МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ (2)

(2): $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2\alpha\,\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\cos^2 2\beta(\sin 2\alpha) + 2\cos 2\beta\,\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta\,(\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

(1): $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

I) $\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\left(\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

II) $\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

I: $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + 2\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right) = -1$

$2\operatorname{tg}\alpha + 3 - \operatorname{tg}^2\alpha = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -1\\ \operatorname{tg}\alpha = 3\end{array}\right.$.

II $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}\\ \operatorname{tg}\alpha = -1\end{array}\right.$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha$ может принимать значения: $\{-1; 3; -\frac{1}{3}\}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

(2) $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \ (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \ (2) \end{cases}$

(2): преобр. в $(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

Замена:

$t=x-6 \quad m=6y-3 \Rightarrow$ Заметим, что

$\Rightarrow m\cdot t=(x-6)(6y-3)=3(2xy-x-12y+6)$

$x-12y=t-2m$

Преобр. (1) и (2) в

$\begin{cases} t-2m=\sqrt{\frac{mt}{3}} \ (1)' \\ t^2+m^2=90 \ (2)' \end{cases}$ ОДЗ: $mt\geq 0 \quad t-2m\geq 0$

возведем (1)' в квадрат $t^2-4mt+4m^2=\frac{mt}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3t^2-13mt+12m^2=0$ Реш отн. t:

$D=169m^2-144m^2=25m^2$

$t=\frac{13m\pm 5m}{6} \Rightarrow t\in\{\frac{4}{3}m; 3m\}$

Учитывая ОДЗ получ:

$t=\frac{4}{3}m$ при $m<0$ (тогда $\frac{4}{3}m-2m\geq 0$); и $t=3m$ при $m>0$ (тогда $3m-2m\geq 0$)

1) $m,t>0$ тогда $t=3m \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (2): $9m^2+m^2=90 \Rightarrow m=3 \Rightarrow t=9 \Rightarrow x=15; y=1.$

2) $m,t<0 \quad t=\frac{4}{3}m \quad \frac{16}{9}m^2+m^2=90 \Rightarrow m=-\frac{9\sqrt{10}}{5} \Rightarrow t=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; y=\frac{15-9\sqrt{10}}{30}.$

Ответ: пары $(x;y)$: $(15;1)$ и $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{15-9\sqrt{10}}{30}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$t = 10x - x^2 \quad t \geq 0$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t} \qquad m = \log_3 t$

$3^m + 4^m \geq 5^m$

Т.к. $3^m + 4^m$ – возр. ф. и 5^m – возр. ф. на $x \in R$, то график $3^m + 4^m$ может пересекать гр. 5^m только в 1 т. $\Rightarrow m \in (-\infty; m_0]$, где m_0 – ед. корень ур. $3^m + 4^m = 5^m$. Нетрудно заметить $m = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \in (-\infty; 2] \Rightarrow \log_3(10x - x^2) \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} 10x - x^2 \leq 9 \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in (0; 10) \\ x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \end{cases}$ $\left(10x - x^2 > 0 \quad (10-x)x > 0 \Rightarrow x \in (0; 10)\right)$ $\left(x^2 - 10x + 9 \geq 0 \quad x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)\right)$

$\Downarrow$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

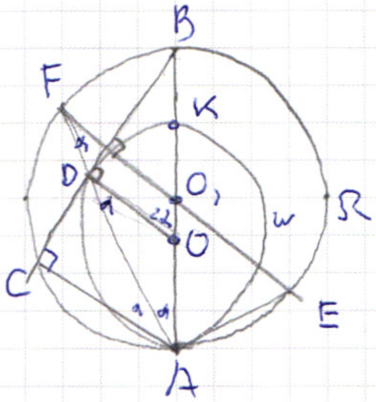
(4)

$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$.

R, r - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?



Пусть O - центр w. Тогда $DO \perp BC$ (т.к. BC-кас)

И тогда $DO = OA$, как радиусы w.

Пусть $BA \cap FE = O_1$; Тогда $O_1F = O_1A$ т.к. $FO_1 \parallel DO$ (т.к. они $\perp$ BC) и т.к. $\triangle FO_1A \sim \triangle DOA$ по 3-м углам. =>

=> т.к. O_1 лежит на диаметре AB и от неё равноуд. точки F и A, лежащ. на Ω, то O_1 - центр Ω. =>

$= FE$ - диаметр.

По св-ву касат.: $BD^2 = BA \cdot BK$ (K - пересеч. BA и w)

$BK = 2R - 2r$ (R - рад. Ω, r - рад w)

$BA = 2R$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = 2R(2R-2r)$ (1)

$\triangle BOD \sim \triangle BAC$ т.к. $\angle BCA = 90^\circ$ (опер. на диам.) и $\angle BDO = 90^\circ$ и $\angle B$ - общ. => $\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BA} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{32}{2}} = \frac{17}{32}$ =>

=> $2R - r = \frac{17}{32} 2R$ => $\frac{15}{32} \cdot 2R = r = \frac{15}{16} R$ Подставим в

(1): $\left(\frac{17}{2}\right)^2 = 2R\left(2R - 2 \cdot \frac{15}{16}R\right) = 4R\left(\frac{R}{16}\right) = \frac{R^2}{4}$ =>

=> $R = 17$. => $r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

Пусть $\angle AFE = \alpha$ => $\angle O_1AF = \alpha$ => $\angle DOO_1 = 2\alpha$

(т.к. $\angle DOO_1 = 180^\circ - \angle DOA = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \alpha) = 2\alpha$) => $\angle BAC = 2\alpha$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит, $\sin 2\alpha = \frac{BC}{BA} = \frac{16}{2\cdot R} = \frac{16}{2\cdot 17} = \frac{8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2} = \angle AFE$

~~△FDC ∼ △BDA по 3-м углам (1 верт и 2 опир. на одну дугу)~~

$\cancel{\frac{FC}{AB} = CD}$

$\angle AO_1E = 2\alpha$ т.к. $= \angle FOB$. (как верт.) и $\Rightarrow \angle FO_1A =$
$= 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \sin\angle AO_1E = \sin\angle FO_1A = \frac{8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{FO_1A} = \frac{1}{2}\sin\angle FO_1A \cdot FO_1 \cdot O_1A = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{17}\cdot 17^2 = 4\cdot 17 =$
(радиусы R)
$= 68$.

$S_{AO_1E} = S_{FO_1A}$ т.к. sin углов один. и стороны при них тож. $\Rightarrow S_{AFE} = 2\cdot 68 = 136$.

Ответ: а) Радиус $R = 17$; Радиус $w = \frac{255}{16}$

б) $\angle AFE = \frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}$

в) $S_{AEF} = 136$

(5) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(x) = f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) =$, где $a_1 \ldots a_n$ – его прост. множ. $= \left[\frac{a_1}{4}\right] + \left[\frac{a_2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{a_n}{4}\right] \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n)$, где $n \in Z$ всегда полож., а, значит, $\frac{x}{y}$ – не целое число.

~~$f(\frac{1}{y}$~~ $f(2) = f\left(2 \cdot y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(2y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) - f(2y) = \left[\frac{2}{4}\right] - f(2y) = -f(2y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(2y) \Rightarrow f(2y) > f(x)$

$f(2y) = f(2) + f(y) = f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) > f(x)$

Всего промежутки 2 4 8 12 16 20 24 25

знач $\left[\frac{n}{4}\right]$ 0 1 2 3 4 5 6

$\Rightarrow$ x должна быть в группе ниже y:

y в 1: $4 \cdot 2 = 8$ y в 3 гр: $4 \cdot 10 = 40$

y во 2: $4 \cdot \underset{36}{6} = 24$ y в 4 гр: $4 \cdot 14 = 56$

y в 5 гр: $4 \cdot 18 = 72$ y в 6 гр: $2 \cdot 22 = 44$

Всего: $8 + 24 + 40 + 56 + 72 + 44 = 244$ пары

Ответ: 244 пары

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(15) = f(15\cdot 2\cdot \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) + f(30) =$

$= [\frac{5}{4}] + [\frac{3}{4}] = 0 \qquad f(\frac{1}{2}) = -f(30) = -($

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{2}{y}) = f(2\cdot y) = f(2) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(2y) - f(2) + f(x) = f(2y) + f(x)$

$f(\frac{2}{y}) = f(2) + f(\frac{1}{y}) = f(\frac{1}{y})$

$f(2) = f(2\cdot y\cdot \frac{1}{y}) = f(2y) + f(\frac{1}{y}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{y}) = f(2) - f(2y) = -f(2y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(2y) \Rightarrow f(2y) > f(x)$

$4 \leq \quad \leq 16$

$4 \leq 8 ; 16 ; 20$

24 25

32

72 144

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-6)(6y-3) = 6xy - 3x - 36y + 18 = (2xy - x - 12y + 6)\cdot 3$ $\frac{9\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$\sqrt{9\cdot 12}\ \frac{\sqrt{10}}{5}$

$x-6 - 12y+6$

$x = t+6 = \frac{30-12\sqrt{10}}{5}$

Замена $t = x-6$ $m = 6y-3$

$y = \frac{m+3}{6} = \frac{15-9\sqrt{10}}{30}$

(1) $\begin{cases} t-2m = \sqrt{\frac{mt}{3}} \\ t^2+m^2 = 90 \end{cases}$ ОДЗ $mt \geq 0$, $t-2m \geq 0$

$-\frac{12\sqrt{10}}{5} + \frac{18\sqrt{10}}{5}$

$\frac{6\sqrt{10}}{5} = \sqrt{\frac{9\cdot 12}{3}}$ $9\cdot 4$

(1): $t^2 - 4mt + 4m^2 = \frac{mt}{3}$

$\frac{5}{3}m = -\sqrt{90} = -3\sqrt{10}$

$3t^2 - 12mt + 12m^2 = mt$

$3t^2 - 13mt + 12m^2 = 0$

$m \geq 0 \Rightarrow t \geq 0$

$\cancel{D = 169 - 12\cdot 12 = 25}$ $\cancel{t=}$

$D = 169m^2 - 144m^2 = 25m^2$ $t = \frac{13m \pm 5m}{6}$

$9\cdot 2$

$t = \left\{\frac{4}{3}m;\ 3m\right\}$

неуд по ОДЗ

$\cancel{9m^2} + 10m^2 = 90$

$\frac{25}{9}m^2 = 90$

$m = 3 \Rightarrow t = 9$

$\frac{5}{9}m^2$ $81\cdot 2$

$m = 6y - 3 = 3 \Rightarrow y = 1$

$m^2 = \frac{810}{25} =$

$x-6 = 9 \Rightarrow x = 15$

$= \frac{81\cdot 2}{5}$

(3) $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$ $10x - x^2 \geq 0$

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$\frac{5}{3}m = \sqrt{90}$

$(10x-x^2)^{\log_3 4} - (10x-x^2)^{\log_3 5} \geq x^2 - 10x$ $10x - x^2 = t$, $t > 0$

$m = \frac{9\sqrt{10}}{5}$

$t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq -t$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$ $3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$, $\log_3 t = m$

$3^m + 4^m \geq 5^m$ $4^m \geq 3^m 2^m - 3^m$ $4^m \geq 3^m(2^m - 1)$ $\left(\frac{4}{3}\right)^m \geq 2^m - 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{4}{3}\right)^m \geq 2^m - 1$ $\left(\frac{4}{3}\right)^m = 2^m - 1$ $m = \log_3 10x - x^2$ $\frac{-10}{-2} = 5$

$m \Rightarrow -\infty$ - уд. $1 + \left(\frac{4}{3}\right)^m \geq 2^m$ $x(10-x)$ $50-25=25$

$1^m + \left(\frac{4}{3}\right)^m = 2^m$ - одно реш. $x \in (0;10)$ 3 7

$1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

$(2-1)(2^{m-1} + 2^{m-2} + 2^{m-3} + \ldots + 1)$

$\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ $\sqrt{3}+2 = \sqrt{6}$ $1\ 2\ 4\ 8$

$\left(\frac{4}{3}\right)^m = 2^n + 2^2 + \ldots + 2^{m-1} =$

$1 \geq 2^m - \left(\frac{4}{3}\right)^m$

$4 - \frac{16}{9}$ $\frac{36-16}{9}$ $\frac{20}{9}$ $2+1$ 2 $q=2$ $\frac{a_1(1+q^n)}{1+q^n}$

$m \geq 1$ $\frac{3}{2}$ $4 - \frac{20}{9}$ $\frac{16}{9}$ 5 $\cancel{\frac{1(1-2^4)}{1+2^4}}$

$m \in (1;2)$

$m \leq 4$ 5

$3^m = 5$ $m = \log_3 5$

$1 \geq 2^{\log_3 5} - \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 5}$

$3^m + 4^m \geq 5^m$ $3^{\log_3 5} + 4^{\log_3 5} \geq 5^{\log_3 5}$

$5 + 4^{\log_3 5} \geq 5^{\log_3 5}$

$3^m + 4^m \geq 5^m$ - возр. быстр. $\cancel{27+64 \geq 125}$

$m = 2$ - кор. $m \in (-\infty; 2]$

$\log_3(10x - x^2) \in (-\infty; 2]$

$10x - x^2 \in (0; 9]$ по одз $10x - x^2 \in (0; 5]$

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0; 10) \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases}$$

$\cancel{\Rightarrow x^2 - 10x + 5 \geq 0 \quad D = 100 - 20 = 80 \quad x \in \left[\frac{10-\sqrt{80}}{2}; \frac{10+\sqrt{80}}{2}\right]}$

$100 - 36 = 64$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$ $x \notin \left[\frac{10-8}{2}; \frac{10+8}{2}\right]$

Отв: $x \in (0;1) \cup (9;10)$ $x \in [1;9]$ $x \notin [1;9]$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

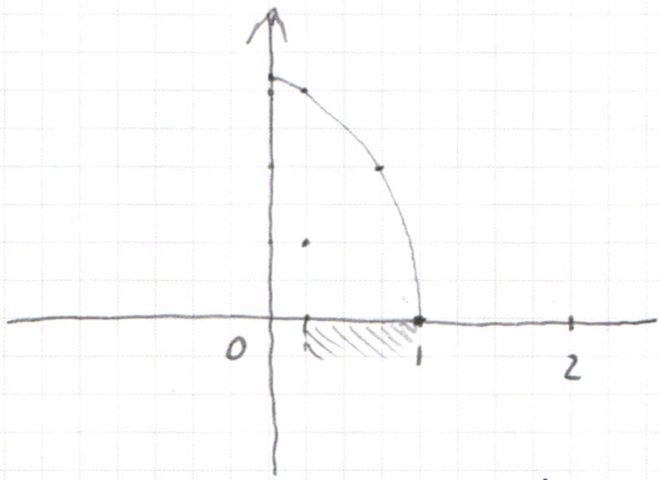
(6)

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$\frac{36}{64}$ $\frac{18}{32}$ $\frac{9}{16}$



$-32 \cdot$

$-32\frac{81}{16^2}+\frac{9\cdot36}{16}-$

$-3 =$

$=\frac{2\cdot81-48+9\cdot36}{16}=$

$=$

$9\cdot9\cdot4$

$\frac{81\cdot6-48}{16}$

$81 \times 6 = 486$, $486 - 48 = 438$, $438 \,|\, 16$

$\frac{219}{8}$

(5)

$2 \le x \le 25 \quad 2 \le y \le 25 \quad f(\frac{x}{y}) \le 0$

$f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$f(1)=0$

$f(p)$ - полож.

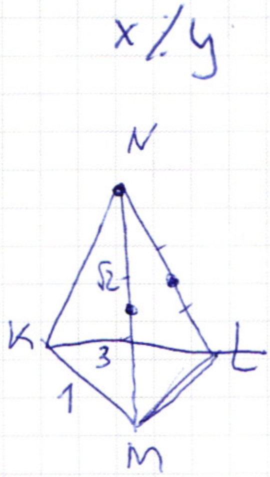
$f(n) = f(a_1)+f(a_2)+\dots+f(a_n) =$

a_i - прост. дел. числа n

$=[\frac{a_1}{4}]+[\frac{a_2}{4}]+\dots+[\frac{a_n}{4}]$

$f(x)+f(\frac{1}{y})<0 \qquad x/y$

$f(x)<-f(\frac{1}{y})$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

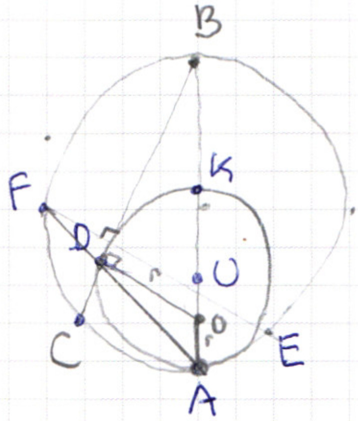
R, r

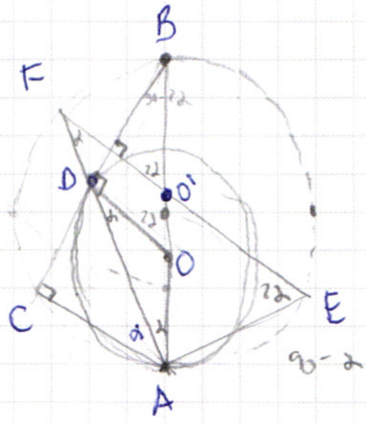
$\angle AFE - ?$

S_{AEF}

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$





$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = BA \cdot BK = (2R-2r)2r$

$17 \cdot 17 = 119$, 17, 289

$\frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2} = FD \cdot DA$

$\frac{BA}{BO} = \frac{BC}{DB} = \frac{2R}{2R-r} = \frac{32}{17}$

$$\begin{cases} 34R = 32(2R-r) \\ \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 2r(2R-2r) \end{cases}$$

$32r = 30R$ $\quad 16r = 15R$

$\frac{289}{16} = R \cdot r - r^2 = \frac{16r^2}{15} - r^2 = \frac{r^2}{15}$

$r = \sqrt{15} \cdot \frac{17}{4}$ $\quad R = \frac{16 \cdot 17}{4\sqrt{15}}$

$\sin 2\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{\cancel{16} \cdot 4\sqrt{15}}{2 \cdot 16 \cdot 17} = \frac{2\sqrt{15}}{17}$

$\angle AFE = \angle \alpha = \frac{\arcsin \frac{2\sqrt{15}}{17}}{2}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE = S$

$17 \cdot 15 = 85$, 17, 255

$17 \cdot 15 = 85$, 17

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\alpha$ -? не меньше 3-х знач.

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta =$

$\sin 2\alpha\cdot(\underbrace{\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta}_{2\cos^2 2\beta - 1}) + 2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\cos^2 2\beta\cdot\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta\,(\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\,(\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac{2}{5}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)} = \frac{\sqrt5}{5} = \cos 2\beta$ $\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$ $\cos 2\alpha = \frac{\sin\alpha}{tg\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\,tg\alpha\cos^2\alpha$

$-1\ \frac{\pi}{2}$

$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\sin 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\frac{\pi}{6}$

$1-$

$\frac{2\,tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \cancel{\frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{\frac{tg^2\alpha+1}{tg^2\alpha}}}} = \frac{\frac{2\,tg^2\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{1+tg^2\alpha}{tg^2\alpha}}}$ $\frac{\sqrt3}{2}$ $\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} =$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ $\frac{1}{1+tg^2\alpha}$ $\frac{\cancel{\cos^2\alpha}}{\cos^2}$ $\frac{\sin\cos}{\sin\cos}$

$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\frac{1}{1+tg^2\alpha} = \cos^2\alpha$ $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha}$ $\frac{1}{1+tg^2\alpha}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{tg^2\alpha}} = \frac{tg^2\alpha}{(1+tg^2\alpha)^2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$ $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac15} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

(-1)

$\frac{\sqrt5}{5}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$\frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + 2\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$

$tg\alpha + 1 - tg^2\alpha = \frac{-1-tg^2\alpha}{2}$

$2tg\alpha + 2 - 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$2tg\alpha + 3 - tg^2\alpha = 0$ $tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$tg\alpha = \frac{2\pm4}{2}$ $tg\alpha = -1$ $tg\alpha = 3$

$\sqrt5$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2(tg\alpha + tg^2\alpha - 1) = -1 - tg^2\alpha$

$2tg\alpha + 2tg^2\alpha - 2 = -1 - tg^2\alpha$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$ $tg\alpha = \frac{2\pm4}{6}$ $tg\alpha = -\frac13$ $tg\alpha = 1$

2) ОДЗ $x \geq 12y$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \Rightarrow (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 45+36+9 =$

6 $12\cdot3$ 81

$= 90$ ОДЗ: $2xy - 12y - x + 6 \geq 0$

$(x-12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6$ $x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y -$

$-x+6$ $-x+6 - 12y + 6$ $x-6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)