МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Преобразуем 2-е ур-е:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$ подставим 1-е ур-е.

$2\cdot\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$

Преобразуем 1-е ур-е.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

$2\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17} + \frac{\sqrt{17}}{17}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{17}}{17} = 0$

$(4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1) = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$.

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x + x^2 \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

Пусть $t = x^2+6x$

$$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$$

1) Пусть $t \geq 0$

$$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 4}$$

$$t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$$

$$t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 4 + \log_4 \frac{5}{4}}$$

$$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$$

$\Downarrow$

$\log_4 t \leq 2$ при $t = 2$ (равенство)

$\Downarrow$

$t \leq 16 \Rightarrow t \in [0;16] \Rightarrow$

2) Пусть $t < 0$

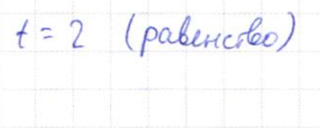
$$3^{\log_4 t} + t \geq -t^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} + 5^{\log_4 t} \geq 0$$

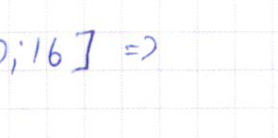
$t<0$ Невозможно т.к стоит под логарифмом. $\Rightarrow$

$t \in [0;16]$

$0 \leq x^2+6x \leq 16$

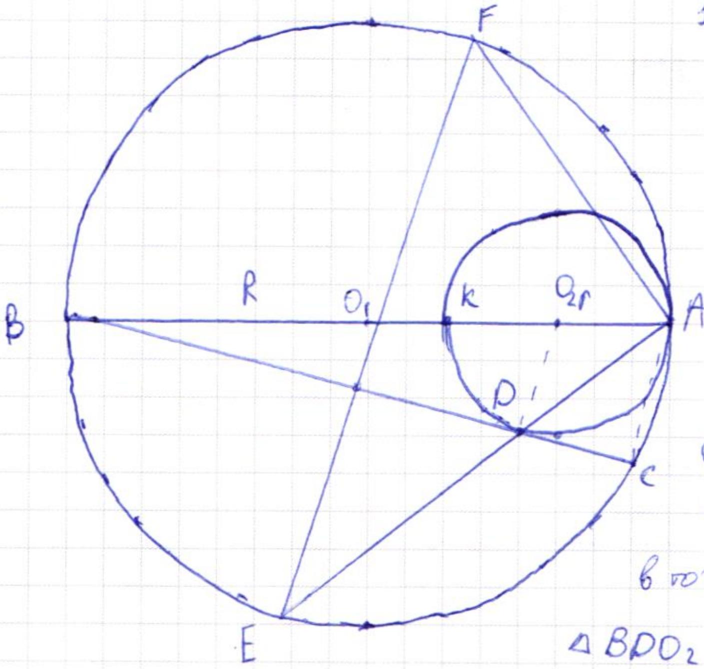


$$\begin{cases} x^2+6x \geq 0 \\ x^2+6x-16 \leq 0 \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-8;-6] \cup [0;2]$

№4.



1) Воспользуемся теоремой об отрезках касательных:

$BD^2 = BK \cdot BA$

$\frac{169}{4} = (2R - 2r)\, 2R$

2) $\angle BCA = 90^0$ т.к опирается на диаметр

$\angle BDO_2 = 90^0$ т.к радиус проведен в точку касания. $\Rightarrow$

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{AC}{r} = \frac{18}{13} \Rightarrow AC = \frac{18}{13} r$

Т. Пифагора для $\triangle BCA$: $9^2 + AC^2 = 4R^2$

$$\begin{cases} \left(\frac{18}{13}\right)^2 r^2 + 81 = 4R^2 \\ \frac{169}{4} = 4R^2 - 4Rr \end{cases} \Rightarrow \frac{244}{169} r^2 + 81 - \frac{169}{4} + 4Rr = 0$$

$\Downarrow$

$R =$

$r =$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

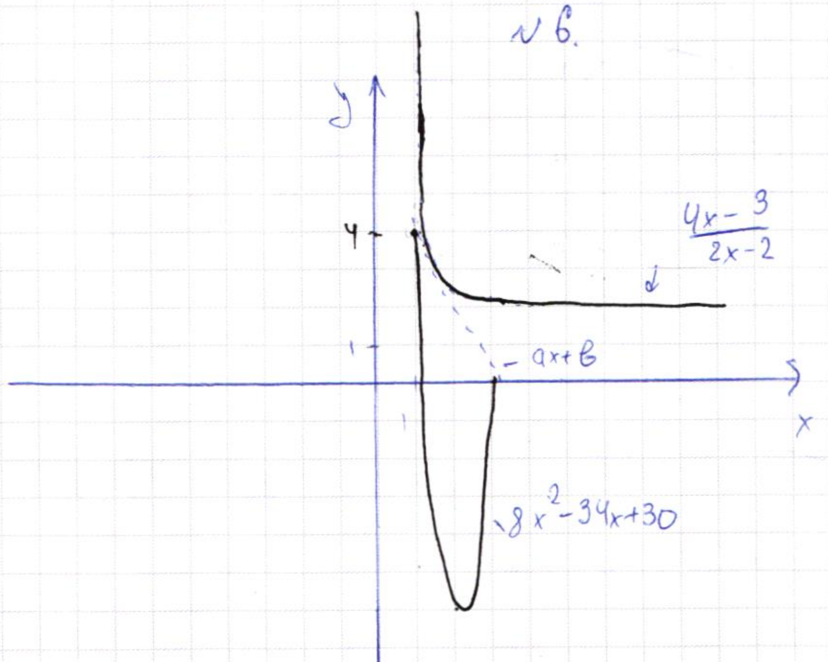
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



$x=1 \Rightarrow ax+b>4$

$a+b>4$

$x=2 \Rightarrow 2a+b<\frac{5}{2}$

$x=\frac{3}{2} \Rightarrow 1,5a+b<3$

$x=3 \Rightarrow 3a+b>0$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b>4 \\ 2a+b<\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2}a+b<3 \\ 3a+b>0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{a<-1,5}$

$b>5,5$

$\begin{cases} a+b=4 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow$

$a=-2$
$b=6.$

Проведем прямую соед. точки $(1;4);(3;0) \Rightarrow$ прямая $ax+b$ либо лежит выше нее на отрезке $[1;3]$ либо совпадает с ней.

Причем эта прямая является касательной к графику $\frac{4x-3}{2x-2}$ и касается его в т. $(\frac{3}{2};3)$. $\Rightarrow$ единственная прямая.

Ответ: $(-2;6)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №4 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Распишем $f(n)$ где $n \in N; 3 \le n \le 27$

$f(1) = 0$	$f(10) = 1$	$f(19) = 4$
$f(2) = 0$	$f(11) = 2$	$f(20) = 1$
$f(3) = 0$	$f(12) = 0$	$f(21) = 1$
$f(4) = 0$	$f(13) = 3$	$f(22) = 1$
$f(5) = 1$	$f(14) = 1$	$f(23) = 5$
$f(6) = 0$	$f(15) = 1$	$f(24) = 0$
$f(7) = 1$	$f(16) = 0$	$f(25) = 2$
$f(8) = 0$	$f(17) = 4$	$f(26) = 3$
$f(9) = 0$	$f(18) = 0$	$f(27) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$, где $f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(7) = f\left(\frac{14}{2}\right) = f(14) + f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f(\cancel{3}) = f\left(\frac{12}{3}\right) = f(12) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 0 = f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f(4) = f\left(\frac{16}{4}\right) = f(16) + f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow 0 = f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(4) = f\left(\frac{20}{5}\right) = f(20) + f\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \cancel{0}\ f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

$\vdots$

$f\left(\frac{1}{n}\right) = -\cancel{n} f(n)$

Начинаем считать: если $f(x) = 0$ тогда $|f\left(\frac{1}{y}\right)| \ge 1 \Rightarrow$

Всего вариантов: 10 (выбрать x) и 15 (выбрать y) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 150 вариантов

Если $f(x) = 1 \Rightarrow |f(\dot{y})| \geq 2$

8 (выбрать x) $\cdot$ 7 (выбрать y) $= 56$

$f(x) = 2$ $\quad 2 \cdot 5$ вариантов $= 10$

$\Downarrow$

$f(x) = 3$ $\quad 2 \cdot 3 = 6$ вариантов

$f(x) = 4$ $\quad 2$ варианта

$f(x) = 5$ $\quad 0$ вариантов

Итого: $2 + 6 + 10 + 56 + 150 = 224$ варианта

Ответ: 224.

№2.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

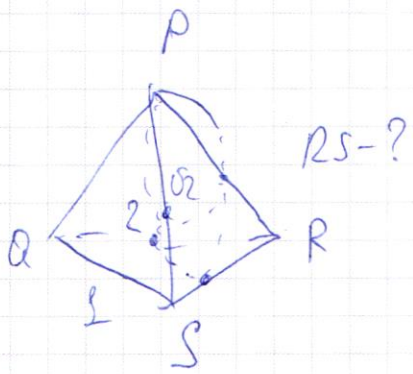
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

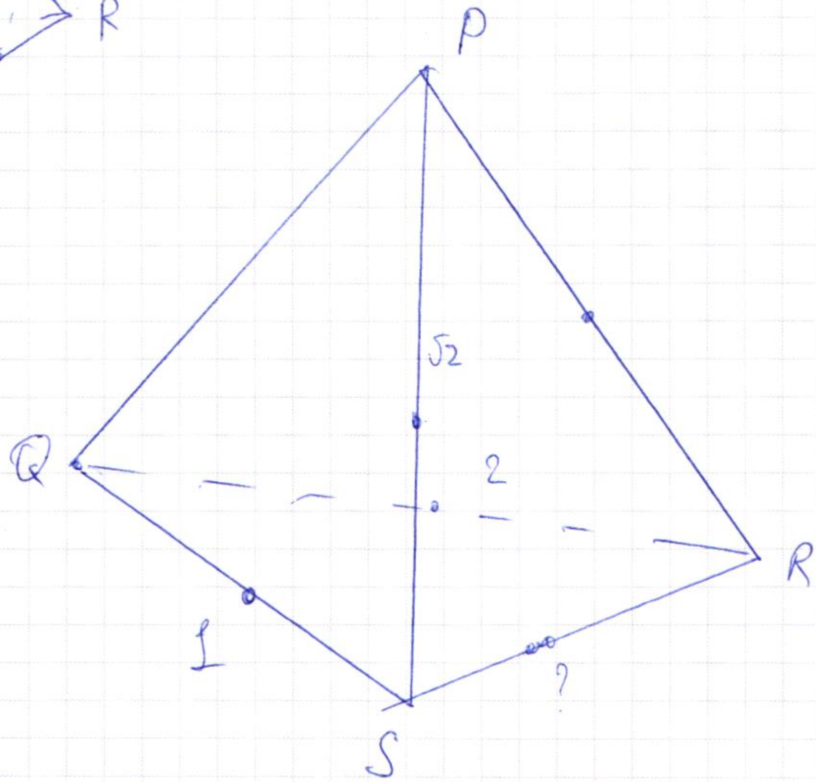
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\overset{60}{\alpha} + \overset{30}{\beta}) = \overset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\alpha}\,\overset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\beta} + \overset{\frac{1}{2}}{\sin\beta}\,\overset{\frac{1}{2}}{\cos\alpha} = 1$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{4\beta}{2} = -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\begin{cases} 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \\ \cancel{\sin 2\alpha} \\ \qquad 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\cos 2\beta = \frac{8}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\cos 2\beta = \cancel{1 - \sin^2 2\beta = 1 -} = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$2\sin^2\beta = 1 - \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{17-4\sqrt{17}}{17}$

$\sin\beta = \sqrt{\frac{17-4\sqrt{17}}{2\cdot 17}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2.

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3(x^2-2x+1)+3y^2-4y=7$

$3(x^2+y^2)-2(3x+2y)=4$

$3\cancel{(}x(x-2)+y(3y-4)=4$

$(x+y)^2=(x+y+1)(\cancel{3}y+2x+2)=$

$=\cancel{2xy}\ 3xy+y^2+x^2.$

$(3x+3y+1)(x+y+2)=$

$=3x^2+3xy+3xy+3y^2+6y+6x+2$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y=2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$18y^2+8x^2-30xy+4x+6y=3x^2+3y^2-6x-4y$

$15y^2+5x^2-30xy+10x+10y=0$

$2x=$

$\cancel{9}(x^2+10x+25)+(y^2+10y+25)+4x^2+14y^2-30xy=50$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

$x^2+6x=t$

$\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2\left(\frac{8}{4}\right)$

$$3^{\log_4 t} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t} + \cancel{t} \geq t^{(\log_4 5 - \log_4 4)} = \log_4 \frac{5}{4}$$

$t>0$

$3^{\log_4 t}$

$\Downarrow$

$t^{\log_4 3}$

$2^{\log_4 16} = 16^{\log_4 2} = 16^{\frac{1}{2}}$

$2^2=4$

$5^{\log_{25} 625} = 625^{\log_{25} 5} =$

$5^2=25=625^{\frac{1}{2}}$

$$t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$$

$t<0$

Все решения

$x^2+6x<0$

$x(x+6)<0$

$t>0$

Нет решений

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(3x) = f(x)$

$f(2x) = f(x)$

$f(5x) = 1 + f(x)$

$\left(\frac{1}{x}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = 0$

$f(6) = 0$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(12) = 0$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(18) = 0$

$f(20) = 1$

$f(21) = \cancel{0}\ 1$

$f(22) = 1$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(p) = [p/4]$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$f(27) = 0$

0???

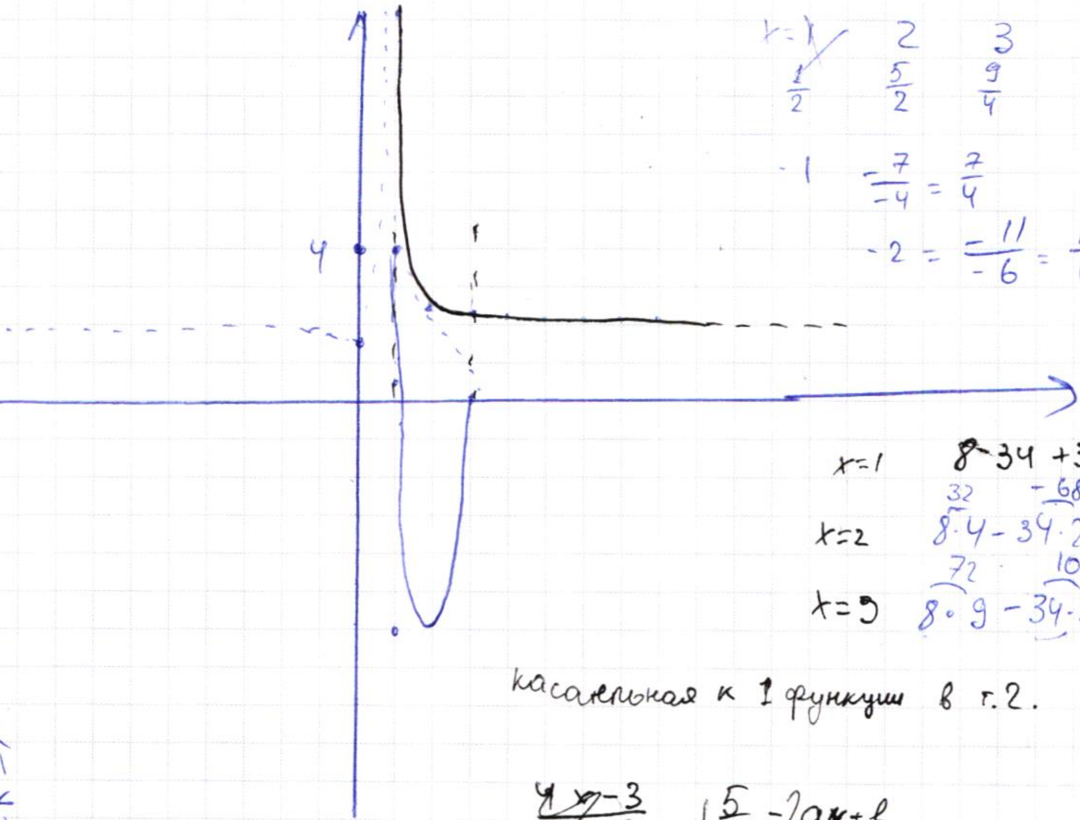
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x=1$	2	3	4	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{13}{6}$	

$-1 \quad \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$

$-2 = \frac{-11}{-6} = \frac{11}{6}$

$(2R-r) = \sqrt{\frac{169}{4} + r^2}$

$4R^2 - 4Rr + r^2 = \frac{169}{4} + r^2$

$x=1 \quad 8 - 34 + 30 = 4$

$x=2 \quad 8\cdot 4 - 34\cdot 2 + 30 = -6$

$x=3 \quad 8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30 = 0$

касательная к 1 функции в т. 2.

$\cancel{4x-3}$

$\begin{cases} \frac{5}{2} = 2ax + b \\ 4 = xa + b \end{cases}$

$\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + r^2} + r = 2R \Rightarrow$

$\frac{13^2}{2^2} = 2R\cdot(2R-r)$

$\frac{169}{4} = 4R^2 - 4Rr$

1,5

4: 3

$-2\cdot 1,5 + 6$

3.

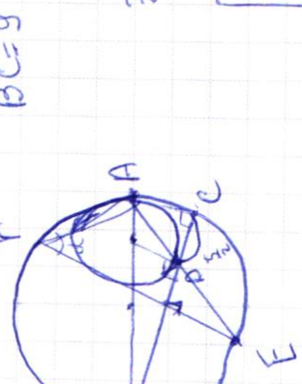
$a > \frac{5}{2} - 4 \Rightarrow a > -\frac{3}{2}$

$BP = \frac{13}{2}$

$BC = 9$

$\frac{2-3}{-1} = 1.$

$AC^2 + 9^2 = 2R^2$



$9a + b = 4$

$3a + b = 0$

$\frac{3}{1} = 3$ в т. 1,5

$2a = -4$

$a = -2$

$b = 6$

$3a + 2b < 6$

$3a + b > 0 \Rightarrow b < 6$

$b > 4,5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1.

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$2\cdot + \frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\cos 2\beta = \frac{8}{17}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$2\cos 2\beta = \frac{8\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 \qquad \cos 60 = 1 - 2(\cos 30)^2 = 1 - \frac{2\cdot 3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2\cos^2\beta = \frac{17+4\sqrt{17}}{17}$$

$$\cos^2\beta = \frac{17+4\sqrt{17}}{34}$$

$$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot(2\cos^2\beta-1) + 2\sin\beta\cos\beta(2\cos^2\alpha-1) = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2(\sin\alpha\cos\alpha\cdot 2\cos^2\beta + \sin\beta\cos\beta\, 2\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta) = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\cos\alpha\cos\beta(2\sin\alpha\cos\beta + 2\sin\beta\cos\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta = \frac{\sqrt{17}}{34}$$

$$2\,tg\alpha\cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha - \frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{17}}{34\cos\alpha}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha =$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^2 - 3^1 = 3$

Рассмотрим 2 ур-е:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$ $\quad \sqrt{1-\frac{16\cdot 17}{17}} = \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$

$\cos 2\beta = +\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\quad \frac{16\cdot 17}{17}$ $\quad \frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

делим на $\cos 2\alpha$

$tg 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta = -\frac{\sqrt{17}}{17\cos 2\alpha}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4\sqrt{17}}{17} + \frac{\sqrt{17}}{17}\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17} = -\sin 2\beta$

$\sin 2\alpha \frac{4\sqrt{17}}{17} + \frac{\sqrt{17}}{17}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{17}}{17} = 0$

$\frac{\sqrt{17}}{17}(4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1) = 0$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0$ $\quad \cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = 2\cos^2\alpha - 1$

$4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$ $\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$2\cos\alpha(\cos\alpha + 4\sin\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$ $\quad \cos\alpha = -4\sin\alpha \Rightarrow tg\alpha =$

$tg\alpha$ - не сущесв.

$\cos\alpha(\cos\alpha + 4\sin\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha = -4si$

$4\, tg\alpha = 0$

$tg\alpha = 0$

$4 tg\alpha + 1 = 0$

$tg\alpha = -\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_4 4 + \log_4 \frac{5}{4}}$

$t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$

$\ln\left(t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4}\right) \geq \log_4 5 \ln t$

$t^{(\log_4 3)^2} + t^{2\log_4 4} + 2t^{\log_4 12} \geq t^{(\log_4 5)^2}$

$t^2 + 2t^{\log_4 12} \geq t^{(\log_4 5)^2} - t^{(\log_4 3)^2}$

$\cancel{t}t^2 + 2t^{\log_4 12} \geq \left(t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}\right)($

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

$\log_4 t \leq 2$

$x(x+6) \geq 0$

$$\begin{cases} 0 \leq x^2 + 6x \\ x^2 + 6x \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x \geq 0 \\ x^2 + 6x - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$+ \quad -6 \quad - \quad 0 \quad +$

$+ \quad -8 \quad - \quad 2 \quad +$

$\frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 16}}{2} =$

$= \frac{-6 \pm 10}{2} = -8; 2$

$x \in [-8; -6] \cup [0; 2]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

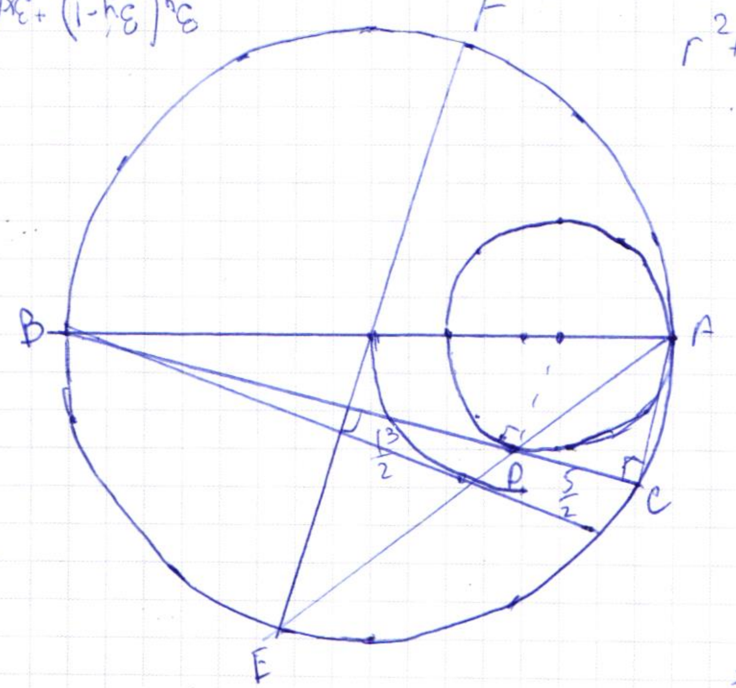
$9^2 + AC^2 = (2R)^2$

$\frac{169}{2} = 2R \cdot (2R - 2r)$

$r^2 + \frac{169}{2} = (2R - r)^2$

$4R^2 - 4Rr = \frac{169}{2}$

$8y(3y-1)+3x(3x-2)+4y=4$



$\frac{AC}{r} = \frac{\cancel{\frac{13}{2}}\ 18}{13}$

$AC = \frac{18}{13} r$

$81 \cdot 4 = 244$

$81 + \left(\frac{18}{13}\right)^2 r^2 = 4R^2 \Rightarrow \cancel{81} + \frac{244}{169} r^2 = \frac{\cancel{169}\ \frac{7}{2}}{\cancel{2}} + 4Rr$

$\frac{169}{2} = 4R^2 - 4Rr$

$\frac{244}{169} r^2 - 4Rr - \frac{7}{2} = 0$

$\frac{244}{169} r^2 + 81 = 4R^2$

$r_{1,2} = \frac{4R \pm \sqrt{16R^2 + 14 \cdot \frac{244}{169}}}{2 \cdot \frac{244}{169}} =$

$= \frac{13^2 \left(4R \pm \sqrt{16R^2 + \left(\frac{18}{13}\right)^2 \cdot 14}\right)}{2 \cdot 18^2} = \frac{13^2 \left(4R + \sqrt{(4R)^2 + \left(\frac{18}{13}\right)^2 \cdot 14}\right)}{2 \cdot 18^2}$

$R^2 - Rr - \frac{169}{16} = 0$

$R = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + \frac{169}{4}}}{2} = \frac{r + \sqrt{r + \frac{169}{4}}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3y^2=6x+4y+4-3x^2$

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y=2 \\ 3x^2+3y^2=6x+4y+4 \end{cases}$$

$6y^2+x^2+8x+7y-15xy+2=0$

$\cancel{3y^2+9x^2\ y^2+6y+9+y^2-2y+1+4y^2+x^2+8x-15xy-8=0}$

$\cancel{(y+3)^2+(y-1)^2}$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot3\cdot(3y^2-4y-4)}}{6}=$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{36-36y^2-48y+48}}{6}=$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{-36y^2+48y+84}}{6}=$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{(-6y\quad)(6y}}{6}$$

$36\cdot3$

$16=$

$48=\cancel{6y}$

$$\begin{cases} 48=6(x-y) \\ 84=x\cdot y=4\cdot21\cdot4 \end{cases}$$

$x=$

$3y^2-4y+3x^2-6x-4=0$

$$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot3\cdot(3x^2-6x-4)}}{12}=\frac{4\pm\sqrt{16-36x^2+72x+64}}{12}=\frac{4\pm\sqrt{(-6x+16)(6x+4)}}{12}$$

$$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{(-6x-16)(6x+4)}}{\cancel{12}\ 6}$$

$\frac{16}{6}$ $\quad -\frac{4}{6}\le x\le\frac{16}{6}$

$72/6=12$

$16\ 4\ 4$

$16\cdot6-6\cdot4=$

$=12\cdot6=72.$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y=2$

$\cancel{(3y+2x-\quad)(3y+2x-}$

$3x^2+3y^2=4+6x+4y$

$6y^2+x^2+8x+7y-15xy=-2$

$6y^2+x^2+8x+7y+2=15xy$