

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 27$, $3 \leq y \leq 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ . Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=2$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

1) $AD \geq 0$:

$$3y - 2x \geq 0$$

$$y \geq \frac{2}{3}x$$

2) $(3y - 2x)^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$$4x^2 + (2 - 15y)x + 9y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$D = 81y^2 - 108y + 36 = 9(3y - 2)^2$$

$$x = \frac{15y - 2 \pm 3y - 2}{8} = 3y - 1 \quad x = \frac{15y - 2 - 3y + 6}{8} = \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$$

3) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$$(3x - 3)^2 + (3y - 2)^2 = 25$$

$$(x - 1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$$

4) $\begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ (x - 1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9} \end{cases}$

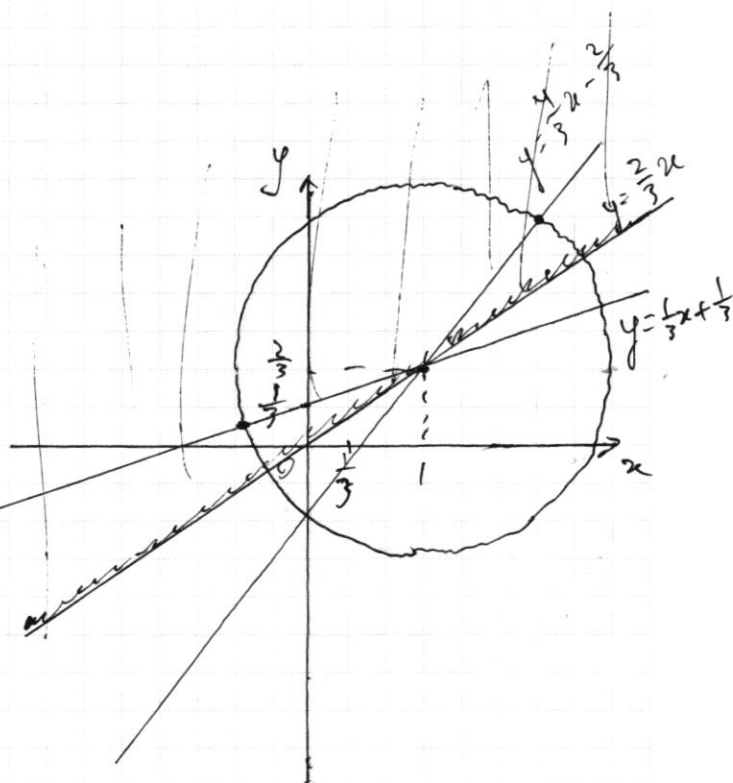
$$x^2 - 2x + 1 + \frac{16}{9}(x^2 + 2x + 1) = \frac{25}{9}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 1$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$$y_1 = -\frac{2}{3} \quad y_2 = 2$$

(x_i, y_i) - корни по $AD \geq 0$



$$x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{9}(x^2 - 2x + 1) = \frac{25}{9}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2,5$$

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 6 = 10$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$$

$$y_1 = \frac{2 + \sqrt{10}}{6} + \frac{1}{3} \quad x_2 - \text{норм по ОДЗ}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2) \left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}, \frac{2 + \sqrt{10}}{6} + \frac{1}{3} \right)$$

№ 5

т.е. $f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow$ каждое число равное ab можно представить в виде произведения простых ~~и составных~~ делителей, а каждой простой делитель в свою очередь будет представлен как $[p/4]$.

Для всех простых чисел $2 \leq p \leq 27$ запишем их состав $[p/4]$

2	3	5	7	11	13	17	19	23
0	0	1	1	2	3	4	4	5

Таким образом после разложения все числа a $3 \leq a \leq 27$ будут равны:

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
0	0	1	0	1	0	0	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1		
22		23		24		25		26		27									
2	5	0	2	3	0														

$$0:10 \quad 1:7 \quad 2:3 \quad 3:2 \quad 4:2 \quad 5:1$$

Если погрешно ввести, что $f(p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}) = i_1 p_1 + \dots + i_n p_n$, тогда простые числа состав. знаменатель будут в сумме со знаком минус, т.е. пусть $i_1 \dots i_n > 0$, тогда $f\left(\frac{1}{p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}}\right) = f(p_1^{-i_1} \dots p_n^{-i_n}) = -i_1 p_1 - \dots - i_n p_n$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Положа для заданной усл. $f(x/y) \leq 0$
~~при этом~~ $f(x)$ должно быть ~~равно~~ $f(y) \Rightarrow$
 меньше
 \Rightarrow Число из всех $\max. f(a) \geq a \leq 27$ ка-во будет
 равно: $10(7+7+2+2+1) + 7(3+2+2+1) + 3(2+2+1) + 2(2+1) + 2 \cdot 1 =$
 $= 229$

Ответ: 229

6. $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \quad x \in (1; 3]$

1) $y = \frac{4x-3}{2x-2}$
 $y = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$

2) $y = 8x^2 - 34x + 30$
 $x_0 = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$
 $y_0 = \frac{17^2}{8} - \frac{17^2}{4} + 30 = -6\frac{1}{8}$
 $y(1) = 4 \quad y(3) = 0$

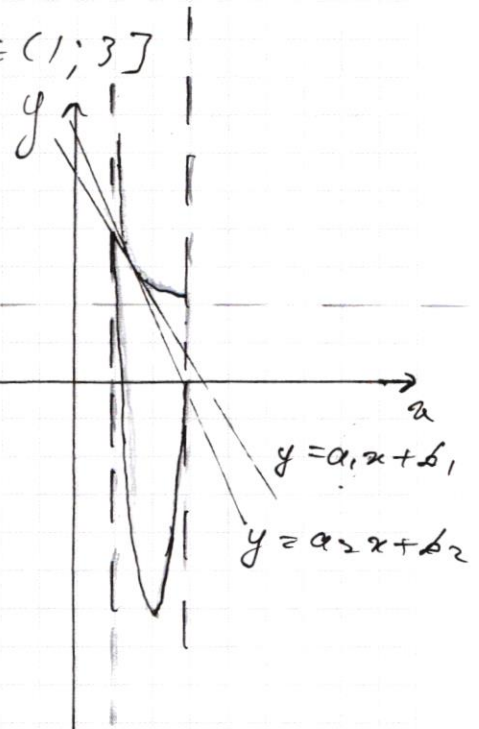
3) π -ли две касательные к $2 + \frac{1}{2(x-1)}$

первая касат. через точку $(1; 4)$ 2-ая через $(3; 0)$.

3-я $y = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$ касат. образом усл. удобн.
 ~~$y = -\frac{1}{2(x-1)^2}$~~ дуги все прямые $y = ax+b$

касат. через точку пересеч. первой и 2-ой
 кас., при этом $a_2 < a < a_1$,

$y = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$
 $y' = -\frac{1}{2(x-1)^2}$



3.1

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

$$y = \frac{-x}{2(x_0-1)^2} + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} + \frac{x_0}{2(x_0-1)^2}$$

$$y = 2 + \frac{1}{x_0-1}$$

$$x_0 = 1,5$$

3.2

$$0 = \frac{x_0 - 3}{2(x_0 - 1)^2} + \frac{1}{2(x_0 - 1)} + 2$$

$$4x_0^2 - 6x_0 = 0$$

$$x_0 = 0 - \text{не ст. кор.} \quad x_0 = \frac{3}{2} = 1,5$$

т.к. $x_0 = x_0 \Rightarrow f$ имеет всего одну кас. $f = ax + b$ удовл. усл.

$$a = \frac{-1}{2(1,5-1)^2} = -2$$

$$y = -2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 6$$

Ответ: $(-2; 6)$

$$\log_4(x^2 + 6x) + 6x \geq (x^2 + 6x)^{\log_4 5} - x^2$$

1) ОДЗ:

$$x^2 + 6x > 0$$

$$\begin{cases} x < -6 \\ x > 0 \end{cases}$$

2) Пусть $f = x^2 + 6x$, тогда

$$\log_4 f + f \geq f^{\log_4 5}$$

$$f^{\log_4 3} + f \geq f^{\log_4 5}$$

Все 3 функции монотонно возрастают \Rightarrow
 \Rightarrow ~~тогда~~ пересечение $f^{\log_4 3} + f$ и $f^{\log_4 5}$ будет
 единственной

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $t = 16$

$$16^{\log_4 3} + 16 = 25$$

$$16^{\log_4 5} = 25$$

3) При $t = 1$ $1^{\log_4 3} + 1 \geq 1^{\log_4 5}$
 $2 \geq 1$

Исходя из п. 2 $t \leq 16$

$$x^2 + 6x - 16 \leq 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 + 16 = 25$$

$$x_1 = -3 + 5 = 2$$

$$x_2 = -3 - 5 = -8$$

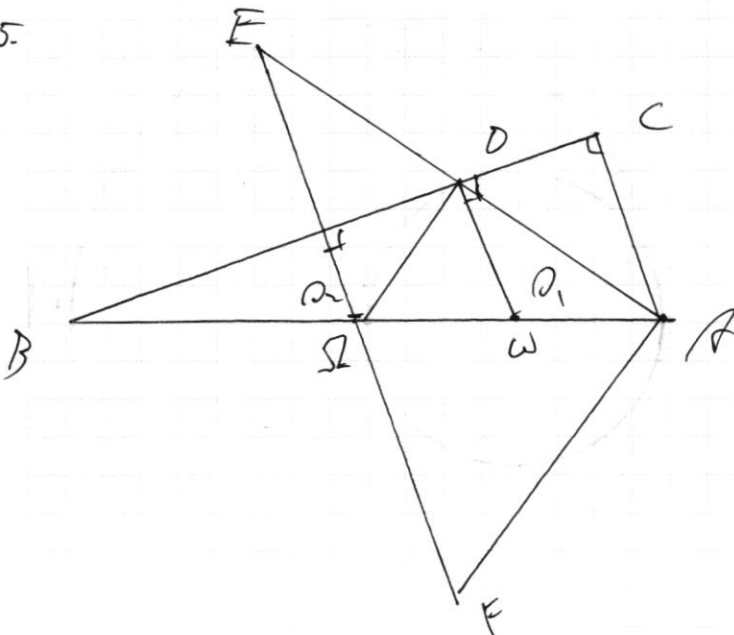
$$x \in [-8; 0]$$

4) После сопоставл. с ОДЗ получаем ответ:

$$x \in [-8; -6)$$

Ответ: $[-8; -6)$

5.



Дано: $CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$

BC - кат. к. ω

$$EF \perp BC$$

н-ми: ω ; Ω ; $\angle AFE$

$$\triangle AFE$$

Р-е

1) м.в. BC-кас и $\angle B(A) \text{ омер на диаг } R \Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{DQ_1}{AC} = \frac{r}{AC} = \frac{BQ_1}{BA} = \frac{DQ - r}{DQ}$$

2) Треуголь $\triangle BQ_1D = \alpha \Rightarrow$ на мер. кас. и м. Рупо.
$$AC^2 + 2,5^2 = AD^2 = 2r^2(1 + \cos \alpha) = 2r^2 \frac{r}{DQ - r}$$

3) Треуголь $DQ = D$ и $r = r$

4) в $\triangle BDD_1$ на м. Рупо $(D-r)^2 = 6,5^2 + r^2$

$$D^2 - 2Dr - 6,5^2 = 0$$

$$D = r + \sqrt{r^2 + 6,5^2}$$

5)
$$\frac{D^2}{(D-r)^2} + 2,5^2 = \frac{2r^2}{D-r}$$

после упрощ.

$$r^2 = \frac{2,5^2 + 6,5^2}{6,5^2 - 2,5^2} \Rightarrow r = \frac{65}{24} \Rightarrow D = \frac{117}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow RQ = \frac{117}{24}$$

Ответ: $\frac{65}{24}$; $\frac{117}{24}$; - ; -

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \quad t = x^2 \text{ев} x$$

$$3 \log_4 t + t \geq 1/t \log_4 5$$

$$-6 \leq x \leq 0$$

$$3 \log_4 t + t \geq t \log_4 5 \quad x \leq -6 \quad x \geq 0$$

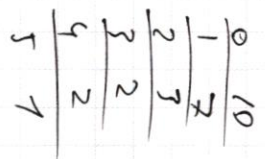
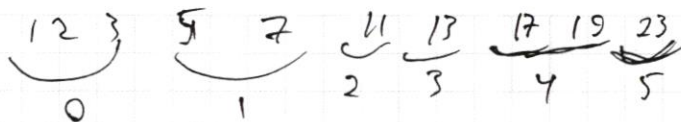
$$3 \log_4 t = t (\log_4 \frac{5}{t} - 1)$$

$$\log_4 t \cdot \log_4 3 = \log_4 t + \log_4 (t \log_4 \frac{5}{t} - 1)$$

$$\log_4 3 = 1 +$$

$$\log_4 3,75 = \log_4 6$$

$$\log_4 t \cdot \log_4 3 = \log_4 t + \log_4 (t \log_4 \frac{5}{t} - 1)$$

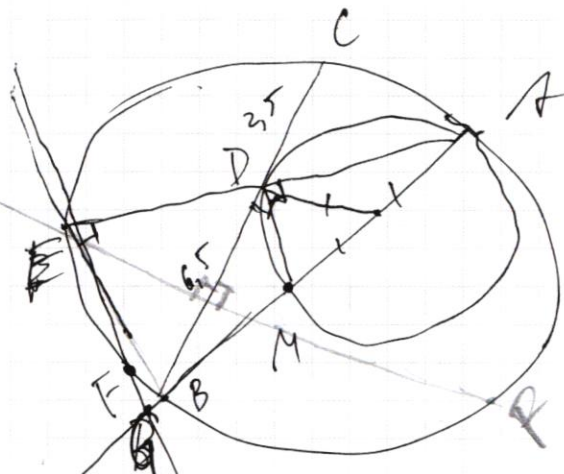


$$10 \cdot 15 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1$$

$$150 + 56 + 15 + 6 + 2$$

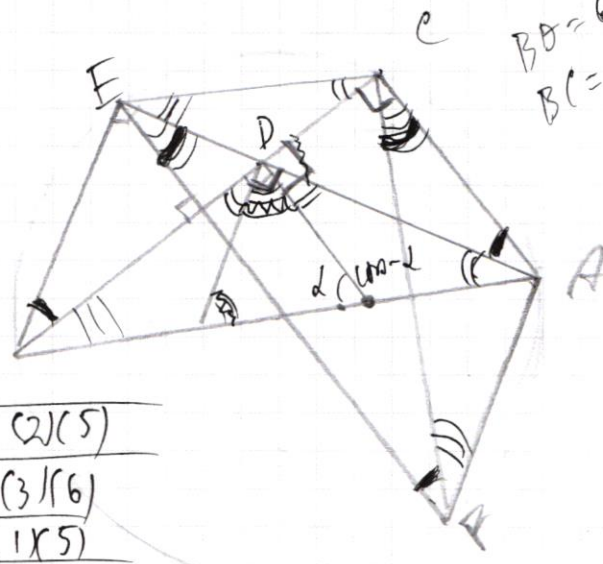
229

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30



$$\frac{6,5}{DA} = \frac{BD}{2,5}$$

$$\frac{65}{4} = DA \cdot BD$$



CO = 2,5
BO = 6,5
BC = 9

числ.

23	5	—
19, 17	4	23
13	3	23, 19, 17
11	2	23, 19, 17, 13
7	1	23, 19, 17, 13, 5-5
5-5	2	23, 19, 7, 13
5	1	23, 19, 17, 13, 5-5

0
2
3-2
4-3 (2)(5)
5-3 (3)(6)
4 (1)(5)
5 (4)(6)

$$2 + 6 + 10 + 18 + 5 + 24 = 65$$

3,4

$$2 + \frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30$$

$$x_0 = \frac{17}{8}$$

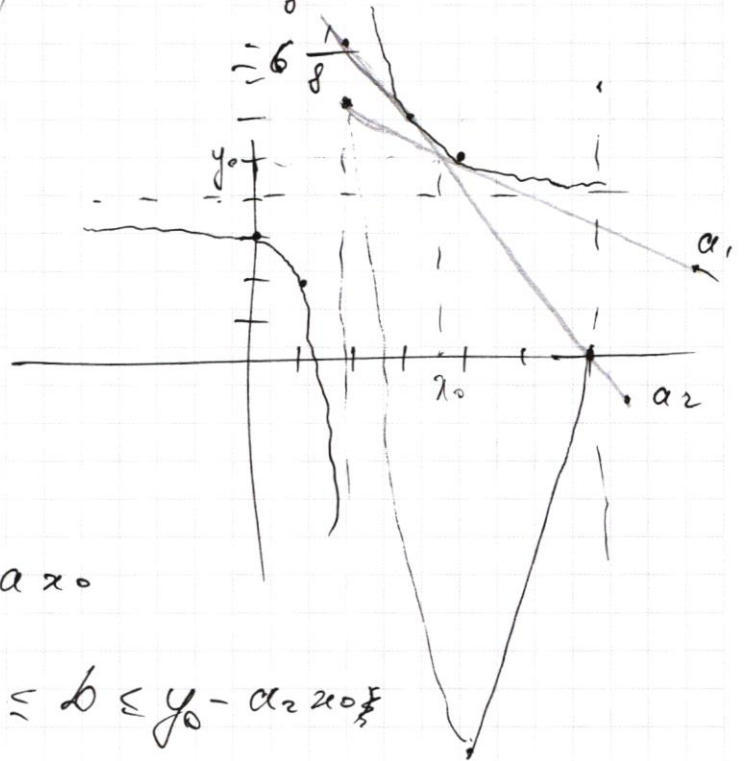
$$\frac{17^2}{8} - \frac{17 \cdot 17}{4} + 30$$

$$-\frac{1}{8} 17^2 + 30$$

$$-\frac{289}{8} + 30$$

$$-36 \frac{1}{8} + 30$$

$$= 6 \frac{1}{8}$$



$$y_0 = ax_0 + b$$

$$b = y_0 - ax_0$$

~~$$a_2 < a < a_1$$~~

$$a_2 < a < a_1$$

$$y_0 - a_1 x_0 \leq b \leq y_0 - a_2 x_0$$

$$a_2 \leq a \leq a_1$$

$$y = ax_0 + b$$

$$0 = \frac{x_0 - 3}{2(x_0 - 1)^2} + \frac{1}{2(x_0 - 1)} + 2$$

$$x_0 - 3 + x_0 - 1 + 4x_0^2 - 8x_0 + 4 = 0$$

$$4x_0^2 - 6x_0 = 0$$

$$x_0 = 0 \quad x_0 = \frac{3}{2}$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)$$

$$y = \frac{1 \cdot x}{2(x_0 - 1)^2} + 2 + \frac{1}{2(x_0 - 1)} + \frac{2x_0}{2(x_0 - 1)^2}$$

~~$$y = \frac{1}{2(x_0 - 1)^2} + 2 + \frac{1}{2(x_0 - 1)} + \frac{2x_0}{2(x_0 - 1)^2}$$~~

$$2 + \frac{1}{2(x_0 - 1)} + \frac{2x_0}{2(x_0 - 1)^2} - \frac{1}{2(x_0 - 1)^2}$$

$$2 + \frac{1}{x_0 - 1}$$

$$\frac{1}{x_0 - 1} = 2$$

$$x_0 = 1,5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f^{\log_4 3} + b \geq f^{\log_4 5}$$

~~$$f^{\log_4 3} (f^{\log_4 3} - 1) \leq b$$~~

$$\sqrt{3} + 2 \geq \sqrt{5}$$

$$\frac{-\frac{1}{2} \log_2 3}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{-\frac{1}{2} \log_2 5}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sqrt{5} + \sqrt{15} \geq 2\sqrt{3}$$

$$20 + 15 + 20\sqrt{3} \geq 12$$

2

$$b = 16$$

~~$$4^{2 \log_4 3}$$~~

$$2^{\log_2 3} + 16 \geq 2^{\log_2 5}$$

$$9 + 16 \geq$$

$$(D-r)^2 + r^2 + 2(D-r)r \cos \alpha = 2r^2(1 + \cos \alpha)$$

~~$$D^2 - 2Dr + r^2 + r^2 - 2Dr \cos \alpha + 2 + 2 \cos \alpha = 2r^2 + 2r^2 \cos \alpha$$~~

$$D - 2r - 2 \cos \alpha = 0 \quad \cos \alpha = \frac{r}{D-r}$$

$$D - 2r - \frac{2r}{D-r} = 0$$

~~$$\frac{D^2 - 2Dr - 2r^2}{D-r} = 0$$~~

$$\frac{D^2 - rD - 2Dr + 2r^2 - 2r}{D-r} = 0$$

$$\frac{D-r}{D} = \frac{r}{AC}$$

$$D^2 - 3Dr + 2r^2 - 2r = 0$$

$$AC^2 + 2,5^2 = 2r^2(1 + \cos \alpha) \quad D-r = \sqrt{6,5^2 + r^2}$$

$$\frac{(D^2 - 6,5^2)^2}{4} + \frac{2,5(D^2 + 6,5^2)^2}{4D^2} = \frac{(D^2 - 6,5^2)^2 (D^2 + 6,5^2)^2}{2D^2 \cdot 4D^2} =$$

$$\frac{D^2 r^2 + 2,5^2 D^2 - 2 \cdot 2,5^2 D r + 2,5^2 r^2}{2r^2 D^2} = 2r^2 D^2 - 4Dr^3 + 2r^4 + 2r^3 D^2 -$$

$$2,5^2 D^2 - 2,5^2 (D^2 - 6,5^2) + \frac{2,5^2 (D^2 - 6,5^2)^2}{4D^2} - 4r^4 D + 2r^5$$

$$\frac{D-r}{D} = \frac{r}{AC} \quad AC^2 + 2,5^2 = 2r^2 \left(1 + \frac{r}{D-r}\right)$$

$$D-r = \sqrt{6,5^2 + r^2}$$

$$AC^2 = \frac{D^2 r^2}{(6,5^2 + r^2)} + 2,5^2 = 2r^2 \left(\frac{D}{\sqrt{6,5^2 + r^2}}\right)$$

$$D^2 r^2 + 2,5^2 (6,5^2 + r^2) = 2r^2 D \sqrt{6,5^2 + r^2}$$

$$D^2 - 2Dr - 6,5^2 = 0$$

$$D = r^2 + 6,5^2$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{6,5}{2,5} = \frac{ED}{2,5}$$

$$AD = \frac{65}{4} ED$$

$$D = \frac{r + \sqrt{r^2 + 6,5^2}}{2}$$

$$(2r^2 + 6,5^2 + 2r\sqrt{r^2 + 6,5^2}) \cdot r^2 + 2,5^2 (6,5^2) + 2,5^2 r^2 =$$

$$= 2r^2 \cdot (r\sqrt{6,5^2 + r^2} + r^2 + 6,5^2) \quad AE = \frac{69}{4} ED$$

$$6,5^2 \cdot r^2 = 2,5^2 \cdot 6,5^2 + 2,5^2 \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{2,5^2 \cdot 6,5^2}{6,5^2 - 2,5^2} = 4,9$$

$$r = \frac{2,5 - 6,5}{2 \cdot 3} = \frac{65}{24}$$

$$D = \frac{65}{24} = \sqrt{6,5^2 + \frac{65^2}{24^2}}$$

$$D^2 - \frac{65}{12} D + \frac{65^2}{24^2} = 6,5^2 + \frac{65^2}{24^2}$$

$$D^2 =$$

$$D = \frac{65}{24} + \sqrt{\frac{65^2}{24^2} + 6,5^2} =$$

$$\frac{5^2 \cdot 13^2}{2^2 \cdot 12^2} + \frac{13^2}{2^2} = \frac{13^2}{2^2} \left(\frac{5^2 + 12^2}{12^2} \right) = \frac{13^2 \cdot 13^2}{2^2 \cdot 12^2}$$

$$R = \frac{117}{24}$$

$$\frac{169}{24} + \frac{65}{24} = \frac{234}{24} = \frac{117}{12}$$

$$\frac{65}{117 - 65} =$$

$$\frac{65}{234 - 65} = \frac{13 \cdot 5}{169} = \frac{5}{13}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР (заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)