ДОГОВОР №_____

об оказании услуг по обучению японскому языку

г.Алматы "____"_____________2022г.

Казахстанско-японский центр развития человеческих ресурсов, НАО «Университет Нархоз» (справка о государственной перерегистрации юридического лица от 03.03.2016г., выданная Управлением юстиции Ауэзовского района Департамента юстиции г. Алматы, БИН-010740002528), именуемый в дальнейшем «Исполнитель» в лице Директора Оразгалиевой Ж.Б., действующей на основании приказа №09-01-02/239 л/с от 30.06.2015г.с одной стороны и гражданин

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}; \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}; \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}; \\ \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1+1)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{2}{17}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}; \\ \cos 2\beta(\sin(2\alpha+2\beta))=-\frac{1}{17}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}. \end{cases} \quad 1)\ \sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}} \quad 2)\ \sin 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}, \\ \sin 2\beta=4/\sqrt{17}, \\ \cos 2\beta=1/\sqrt{17}. \end{cases} \Rightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$
$\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1 \\ \sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha=-1-4\cos 2\alpha \\ \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha=0. \\ \cos 2\alpha=-\frac{8}{17} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2\alpha=-1 \\ \cos 2\alpha=0 \end{cases} (a) \\ \begin{cases} \sin 2\alpha=\frac{15}{17} \\ \cos 2\alpha=-\frac{8}{17} \end{cases} (б) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ a) $\begin{cases} \sin 2\alpha=-1, \\ \cos 2\alpha=0; \end{cases} \Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi n \Rightarrow tg\alpha=-1.$

б) $\begin{cases} \sin 2\alpha=\frac{15}{17}, \\ \cos 2\alpha=-\frac{8}{17}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha\cos\alpha=\frac{15}{34}>0\ (tg\alpha>0) \\ 2\cos^2\alpha-1=-\frac{8}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\alpha>0 \\ \cos^2\alpha=\frac{9}{34}. \end{cases}$

$$\begin{cases} tg\alpha>0, \\ \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{34}{9}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\alpha>0. \\ 1+tg^2\alpha=\frac{34}{9} \end{cases} \Rightarrow tg\alpha=\frac{5}{3}$$

2) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta=1/\sqrt{17} \\ \sin 2\beta=-4/\sqrt{17}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha-4\cos 2\alpha=-1 \\ \sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha=4\cos 2\alpha-1 \\ \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha=0 \\ \cos 2\alpha=\frac{8}{17}. \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2\alpha=-1 \\ \cos 2\alpha=0 \end{cases} (a) \\ \begin{cases} \sin 2\alpha=\frac{15}{17} \\ \cos 2\alpha=\frac{8}{17}. \end{cases} (в) \end{array}\right. \quad в)\ \begin{cases} \sin 2\alpha=\frac{15}{17} \\ \cos 2\alpha=\frac{8}{17}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha\cos\alpha=\frac{15}{34} \\ 2\cos^2\alpha-1=\frac{8}{17}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\alpha>0 \\ \cos^2\alpha=\frac{25}{34} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\alpha>0 \\ 1+tg^2\alpha=\frac{34}{25} \end{cases} \Rightarrow tg\alpha=\frac{3}{5}.$$

<u>Ответ</u>: $\{-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}\}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases} \qquad ОДЗ: \begin{cases} y-6x\geq 0 \\ xy-6x-y-6\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-6b\geq 0 \\ ab\geq 0 \end{cases}$$

Пусть $y-6=a$; $x-1=b$., Тогда:

$$\begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}, \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-6b=\sqrt{ab}, \\ 9b^2+a^2=90. \end{cases} \underset{(\text{при ОДЗ})}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab, \\ 9b^2+a^2=90; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-4b)(a-9b)=0; \\ 9b^2+a^2=90; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b, \\ 9b^2+16b^2=90; \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b, \\ 9b^2+81b^2=90. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b, \\ b=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}; \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b, \\ b=\pm 1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=12\sqrt{0,4}, \\ b=3\sqrt{0,4}; \end{cases} \notin ОДЗ \\ \begin{cases} a=-12\sqrt{0,4}, \\ b=-3\sqrt{0,4}; \end{cases} \\ \begin{cases} a=9, \\ b=1; \end{cases} \\ \begin{cases} a=-9, \\ b=-1. \end{cases} \notin ОДЗ \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-6=-12\sqrt{0,4}, \\ x-1=-3\sqrt{0,4}; \end{cases} \\ \begin{cases} y-6=9, \\ x-1=1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=6-12\sqrt{\frac{2}{5}}, \\ x=1-3\sqrt{\frac{2}{5}}; \end{cases} \\ \begin{cases} y=15, \\ x=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Проверка.

$$\begin{cases} 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}-6+18\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)-6+18\sqrt{\frac{2}{5}}-6+12\sqrt{\frac{2}{5}}+6}, \\ 9\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2+\left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2-18+54\sqrt{\frac{2}{5}}-72+144\sqrt{\frac{2}{5}}=45; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\cancel{6}-\cancel{(12+18)\sqrt{\frac{2}{5}}}+36\cdot\frac{2}{5}\cancel{-6}+\cancel{(12+18)\sqrt{\frac{2}{5}}}}, \\ 9\left(1-6\sqrt{\frac{2}{5}}+9\cdot\frac{2}{5}\right)+36\cancel{-144\sqrt{\frac{2}{5}}}+144\cdot\frac{2}{5}-90+54\sqrt{\frac{2}{5}}\cancel{+144\sqrt{\frac{2}{5}}}=45; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{36\cdot\frac{2}{5}}, \\ \cancel{9}\cancel{-54\sqrt{\frac{2}{5}}}+81\cdot\frac{2}{5}\cancel{-9}-90+144\cdot\frac{2}{5}\cancel{+54\sqrt{\frac{2}{5}}}=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6\sqrt{\frac{2}{5}}=6\sqrt{\frac{2}{5}}, \\ (81+144)\cdot\frac{2}{5}=90; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{\frac{2}{5}}=6\sqrt{\frac{2}{5}}, \\ 90=90. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15-12=\sqrt{30-12-15+6}, \\ 36+225-36-180=45; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\sqrt{9}, \\ 225-180=45. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=3. \\ 45=45. \end{cases}$$

<u>Ответ</u>: $\left\{\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}};\ 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right);\ (2;15)\right\}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x-x^2>0 \Rightarrow |x^2-26x| = 26x-x^2$.

$\Leftrightarrow (26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{\log_5(26x-x^2)\log_5 12}+5^{\log_5(26x-x^2)}-5^{\log_5(26x-x^2)\log_5 13} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12^{\log_5(26x-x^2)}+5^{\log_5(26x-x^2)}-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12^{\log_5(26x-x^2)}+5^{\log_5(26x-x^2)} \geq 13^{\log_5(26x-x^2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5(26x-x^2) \leq 2 \Leftrightarrow 26x-x^2 \leq 25 \Rightarrow$ (+ ОДЗ)

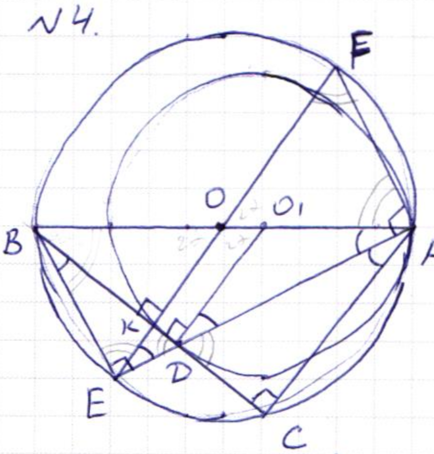
$\Rightarrow \begin{cases} x^2-26x+25 \geq 0, \\ x^2-26x<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-25)(x-1)\geq 0, \\ x(x-26)<0; \end{cases}$

0 1 25 26 x

$x \in (0;1] \cup [25;26)$.

<u>Ответ</u>: $(0;1] \cup [25;26)$.

№4.



Дано: $\Omega \cap \omega = A$, $|AB| = D$, $[BC] \cap \omega = D$, $[AD) \cap \Omega = \{A; E\}$, $\{A; B; C; D; E; F\} \subset \Omega$, $(FE) \perp (BC)$, $|CD| = 12$, $|BD| = 13$.

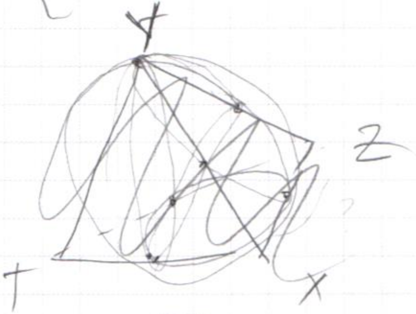
Найти: R, r, $\widehat{AFE}$, $S_{\triangle AFE}$.

Решение

(BC) - кас. к. $\omega \Rightarrow (O_1D) \perp (BC) \Rightarrow (O_1D) \parallel (EF) \Rightarrow$
$\Rightarrow \widehat{FEA} = \alpha = \widehat{O_1DA} = \widehat{O_1AD} \Rightarrow (BA) \cap (EF) = O$.
Пусть $(BC) \cap (EF) = K$. Тогда $\widehat{BEF} = \widehat{FAE} = 90^\circ$ (опир. на диаметр), $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (оп. на диаметр)
Из $\triangle KDE$ $\widehat{BDE} = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$ из $\triangle BED$ $\widehat{EBD} = \alpha$
$\Rightarrow$ из смежн. $\widehat{CDA} = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow$ из $\triangle ADC$ $\widehat{DAC} = \alpha$. Т.к. $[EF]$ - диаметр, $|BK| = |CD| = 12{,}5$.
Из $\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$ $24R = 25r$. В $\triangle ABC$: $[AD)$ - биссектриса $\Rightarrow$
$\Rightarrow |AC| : |AB| = |DC| : |DB| = 12 : 13 = \cos\widehat{BAC} = \cos 2\alpha$
$\cos 2\alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos\alpha = 5/\sqrt{26}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{26}$, $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}$. Из $\triangle ABC$
$|AB| = |BC| : \sin 2\alpha = 25 : \frac{5}{13} = 65 \Rightarrow R = 32{,}5 \Rightarrow r = 31{,}2$
В $\triangle AEF$ $|EF| = D = 65$, $\widehat{FEA} = \alpha$. $\Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}|EF|\cdot|AE|\cdot\sin\alpha = \frac{1}{4}\cdot|EF|^2\cdot\sin 2\alpha =$
$= \frac{1}{4}\cdot 4225\cdot\frac{5}{13} = 406{,}25$ кв. ед.

<u>Ответ</u>: $32{,}5$; $31{,}2$; $\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}$; $406{,}25$ (кв. ед.)

$$\begin{cases} \dfrac{-3b+2a+6-\sqrt{4a^2+24ab+9b^2+108a+72}}{6a} \le \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{a+51-\sqrt{a^2+102a+1305+72b}}{36} \le \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{-3b+2a+6+\sqrt{4a^2+24ab+9b^2+108a+72}}{6a} \ge 2 \\[2ex] \dfrac{a+51+\sqrt{a^2+102a+1305+72b}}{36} \ge 2 \end{cases}$$

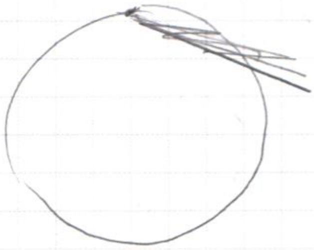


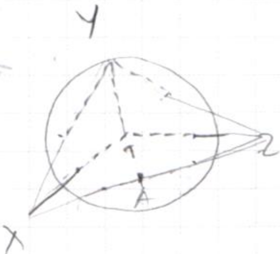
$XY = \sqrt{3}$

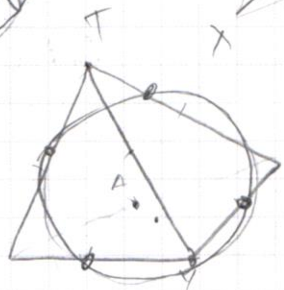
$TX = \sqrt{2}$

$TZ = 2.$

$XZ = 1$







$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)}=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2-18x+1+y^2-12y+36=45+1+36=82 \\ (3x+1)^2+(y-6)^2=82 \end{cases}$$

$y-6x\geq 0$

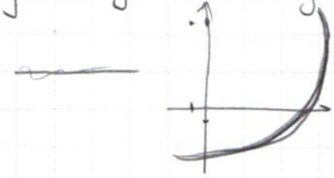
$(y-6x)^2=(x-1)(y-6)$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y-6$

$y^2-13xy+36x^2+6x+y+6$

$y^2+y+36x^2+6x-13xy+6 \mid 6x(2y-1)$

$y(y+1)+6x(6x+1)-13xy+6$



$y^2+y-13xy=-36x^2-6x-6$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$y^2+y(1-13x)=$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$(y-6)^2=82-(3x+1)^2$

$(y-6)^2=81-9x^2+18x$

$(3x+1)^2=49-y^2+12y$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+9+36=90$

$(3x-3)^2=9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$\times 225$
2
450

~~$|x^2-26x|$~~

$(26x-x^2)$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=45+9+36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6-6x+6=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab>0 \\ a-6b>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$12\times 3=9\times 4$

$$\begin{cases} \cancel{10-\frac{b^2}{9}} \\ a^2=10-\frac{b^2}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+36b^2=13ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$(a-9b)(a-4b)=0$

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2-13^{\log_5(26x-x^2)}\geq 0$

ОДЗ: $26x-x^2>0$

$12^2+5^2=13^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)-5^{\log_5 13\log_5(26x-x^2)}\geq 0$

~~$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)-(26x-x^2)^{\log_5 13}$~~

$5^{\log_5(26x-x^2)\cdot\log_5 12}$

~~$12^x+x-13^x\geq 0$~~

~~$12^{\log_5}$~~ $5^{\log_5(26x-x^2)}$

$(5^x)^{\log_5 12}+5^x-(5^x)^{\log_5 13}\geq 0$

$12^x+5^x-13^x\geq 0$

$12^x+5^x\geq 13^x$

~~$\log_{13}(12^x+5^x)\geq x$~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}. \end{cases}$

$1 + tg^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}. \end{cases}$

$\begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \\ \cos 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{15}{34}$

$2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha$

$\frac{34}{9} - 1 =$

$2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1)$

$2\cos^2\alpha = \frac{9}{17}$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$= \frac{25}{9}$ $\quad \frac{5}{3}$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{34}$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\beta)$

$\frac{1}{2\cos 2\beta} = \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos 2\beta = \begin{cases} \cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \end{cases}$

$\cancel{1-\cos}$

$\begin{cases} \sin^2\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{17}} \\ \cos^2\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}}} \\ \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}} \end{cases} \Rightarrow \quad \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + x) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\alpha + x = (-1)^{n-1}\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}}) + \pi n$

$\alpha = (-1)^{n-1}\frac{\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}})}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\pi n}{2}$

74874 | 2
37437 | 3
12479 | 7

$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot 2\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \end{cases}$ $\quad 2\cos 2\beta = \frac{2}{17}\cdot\sqrt{17} = \frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot (\pm\frac{4}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \cdot\sqrt{17}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$ $\quad 2\sin\alpha\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 1$

1) $\begin{cases} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \end{cases}$

$\sin 2\alpha = -1 - 4\cos 2\alpha$

$1 + 8\cos 2\alpha + 17\cos^2 2\alpha = 1$

$8\cos 2\alpha = -17\cos^2 2\alpha$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow tg\alpha = -1$

$2\alpha = \pi - \arcsin\frac{15}{17} + 2\pi n$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = -1 \\ \cos 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{32-17}{17} = \frac{15}{17} \end{array}\right.$

$\begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \\ \cos 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{15}{17} \\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin\alpha = \\ \cos\alpha = \end{cases}$

$\sin 2\alpha = 4\cos 2\alpha - 1$

$17\cos^2 2\alpha = 8\cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = 0 \quad \cos 2\alpha = \frac{8}{17}$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = \frac{8}{17} \\ \sin 2\alpha = - \end{array}\right.$

$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \frac{8}{17}$

$4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{225}{289}$

$4\cos^2\alpha(\cos^2\alpha + \frac{8}{17}) = \frac{225}{289}$

$4\cos^4\alpha + 32\cos^2\alpha - \frac{225}{289} = 0$

$\frac{D}{4} = 256 + \frac{900}{289} = \frac{74874}{289}$

$17 \cdot 17 = 289$; $16 \cdot 16 = 256$; $256 \cdot 289 = 73984$; $73984 + 900 = 74884$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$

$\cancel{5^{\log_5(26x-x^2)\log_5 12}+5^{\log_5}}$

$\cancel{(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)-(26x-x^2)^{\log_5 5}\geq 0}$

$\log_5(26x-x^2)\leq 2$

$26x-x^2\leq 25$

$x^2-26x+25\geq 0$

$\begin{cases}(x-25)(x-1)\geq 0\\ x(x-26)<0\end{cases}$

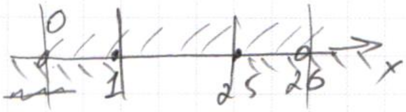
$12^x+5^x-13^x\geq 0$

$12^x+5^x\geq 13^x$

$\log_{13}(12^x+5^x)\geq x$

$12^3=144\cdot 12 = 288 + 144 = 1728$; $1728+125=1843$

$13^3=169\cdot 13=507+169=2197$ $\quad 5^3=125$

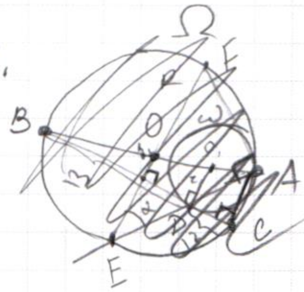


$(0;1]\cup[25;26)$

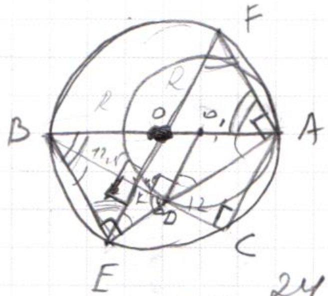
$\cancel{\log_{13}}$ $x=\log_{13}a$ $\quad x=\log_5 c$ $\quad \log_a 13=\frac{1}{x}$

$x=\log_{12}b$ $\quad b+c\geq a$

4.



Найти: $R, r, \alpha, S_{\triangle AEF}$. $\log_{13}a=\frac{\log_5 a}{\log_5 13}$



$24R-12r=13r$

$r=\frac{24}{25}R$

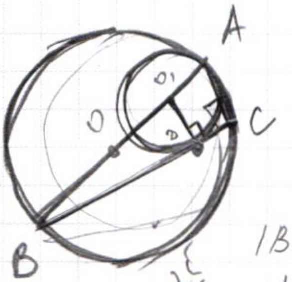
$|BD|=13$

$|DC|=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|BO_1|}{|O_1A|}=\frac{13}{12}=\frac{2R-r}{r}\Rightarrow$

$\Rightarrow r=\frac{24}{25}R$

$\alpha=30^\circ$



$|BK|=|KC|=12,5$, $|KD|=0,5$

$\cancel{\frac{12,5}{R}=\frac{0,5}{R-r}}\Rightarrow \cancel{R=25R-r}$

$64 \cdot 64 = 256 + 384 = 4096$; $4096 : 4 = 1024$

$325 \cdot 13 = 975 + 325 = 4225$; $4225 : 4 \cdot 162,5 = 406,25$

$2\cos^2\alpha-1=\frac{12}{13}$

$2\cos^2\alpha=\frac{25}{13}$

$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{26}}$

$\frac{24}{25}\cdot\frac{5}{2}=\frac{12\times13}{4}$

$\frac{13}{12}\cdot\frac{12}{13}$; $13\cdot 12=156$; $166 : 5 = 33,2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

5. $f(x)$. $D(x) = [0; +\infty)$

$12^x + 5^x \leq 13^x$

$f(ab) = f(a) + f(b)$. $f(p) = [p/4]$.

$x \leq 2$

$x \in [4; 28]$.

$y \in [4; 28]$.

$\frac{x}{4y}$ ~~$12^x + 5^x \leq 13^x$~~

$f(x/y) < 0$

$f(xy) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$x > 0$

$y > 0$

$3x+2 > 0$ при

6. $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$

$x > \frac{2}{3}$

$x \in (\frac{2}{3}; 2]$.

ОДЗ: $3x - 2 \neq 0$ $x \neq \frac{2}{3}$

$$\begin{cases} \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \\ 18x^2 - 51x + 28 \leq ax + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8-6x-(ax+b)(3x-2)}{3x-2} \geq 0 \\ 18x^2 - (51+a)x + 28 - b \leq 0 \\ x \in (\frac{2}{3}; 2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 - 6x - 3ax^2 - (3b-2a)x + 2b \geq 0 \\ 18x^2 - (a+51)x + 28 - b \leq 0 \\ x > \frac{2}{3} \\ x \leq 2. \end{cases}$$

[redacted]

~~$D = (a+$~~

b 8 6

b 6

$51 \cdot 51 = 51 + 255 = 2601$

$72 \cdot 28 = 576 + 72 = 1296$

$$\begin{cases} 3a \cdot x^2 + (3b - 2a + 6)x - (2b + 8) \leq 0 \\ 18x^2 - (a+51)x + (28 - b) \leq 0 \end{cases}$$

$D_1 = (3b - 2a + 6)^2 + 12a(2b+8) = 9b^2 - 6(2a-6) + (2a+6)^2 + 12a(2b+8) =$
$= 9b^2 - 12a + 36 + 4a^2 + 24a + 36 + 24ab + 96a = 4a^2 + 108a + 9b^2 + 24ab + 72$

$D_2 = (a+51)^2 - 72(28 - b) = a^2 + 102a + 2601 - 1296 + 72b$.

$D_2 = a^2 + 102a + 1305 + 72b$

$D_1 = 4a^2 + 24ab + 9b^2 + 108a + 72$

$3 \times 2 + 4$

$f(\frac{x}{y})$ $\frac{x}{y} \in [\frac{1}{7}; 7]$. $f(\frac{x}{y}) < 0$.

$x \in [\frac{-(3b-2a-6) - \sqrt{D_1}}{6a}; \frac{-(3b-2a-6) + \sqrt{D_1}}{6a}]$

$x [\frac{(a+51) - \sqrt{D_2}}{36};$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА