28$ на промеж. $(\frac{2}{3};2]$

$g(x)=\frac{8-6x}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$, $g(2)=-1$ при $x\to\frac{2}{3}\ (x>\frac{2}{3})$, $g(x)\to+\infty$

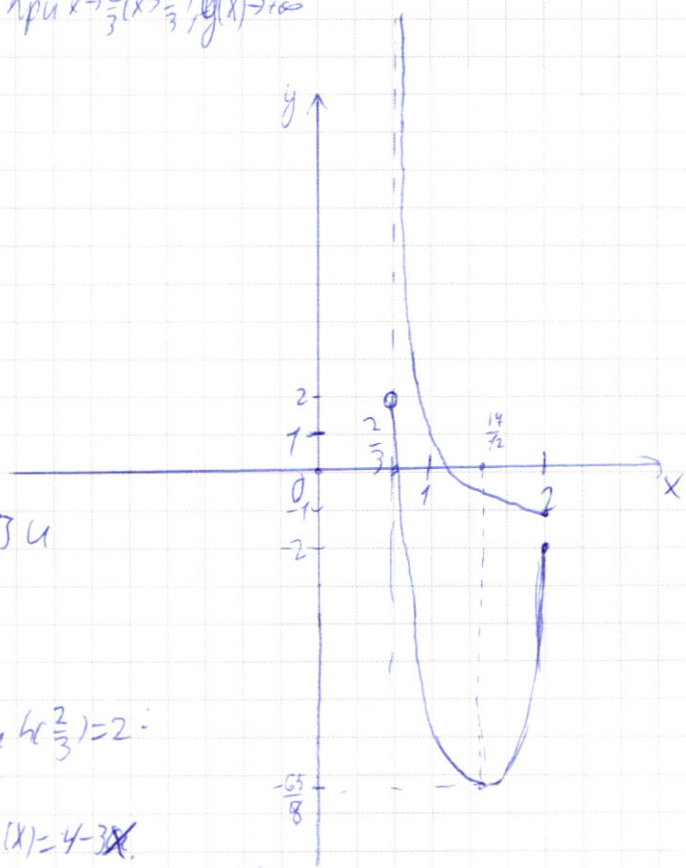
$f(x)=18x^2-51x+28$

$x_b=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$

$f(x_b)=18\cdot(\frac{17}{12})^2-51\cdot\frac{17}{12}+28=-\frac{65}{8}$

$f(\frac{2}{3})=2$

$f(2)=-2$



Заметим, что $h(x)=ax+b$ лежит между ними, когда $h(2)\in[-2;-1]$ и $h(\frac{2}{3})\geq 2$ $\Rightarrow$ $2a+b\in[-2;-1]$

$\frac{2}{3}a+b\geq 2$

Рассмотрим функцию $h(x)$, где $h(2)=-2$ и $h(\frac{2}{3})=2$:

$\begin{cases}2a+b=-2\\ \frac{2}{3}a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}a=-4\\ 2a+b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=4\end{cases}$. $h(x)=4-3x$.

Найдём т. пересеч. с $g(x)=-2+\frac{4}{3x-2}$: $4-3x=-2+\frac{4}{3x-2}$

$6-3x=\frac{4}{3x-2}$

$(6-3x)(3x-2)=4$

$24x-12-9x^2=4$

$9x^2-24x+16=0$

$(3x-4)^2=0$

$x=\frac{4}{3}$ – 1 т. пересеч. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~прямая не~~ $h(x)$ не пересек. $g(x)$, $h(2)<g(2)$ $\Rightarrow h(x)\leq g(x)$ на $(\frac{2}{3};2)$

В общем случае $h(x)=ax+b=g(x)$: $ax+b=-2+\frac{4}{3x-2}$

$ax+b+2=\frac{4}{3x-2}$

$3ax^2+(3b+6-2a)x-2b-8=0$ имеет не более 1 корня $\Rightarrow D\leq 0\Rightarrow$

$$=> 9b^2+36+4a^2-12ab-24a+36b+24ab+96a = 9b^2+36+4a^2+12ab+72a+36b =$$

$$= \begin{cases} (3b+6+2a)^2+48a \le 0 \\ 2a+b \in [-2;-1] \\ \frac{2}{3}a+b \ge 2 \end{cases} <=> \begin{cases} (3b+6+2a)^2+48a \le 0 \\ 2a+b \le -1 \\ 2a+b \ge -2 \\ \frac{2}{3}a+b \ge 2 \end{cases} <=> \begin{cases} (3b+6+2a)^2+48a \le 0 \\ -\frac{4}{3}a \ge 3 \; (1) \\ 2a+b \ge -2 \; (2) \\ \frac{2}{3}a+b \ge 2 \; (3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1): a \le -\frac{9}{4} \\ (2): 2a+b \ge -2 \end{array}\right\} b \ge \frac{5}{4}$$

$(3) \cancel{\frac{2}{3}a}$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \Rightarrow y^2-12x+36=(x-1)(y-6)$ $\quad y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$\begin{cases} 36x^2-13xy+6x-y+6+y^2=0 \\ 36x^2+4y^2-72x-48y=180 \end{cases}$

$90+6(y^2-12xy+36x^2)=(3x-3+y-6)^2$

$3y^2-78x-47y+13xy-6=180$

$90+6y^2-72xy+216x^2=(3x+y-9)^2$

288, 576, $\frac{13}{2}$

144 $\quad$ $288\cdot13-144$ $\quad$ $144\cdot25$ $\quad$ $12\cdot5$

$90+6y^2-72xy+216x^2=9x^2+y^2+81+6xy-54x-18y$

$9+5y^2-78xy-207x^2$

$f(x/y)<0$

$f(y)\in[4;28]$ $\quad$ $x=\frac{18\pm\sqrt{324-1620-36y^2}}{}$ $\quad$ 18 · 18 = 144, 18 → 324

$f(x)=<f(y)$

$\sqrt{\frac{xz^2}{16}+\frac{ty^2}{16}}=\frac{\sqrt{xz^2+ty^2}}{4}$

$f(x/y)<0$

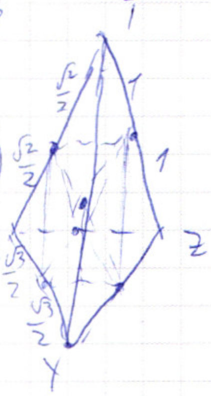
$x=24$ $\quad$ $f(x)=f(x/y)+f(y)$

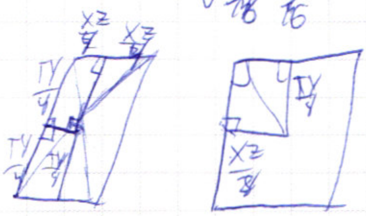
$y\neq9$

$x=26$ $\quad$ $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x$ $\quad$ $f(x)<f(y)$

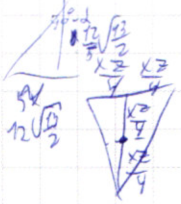
$y\neq3$

$144\cdot\frac{13}{2}=72\cdot13\cdot\frac{6}{5}$ $\quad$ $72\cdot6\cdot13$





$\sqrt{3}-xz$

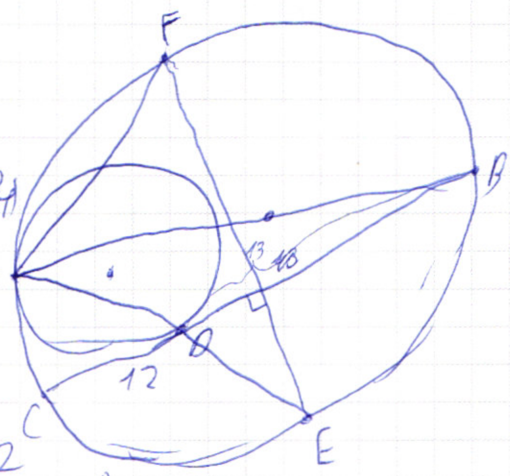


$f(1\cdot1)=f(1)+f(1)$

$f(1)=2f(1)$

$f(1)=0$

$f(2)=2$



125 · 13 = 375, 125 → 1625

$f(2x)=f(x)$

$f(3x)=f(x)$

$\frac{13}{2}25\cdot5\cdot\frac{1}{2}$ $\quad$ $-2+\frac{4}{3x-2}$ $\quad$ $125\cdot13$

$\frac{125\cdot13}{4}$ $\quad$ $\frac{1625}{4}=406{,}25$

$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq18x^2-51x+28$

$f(9)=0$ $\quad$ $f(4)=0$ $\quad$ $f(6)=0$ $\quad$ $f(10)=1$ $\quad$ $f(8)=0$ $\quad$ $f(12)=0$ $\quad$ $f(16)=0$ $\quad$ $f(14)=1$

$f(15)=1$ $\quad$ $f(18)=?$

$f(3)=3$ $\quad$ $f(6)=6$

$f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$

$f(23)=5$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(24)=0$

$f(25)=2$

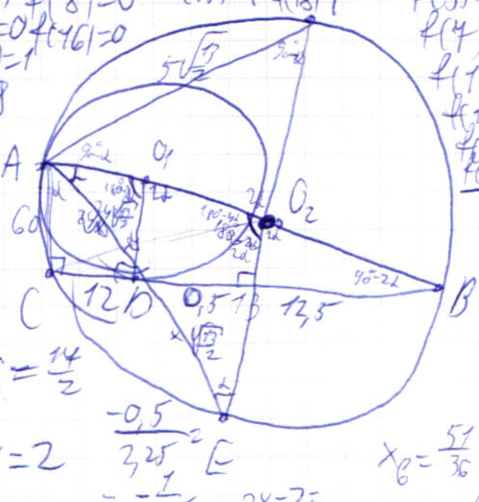
$f(26)=3$

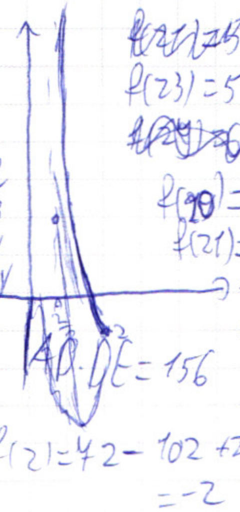
$\angle AFE=\operatorname{arctg}5$ $\quad$ $12\cdot65$ $\quad$ $\left[-\frac{65}{8};2\right)$

$[-1;+\infty)$

$2x^2=156$

$x=\sqrt{\frac{13}{2}}$





$AD\cdot DE=156$

$f(2)=42-102+28=$

$=-2$

$625\cdot\frac{13}{2}+25\cdot\frac{13}{2}=$ $\quad$ $18x^2-51x+28$

$=650\cdot\frac{13}{2}$

$123\cdot63$

$\frac{17}{12}\cdot6=\frac{17}{2}$

$\frac{4}{9}\cdot18=8$

$8-34+28=2$

$\frac{-0{,}5}{3{,}25}=-\frac{1}{4{,}5}$

$x_B=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$

$2+51+40+144+24$ $\quad$ $\frac{17}{4}\cdot\frac{2}{3}=34$

$\frac{3x-2}{}=\frac{14}{4}\cdot3$ $\quad$ $\frac{17}{4}-2=\frac{9}{4}$

$f(x_B)=18\cdot\frac{289}{144}-51\cdot\frac{17}{12}+28=$

$325\cdot13\cdot13=160+68+3=228$ $\quad$ $36x-51$

$x=\frac{51}{36}\in\left(\frac{2}{3};2\right]$

$325\cdot13=25^2\cdot13^2$

$=-36\frac{1}{8}+28=-8\frac{1}{8}=-\frac{65}{8}=-\frac{289}{8}+28=$

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \cancel{\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\cos 2\alpha \sin 4\beta}$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}};\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$|\sin 2\beta| = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm (4-8\sin^2\alpha) = -1 \,|: \cos^2\alpha$

$\cancel{2tg\alpha \pm \left(\frac{4}{\sin^2\alpha}-8\right) = -\frac{1}{\sin^2\alpha}}$

$\cancel{2tg\alpha \pm \left(\frac{4}{\cos^2\alpha}-8tg^2\alpha\right) = -\frac{1}{\cos^2\alpha}}$

$x = \frac{18\pm\sqrt{\cancel{10}}}{}$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = 4\cos 2\alpha - 1\\ \sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -4\cos 2\alpha - 1\end{array}\right.$

$1-\cos^2 2\alpha = 16\cos^2 2\alpha \pm 8\cos 2\alpha + 1$

$17\cos^2 2\alpha \pm 8\cos 2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17}\\ \cos 2\alpha = 0 \text{ — невозможно}\end{array}\right.$

$\sin 2\alpha = \pm\frac{15}{17}$

$\sqrt{\frac{289-64}{289}} = \frac{32}{17}-1$

$\sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$

$\sqrt{xy-6x-y+6} = \sqrt{x(y-6)-(y-6)} = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$(9x^2-18x+9)+(y^2-12y+36) = 90$

$(3x-3)^2+(y-6)^2 = 90$

$90-6(y^2-12xy+36x^2) =$

$= 30(3x-3-y+6)^2 =$ $4\cdot 17^2$

$tg 2\alpha = \pm\frac{15}{8}$

$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha -}$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$tg(2\cdot 60°) = \frac{2\cdot\sqrt3}{1-3} = -\sqrt3$

$tg(2\cdot 30°) = \frac{2tg 30°}{1-tg^2 30°} = \frac{\frac{2}{\sqrt3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt3$

$1156 \,|\, 2$; $578 \,|\, 2$; 289

$\pm 15(1-tg^2\alpha) = 16\, tg\alpha$

$\left[\begin{array}{l}15tg^2\alpha - 16tg\alpha - 15 = 0\\ 15tg^2\alpha + 16tg\alpha - 15 = 0\end{array}\right.$

$tg\alpha = \frac{16\pm\sqrt{256+4\cdot225}}{30} = \frac{16\pm\sqrt{1156}}{30} = \frac{16\pm34}{30} =$

$= \frac{5}{3};\ -\frac{3}{5}$

$\frac{18}{30}$

$1-tg^2\alpha\cdot\left(\pm\frac{15}{8}\right) = 2tg\alpha \,|\cdot 8$

$\cancel{\frac{15}{8}tg^2\alpha + 2tg\alpha - \frac{15}{8}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА