МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

По условию:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot$
$\cdot\cos 2\beta$

Зн., $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\left.\begin{array}{l}\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \text{ (по условию)}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

По условию:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

Рассмотрим 2 случая:

1) $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$3(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha) = 0$

$\cos\alpha+\sin\alpha = 0$ или $\cos\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha = 0$

$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = -\sin\alpha \\ tg\,\alpha \text{ существ.} \\ \text{(по усл.)}\end{array}\right\} \Rightarrow$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{1}{3}\sin\alpha \\ tg\,\alpha \text{ существ.} \\ \text{(по усл.)}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -1$ $\qquad$ $\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3$

2) $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 2 = -1$

$4\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3 = 0$

$4\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

$\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

$(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - 3\sin\alpha) = 0$

$\cos\alpha + \sin\alpha = 0$ или $\cos\alpha - 3\sin\alpha = 0$

$tg\,\alpha = -1$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = 3\sin\alpha \\ tg\,\alpha \text{ существ.} \\ \text{(по усл.)}\end{array}\right\} \Rightarrow$

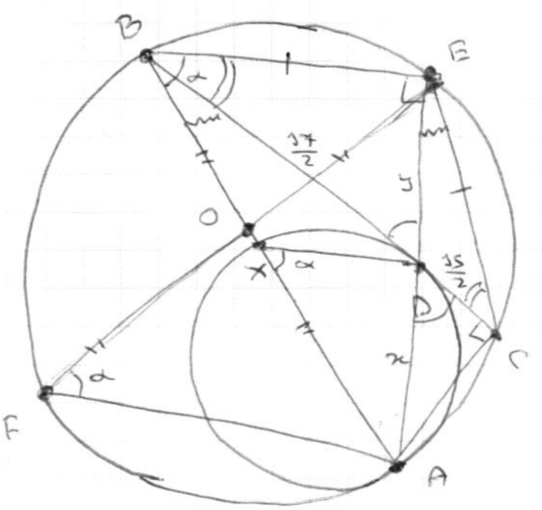
$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3}$

Зн., все возможные значения $tg\,\alpha$ – это -1, 3, $\frac{1}{3}$

Ответ: -1; $\frac{1}{3}$; 3

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4



1) ω касается Ω внутр. образом в точке A, BC – хорда Ω, BC касается ω в т. D, AD пересекает Ω в E (по усл.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ E – середина дуги BC (по лемме Архимеда) $\Rightarrow BE = CE$

2) $\left.\begin{array}{l} EF \perp BC \text{ (по усл.)} \\ BE = CE \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow EF \text{ – сер. перп. к } BC \\ BC \text{ – хорда } \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ EF проходит через O – центр Ω
AB проходит через O, т.к. AB – диаметр Ω (по усл.) $\Rightarrow$
$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AB \cap EF = O \\ O \text{ – центр } \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow OB = OE = OA = OF$

3) Пусть $\angle AFE = \alpha$, то $\angle ABE = \angle AFE = \alpha$ как опир. на одну дугу
$BE = CE$ (по док.) $\Rightarrow \triangle BCE$ – равнобедр. $\Rightarrow \angle EBC = \angle ECB$
$\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = \angle AEC + \angle ECB = \angle DEC + \angle ECD =$
$= \angle EDB$, т.к. он – внешний ($\angle ABC = \angle AEC$, т.к. они опир. на одну дугу) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EDB = \alpha = \angle CDA$, т.к. они – вертик.

4) Пусть $AB \cap \omega = X$, X не совпадает с A, то $\angle AXD = \angle ADC =$
$= \alpha$, т.к. BC – касательная к ω в точке D

5) AB – диаметр Ω (по усл.) $\Rightarrow \angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$

6) Пусть $AD = x$, $DE = y$. По условию $BD = \frac{17}{2}$, $CD = \frac{15}{2}$.
Выпишем теорему косинусов для $\triangle BED$ и $\triangle CED$:

$$\begin{cases} BE^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 + y^2 - 2\cdot\frac{17}{2}\cdot y\cdot\cos\alpha \\ CE^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + y^2 - 2\cdot\frac{15}{2}\cdot y\cdot\cos(180^\circ-\alpha) \end{cases}$$

$BE = CE$ (по док.)

$$\frac{17^2}{4} + y^2 - 17y\cos\alpha = \frac{15^2}{4} + y^2 - 15y(-\cos\alpha)$$

$$\frac{17^2}{4} - \frac{15^2}{4} = (17+15)y\cos\alpha$$

$$\frac{(17-15)(17+15)}{4} = (17+15)y\cos\alpha$$

$$y\cos\alpha = \frac{17-15}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\triangle BDE$ – прямоуг. с $\angle BED = 90^\circ$ (по док.) $\Rightarrow \frac{y}{\frac{17}{2}} = \cos\alpha$
$y = \frac{17}{2}\cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{17}{2}\cos\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$17\cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{17}$$

Т.к. $90^\circ > \alpha > 0^\circ$ (α находится в прямоуг. $\triangle BED$), то
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$

Зн., $\angle AFE = \arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$

7) $\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

8) По т. синусов для $\triangle ABE$:

$\frac{AE}{\sin\alpha} = 2R$, где R - радиус Ω

$R = \frac{AE}{2\sin\alpha}$

$AE = x + y$

$y = \frac{17}{2}\cos\alpha$ (по док.) $\Rightarrow y = \frac{17}{2}\cdot\frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\triangle DCA$ - прямоуг. с $\angle DCA = 90^\circ \Rightarrow \frac{\frac{15}{2}}{x} = \cos\alpha$

$x = \frac{15}{2\cos\alpha} = \frac{15}{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$AE = \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{15\sqrt{17}}{2} = \frac{16\sqrt{17}}{2}$

$R = \frac{\frac{16\sqrt{17}}{2}}{2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{16\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}}{2\cdot4\cdot2} = 17$

9) По т. синусов для $\triangle ADX$:

$\frac{AD}{\sin\alpha} = 2r$, где r - радиус ω

$r = \frac{AD}{2\sin\alpha} = \frac{x}{2\sin\alpha} = \frac{\frac{15\sqrt{17}}{2}}{2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{15\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}}{2\cdot2\cdot4} = \frac{15\cdot17}{16} = 17 - \frac{17}{16} =$

$= 17 - 1 - \frac{1}{16} = 16 - 0{,}0625 = 15{,}9375$

10) EF проходит через O - центр Ω (по док.) $\Rightarrow$ EF - диаметр $\Omega \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow S(\triangle AEF) = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF$

$AF^2 = EF^2 - AE^2$

EF - диаметр $\Omega \Rightarrow EF = 2R = 34$

$AE = \frac{16\sqrt{17}}{2}$ (по док.)

$AF^2 = 34^2 - \frac{16^2\cdot17}{4} = \frac{4\cdot4\cdot17^2 - 16^2\cdot17}{4} = \frac{16\cdot17\cdot17 - 16\cdot16\cdot17}{4} =$

$= \frac{16\cdot17}{4} = 4\cdot17 \Rightarrow$

$AF = 2\sqrt{17}$

$S(\triangle AEF) = \frac{1}{2}\cdot\frac{16\sqrt{17}}{2}\cdot2\sqrt{17} = \frac{32\cdot17}{4} = 8\cdot17 = 136$

Ответ: $r = 15{,}9375$; $R = 17$; $\angle AFE = \arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$; $S(\triangle AEF) =$
$= 136$

№5

Подставим $a = b = 1$ в условие:

$f(1) + f(1) = f(1\cdot1)$

$2f(1) = f(1)$

$f(1) = 0$

Возьмём $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{x}$:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x}) = f(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x})$

$f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x}) = f(1) = 0$

Зн., либо одно из $f(\frac{x}{y})$ и $f(\frac{y}{x})$ меньше 0, а второе больше 0, либо $f(\frac{x}{y}) = f(\frac{y}{x}) = 0$

Пусть $f(\frac{x}{y}) = f(\frac{y}{x}) = 0$, то:

$f(\frac{x}{y}) + f(y) = f(\frac{x}{y} \cdot y)$

$f(y) = f(x)$

Зн., $f(\frac{x}{y}) = f(\frac{y}{x}) = 0$, если $f(y) = f(x)$.

Если $f(x) = f(y)$, то $f(\frac{x}{y}) + f(y) = f(x)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) = 0$

Зн., $f(\frac{x}{y}) = f(\frac{y}{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = f(y)$

Рассмотрим все $f(n)$, $1 \le n \le 25$, $n \in \mathbb{N}$:

$f(1) = 0$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$

$f(12) = f(2) + f(6) = 0$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(2) + f(8) = 0$

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$

$f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$

$f(20) = f(2) + f(10) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$

$f(24) = f(2) + f(12) = 0$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

Всего здесь встречаются:

0: 11 раз

1: 7 раз

2: 3 раз

3: 1 раз

4: 2 раз

5: 1 раз

Пара $(x; y)$, где $f(x) = f(y)$, даёт нам $f(\frac{x}{y}) = f(\frac{y}{x}) = 0$.

Пара $(x; y)$, где $f(x) \ne f(y)$, даёт нам $f(\frac{x}{y}) < 0$ или $f(\frac{y}{x}) < 0$ (только одно).

Посчитаем кол-во пар $(x; y)$ таких, что $f(x) \ne f(y)$. Это и будет искомым ответом (т.к. каждая такая пара даёт ровно одно число $\frac{x}{y}$ или $\frac{y}{x}$ - искомое).

Всего таких пар:

$11 \cdot (7+3+1+2+1) + 7 \cdot (3+1+2+1) + 3 \cdot (1+2+1) + 1 \cdot (2+1) + 2 \cdot 1 = 11 \cdot 14 + 7 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 3 + 2 = 154 + 49 + 12 + 5 = 154 + 49 + 17 = 154 + 66 = 220$

Ответ: 220

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = -45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = -45 \\ x - 12y \ge 0 \\ 2xy - 12y - x + 6 \ge 0 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2-2xy+12y+x-6=0 \\ x^2+36y^2-12x-36y+45=0 \\ x\geq 12y \\ 2xy-12y-x+6\geq 0 \end{cases}$$

$$(x^2-26xy+144y^2+12y+x-6)-(x^2+36y^2-12x-36y+45)=0$$

$$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6-x^2-36y^2+12x+36y-45=0$$

$$108y^2+48y-51+13x-26xy=0$$

$$108y^2+48y-51=13x(2y-1)$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \\ x-12y\geq 0 \\ 2xy-12y-x+6\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+144y^2-26xy+12y+x-6=0 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \\ x\geq 12y \\ 2xy-12y-x+6\geq 0 \end{cases}$$

$$(x^2+144y^2-26xy+12y+x-6)-(x^2+36y^2-12x-36y-45)=0$$

$$108y^2-26xy+48y+13x+39=0$$

$$108y^2+48y+39=13x(2y-1)$$

$2y-1=0$ или $x=\dfrac{108y^2+48y+39}{13(2y-1)}$

$y=\dfrac{1}{2}$

$$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$$

$$\frac{108y^2+48y+39}{26y-13}-12y=\sqrt{x(2y-1)-6(2y-1)}$$

$$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$$

$$x-6=\sqrt{2\cdot x\cdot \tfrac{1}{2}-6-x+6}$$

$$x-6=0$$

$$x=6$$

$$6^2+36\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-12\cdot 6-36\cdot\tfrac{1}{2}=$$

$$=-45\neq 45 \Rightarrow 2y-1\neq 0$$

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $x-6=a$, $2y-1=b$, то:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} a^2+36b^2-12ab=ab \\ a^2+9b^2=90 \\ ab\geq 0 \\ a-6b\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+36b^2-13ab=0 \\ a^2+9b^2=90 \\ ab\geq 0 \\ a-6b\geq 0 \end{cases}$$

$a^2+36b^2-13ab-a^2-9b^2=0-90$

$27b^2-13ab=-90$

$27b^2+90=13ab$

$b=0$ или $a=\dfrac{27b^2+90}{13b}$

~~$27b^2-90=90$~~

~~$-90=0$ - неверно~~

~~$\Rightarrow b\neq 0$~~

$27b^2+9=90$

$90=0$ - неверно $\Rightarrow$

$\Rightarrow b\neq 0$

$$\left(\frac{27b^2+90}{13b}\right)^2+9b^2=90$$

$$\frac{729b^4+8100+4860b^2}{169b^2}+9b^2=90$$

$$\frac{729b^4+8100+4860b^2+1521b^4-15210b^2}{169b^2}=0$$

$$\cancel{\frac{2250b^4-20070b^2+8100}{169b^2}=0}$$

$$\cancel{\frac{225b^4-2007b^2+810}{169b^2}=0}$$

$$\frac{2250b^4-10350b^2+8100}{169b^2}=0$$

$$\frac{225b^4-1035b^2+810}{169b^2}=0$$

$$\frac{225(b^2-1)\left(b^2-\frac{810}{225}\right)}{169b^2}=0$$

$b^2-1=0$ или $b^2-\dfrac{810}{225}=0$

$b^2=1$ $\quad b^2=\dfrac{810}{225}$

$b=\pm 1$ $\quad b=\pm\dfrac{9\sqrt{10}}{15}=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

1) $b=1 \Rightarrow a=\dfrac{27+90}{13}=9$

$y=1 \quad x=15$ – подходит

2) $b=-1 \Rightarrow a=\dfrac{27+90}{-13}=-9$ – не подходит, т.к. $a-6b=-9+6<0$

$y=0 \quad x=-3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $b = \frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow a = \frac{27 \cdot \frac{810}{225} + 90}{13 \cdot \frac{810}{225}} = \frac{3 \cdot \frac{810}{225} + 10}{13 \cdot \frac{90}{225}} = \frac{3 \cdot \frac{81}{225} + 1}{13 \cdot \frac{1}{225}} = \frac{243 + 225}{13} = \frac{468}{13} = 36$

$y = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{5} + 1}{2} = \frac{3\sqrt{10} + 5}{10}$

$x = 42$ – подходит

4) $b = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow a = -36$ – не подходит, т.к. $a - 6b < 0$

Зн., $x = 42$, $y = \frac{3\sqrt{10}+5}{10}$ и $x = 15$, $y = 1$ – все решения

Ответ: $x = 42$, $y = \frac{3\sqrt{10}+5}{10}$; $x = 15$, $y = 1$

0 : 11

1 : 7

2 : 3

3 : 1

4 : 2

5 : 1

$$\frac{11\cdot(25-11)}{\cancel{2}}+\frac{7\cdot(3+1+2+1)}{\cancel{2}}+$$

$$+\frac{3(1+2+1)}{\cancel{2}}+\frac{1\cdot(2+1)}{\cancel{2}}+2\cdot1=$$

$$=11\cdot14+7\cdot7+3\cdot4+3+2=$$

$$=154+49+12+5=154+49+17=$$

$$=154+66=220$$

$14 \times 11 = 154$; $1521 + 729 = 2250$; $27 \times 27 = 729$; $27 \times 90 = 2430$

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$x-6=a$, $2y-1=b$

№6

$$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b\le -32x^2+36x-3 \quad , x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$$

$$\frac{16x-16}{4x-5}=\frac{16x-20+4}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$$

$13 \times 13 \times 9 = 1521$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=90 \\ a-6b=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$$4+\frac{4}{4x-5}\le ax+b\le -32x^2+36x-3$$

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12y-36y=45 \end{cases}$$

$15210 + 4860 = 20070$

$x=a-6$, $2y=b-1$

$x-12y=a-6-6b+6=a-6b$

$$x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6$$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=90 \\ a^2+36b^2-12ab=ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+144y^2-26xy+12y+x-6=0 \\ x^2+36y^2-12\cancel{x}-36y+45=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=90 \\ a^2+36b^2-13ab=0 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{63}{13}\right)^2+9$$

$+45$

-51

$$108y^2-26xy+48y+13x+39=0$$

$+27+24=51$

$$x(26y-13)=108y^2+48y+39$$

$b=1$, $a=9$

$81+36-13\cdot9\cdot1=117-117=0$

$x^2+144y^2-26xy+12y+x-6=0$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$$

$b=1$ $\quad x=15$

$x-6=$

$$90=9^2+3^2$$

$3=15-12=\sqrt{30-12-15+6}=$

$x-6=9$, $6y-3=3$

$6y-3=3b=3$ $\quad =\sqrt{9}$ ✓

$x=15$ $\quad y=1$

$b=1$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\cancel{f(\frac{x}{2y}) + 2f(2\cdot\frac{y}{x}) = f(2\cdot 2\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}) = f(2)}$

$f(1)+f(1)=f(1\cdot 1)$

$2f(1)=f(1)$

$f(1)=0$

$f(\frac{x}{y})+f(\frac{y}{x})=f(\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x})=f(1)=0$

Если $f(\frac{x}{y})\neq f(\frac{y}{x})$, то $f(\frac{x}{y})<0$, $f(\frac{y}{x})>0$ или наоборот.

Если $f(\frac{x}{y})=f(\frac{y}{x})=0$, то:

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=0=f(y)+f(\frac{1}{x})$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=2$

$\cancel{f(2\cdot 2)}=2f(2)$

$f(\frac{x}{y})+f(y)=f(x)$

0

$f(y)=f(x)$

$f(\frac{x}{y})+f(2y)=f(2x)$

$f(2y)=f(2x)$

...

$f(ny)=f(nx)$

$\cancel{n=x:\ f(xy)=f(x^2)=f(x)+f(x)}$

$f(xy)=f(x)+f(y)=2f(x)=$

$=f(x^2)$

$f(y)=f(x) \Rightarrow f(\frac{x}{y})+f(y)=f(x)$

$f(\frac{x}{y})=0$

Если $f(x)=f(y)$, то $f(\frac{x}{y})=f(\frac{y}{x})=0$

Если $f(x)\neq f(y)$, то $f(\frac{x}{y})<0$

или

$f(\frac{y}{x})<0$

(одно из).

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №10

(Нумеровать только чистовики)

$(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 5}\geq 0$

$f(x)=(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 5},$

$f^{3}(x)=0$

$(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}=(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$\cancel{a^{\log_3 3}+e^{\log_3 4}\geq e^{\log_3 5}}$

$\cancel{a^m+a^n\geq a^k}$

$\cancel{a^{\log_3 3}+e^{\log_3 4}-e^{\log_3 5}\geq 0}$

$y_1=\cancel{e^{\log_3 3}+e^{\log_3 4}}$

$y_1'=\cancel{1+\log_3 4\, e^{\log_3\frac{4}{3}}}$

$y_2=\cancel{e^{\log_3 5}}$

$y_2'=\log_3 5\, e^{\log_3\frac{5}{3}}$

$\cancel{1+\log_3 4\, e^{\log_3\frac{4}{3}}}=\log_3$

$1+(10x-x^2)^{\log_3\frac{4}{3}}\geq(10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{3}}$

$1\geq(10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{3}}-(10x-x^2)^{\log_3\frac{4}{3}}$

$y=(10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{3}}-(10x-x^2)^{\log_3\frac{4}{3}}$

$y=a^{\log_3\frac{5}{3}}-e^{\log_3\frac{4}{3}}$

$y'=\log_3\frac{5}{3}\,e^{\log_3\frac{5}{5}}-\log_3\frac{4}{3}\,e^{\log_3\frac{4}{5}}$

$\log_3\frac{5}{3}<0$

$0>\log_3\frac{5}{3}>\log_3\frac{4}{3}$

$\cancel{\log_3}\;0>\log_3\frac{5}{5}>\log_3\frac{4}{5}$

Если $a\geq 1$, то

$1>a^{\log_3\frac{5}{5}}>e^{\log_3\frac{4}{5}}$

$15210 - 4860 = 10350$

$27=1$

$468 : 13 = 36$
-39
78

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+144y^2-26xy+12y+x-6=0 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$(x^2-12x+36)+((6y)^2-2\cdot6y\cdot3+9)=45+9+36$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$t=6y$

$(x-6)^2+(t-3)^2=90$

~~$x\ x\ z\ t$~~

x^2

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

~~$x^2-10x>0$, т.к. $a^{\log_3 4}$ неотр~~

~~$10x+3^{\log_3|x^2-10x|\log_3 4}\geq x^2+3^{\log_3}$~~

$10x-x^2>0$

$10x-x^2\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}-|x^2-10x|^{\log_3 4}$

$10x-x^2\geq 3^{\log_3(10x-x^2)\log_3 5}-(10x-x^2)^{\log_3 4}$

$(10x-x^2)^1\geq(10x-x^2)^{\log_3 5}-(10x-x^2)^{\log_3 4}$

$1\geq(10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{3}}-(10x-x^2)^{\log_3\frac{4}{3}}$

$AB=4=FE$ $AE=\frac{16}{\sqrt{17}}$ $AE^2=\frac{16^2}{17}$

$\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $AF^2=16-\frac{16^2}{17}=\frac{16}{17}$

$y=\frac{17}{2}\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}=\frac{\sqrt{17}}{2}$ $AF=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sqrt{17}}{2}\cdot x=\frac{17-15}{8}$ $S_{AFE}=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot AE=\frac{32}{17}$

$x=\frac{15}{2\sqrt{17}}$ $AB=x+y=\frac{17+15}{2\sqrt{17}}=\frac{32}{2\sqrt{17}}=\frac{16}{\sqrt{17}}$

$r=\frac{x}{2\sin\alpha}=\frac{15\cdot\sqrt{17}}{2\sqrt{17}\cdot2\cdot4}=\frac{15}{16}$

$\cancel{\frac{17^2\cos^2\alpha}{4}}+\frac{17^2}{4}-2\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{17\cos\alpha}{2}\cos\alpha=$

$=\cancel{\frac{17^2\cos^2\alpha}{4}}+\frac{15^2}{4}+2\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{17\cos\alpha}{2}\cdot\cos\alpha$

$AE=2R\sin\alpha$

$R=\frac{AE}{2\sin\alpha}=\frac{16\cdot\sqrt{17}}{\sqrt{17}\cdot2\cdot4}=2$

$\frac{17^2-15^2}{4}=(15+17)\cdot\frac{17\cos^2\alpha}{2}$

$\frac{1}{2}=\frac{17\cos^2\alpha}{2}$

$1=17\cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha=\frac{1}{17}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$

$0{,}125:2=0{,}0625$

~~17 16~~

1 0,5 0,125

0,0625

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №12 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 144y^2 - 24xy = 2xy - 12y - x + 6 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 144y^2 - 26xy + 12y + x - 6 = 0 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \end{cases}$$

$$108y^2 - 26xy + 48y + 13x + 39 = 0$$

$$108y^2 + 48y + 39 = 13x(2y - 1)$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{26} \\ \times\ 6 \\ \hline 156 \end{array}$$

$$x = \frac{108y^2 + 48y + 39}{13(2y-1)} = \frac{108y^2 + 48y + 39}{26y - 13}$$

$$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$$

$$\left(\frac{108y^2 + 48y + 39 - 156y + 78}{26y - 13}\right)^2 + (6y-3)^2 = 90$$

$$\left(\frac{108y^2 - 108y + 117}{26y - 13}\right)^2 + (6y-3)^2 = 90$$

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+144y^2-26xy+12y+x-6=0 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+144y^2-26xy+12y+x-6=0 \\ 4x^2+144y^2-48x-144y-180=0 \end{cases}$$

$$-3x^2-26xy+156y+49x+174=0$$

$$y(156-26x)=3x^2-49x+174$$

$$26y(6-x)=3x^2-49x+174$$

$$y=\frac{3x^2-49x+174}{26(6-x)}$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$$

$$(6-x)^2+(\ \_\_\_\_\_\_$$

$$\begin{array}{r} \times\ 49 \\ 6 \\ \hline 294 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\ 174 \\ 108 \\ \hline 282 \end{array}$$

$x=6$

$6-12y=\sqrt{12y-12y-6+6}$

$y=\frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{2}{5}$

$\left.\begin{array}{l}\cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{1}{5}\\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin2\beta=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}=\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha$

$-\frac{1}{\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5}\sin2\alpha\pm\frac{2}{\sqrt5}\cos2\alpha$

$-1=\sin2\alpha\pm2\cos2\alpha$

1) $-1=\sin2\alpha+2\cos2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha-2=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0$

$2\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$

$3(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\frac{1}{3}\sin\alpha)=0$

$\cos\alpha=-\sin\alpha$ или $\cos\alpha=\frac{1}{3}\sin\alpha$

$tg\alpha=-1$ $tg\alpha=3$

2) $-1=\sin2\alpha-2\cos2\alpha$

$-1=2\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha+2$

$4\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-3=0$

$\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-3\sin^2\alpha=0$

$(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-3\sin\alpha)=0$

$\cos\alpha=-\sin\alpha$ или $\cos\alpha=3\sin\alpha$

$tg\alpha=-1$ $tg\alpha=\frac{1}{3}$

$-1,\ 3,\ \frac{1}{3}$

№2

$\begin{cases}x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}\\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases}$

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$\begin{cases}x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6\\ 2xy-12y-x+6\geq0\\ x-12y\geq0\end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №15
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \\ x-12y\geq 0 \\ 2xy-12y-x+6\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+144y^2-26xy+12y+x=6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \\ x-12y\geq 0 \\ 2xy-12y-x+6\geq 0 \end{cases}$$

$\cancel{36y^2-12x-36y+x^2-x^2-144y^2+26xy-12y-x+45-6}$

$\cancel{36}-58y^2$

$108y^2-26xy+12y+x+12x+36y=6-45$

$108y^2-26xy+48y+13x=-39$

$108y^2+48y+39=x(26y-13)$

$\cancel{(26y-13)}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6$

$$\begin{cases} x^2+144y^2-26xy+12y+x-6=0 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

$108y^2-26xy+12y+x-6+12x+36y+45=0$

$108y^2-26xy+48y+13x+39=0$

$x^2-12x+(36y^2-36y-45)=0$

$D=144-4(36y^2-36y-45)=144-144y^2+144y+180=$

$=-144y^2+144y+324=4(-36y^2+36y+$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

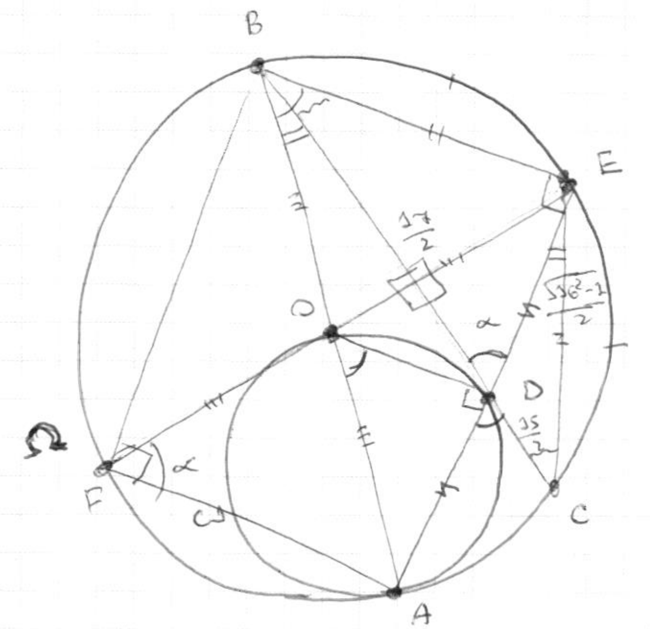
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

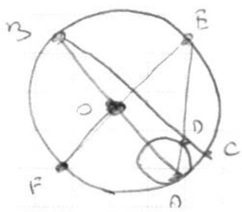
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4





$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$r, R, \angle AFE, S_{AEF}$ - ?

$OD \parallel BE$

$AD = DE$

$AD \cdot DE = BD \cdot CD$

$AD^2 = DE^2 = \frac{17 \cdot 15}{4} = \frac{16^2-1}{4}$

$AD = DE = \frac{\sqrt{16^2-1}}{2}$

$AE = \sqrt{16^2-1}$

$FE = 2R = \frac{AE}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{16^2-1}}{\frac{\sqrt{16^2-2}}{\sqrt{16^2-1}}} = \frac{16^2-1}{\sqrt{16^2-2}}$

~~$BE = \dots$~~

$\frac{17^2}{4} + \frac{16^2-1}{4} - 2 \cdot \frac{17}{2} \cdot \frac{\sqrt{16^2-1}}{2} \cos\alpha =$

$= \frac{15^2}{4} + \frac{16^2-1}{4} - 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{16^2-1}}{2} \cos(180° - \alpha)$

$\frac{16^2+17^2-1}{4} - 17\cos\alpha \cdot \frac{\sqrt{16^2-1}}{2} =$

$= \frac{16^2+15^2-1}{4} + 15 \cdot \frac{\sqrt{16^2-1}}{2} \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha\left(\frac{(15+17)\sqrt{16^2-1}}{2}\right) = \frac{17^2-15^2}{4}$ $\qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{16^2-2}}{\sqrt{16^2-1}}$

$\cos\alpha = \frac{(17+15)\overset{=2}{(17-15)} \cdot 2}{4(17+15)\sqrt{16^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{16^2-1}}$

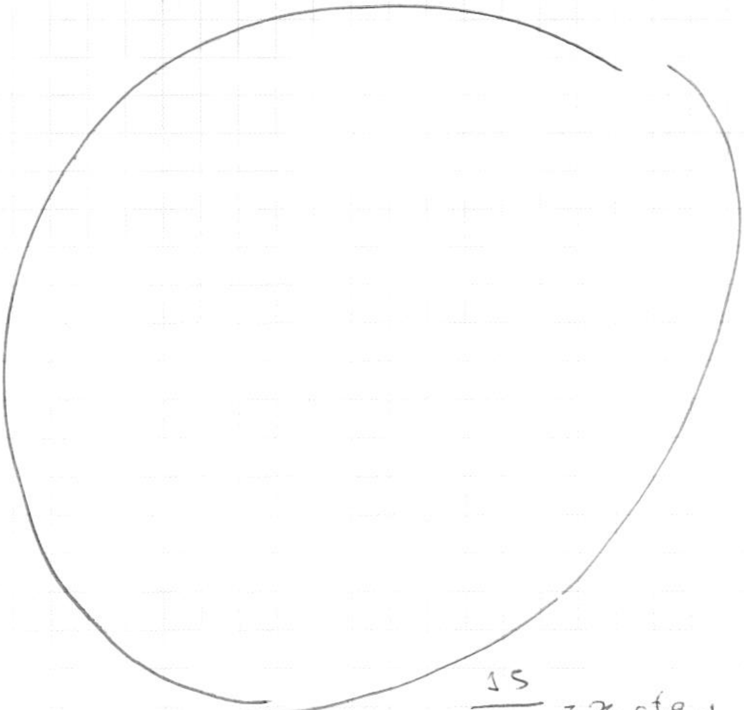
$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{16^2-1}} = \arccos\frac{\sqrt{16^2-1}}{16^2-1} = \arccos\frac{\sqrt{16^2-1}}{255}$

$y = (2R - 2r)\sin\alpha =$

$= \frac{17}{2}\cos\alpha = \frac{17\cos\alpha}{2}$

$\frac{r}{R} = \frac{2r\sin\alpha}{2R\sin\alpha}$

$y = 2R\sin\alpha$



$\frac{x}{\sin\alpha} = 2r$

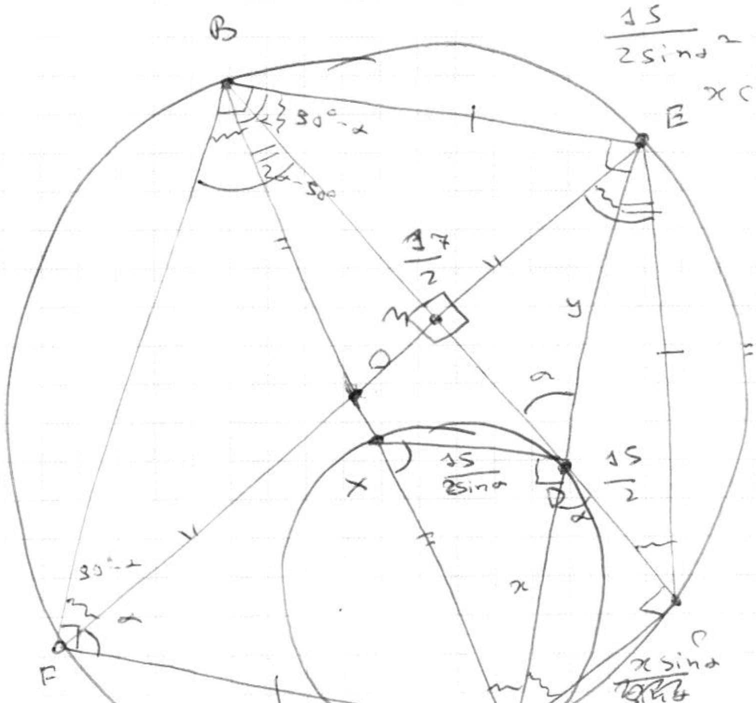
$x = 2r\sin\alpha = \frac{15}{2\cos\alpha}$

$\frac{15}{2\sin\alpha} = x\,\mathrm{ctg}\,\alpha$

$\frac{15}{2\sin\alpha} = \frac{x\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\quad r = \frac{15}{4\sin\alpha\cos\alpha}$

$x\cos\alpha = \frac{15}{2}$

$xy = \frac{15\cdot 17}{4}$



$\cancel{AE = 2R\sin\alpha}$

$y = \frac{17}{2}\cos\alpha = \frac{17\cos\alpha}{2}$

$\frac{15}{2} = x\cos\alpha$

$x = \frac{15}{2\cos\alpha} = 2r\sin\alpha$

$\frac{XD}{\frac{15}{2}} = \frac{x}{x\sin\alpha}$

$XD = \frac{15}{2\sin\alpha}$

$x + y = AE = 2R\sin\alpha$ $\quad r = \frac{15}{4\sin\alpha\cos\alpha}$

$x^2 = \frac{15^2}{4\sin^2\alpha} = \frac{15^2}{16\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}$