МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

✓

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

✓

✓ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$ ОДЗ: $x \in (0;26)$

$12^{\log_5(26x-x^2)} + 26x - x^2 \geqslant 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$12^{\log_5(26x-x^2)} + 5^{\log_5(26x-x^2)} \geqslant 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$t = \log_5(26x-x^2)$

$12^t + 5^t \geqslant 13^t \Rightarrow 12^t + 5^t = 13^t$ при $t=2 \Rightarrow$

↑ возрастает ↑ возрастает

$\Rightarrow 12^t + 5^t \geqslant 13^t$ при $t \leqslant 2$

$\log_5(26x - x^2) \leqslant 2$

$x^2 - 26x + 25 \geqslant 0$ $x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = [p/4]$ при p - простом

Тогда $f(1) = 0$, т.к $f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$

$f(2) = f(3) = 0$; $f(5) = f(7) = 1$; $f(11) = 2$; $f(13) = 3$;

$f(17) = f(19) = 4$; $f(23) = 5$

Р-им $f\left(\frac{x}{y}\right)$:

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + (f(1) - f(y)) = f(x) - f(y)$

$f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$ в разложении x сумма f(простых множителей) меньше, чем в разложении y

~~Составим таблицу:~~

~~$f(x)=0$ $f(x)=1$ $f(x)=2$ $f(x)=3$ $f(x)=4$~~

Тогда:

$f(x)=5$ при $x\in\{23\}$

$f(x)=4$ при $x\in\{17;19\}$

$f(x)=3$ при $x\in\{13;26\}$

$f(x)=2$ при $x\in\{11;22;25\}$

$f(x)=1$ при $x\in\{5;7;10;15;14;20;21;\cancel{25};28\}$

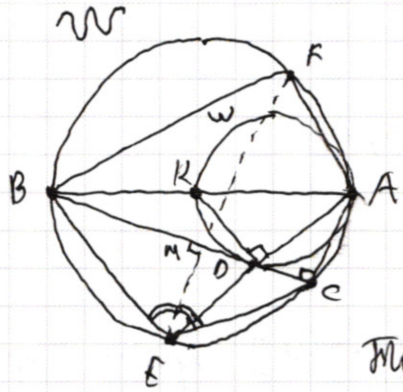
$f(x)=0$ при $x\in\{4;6;8;9;12;16;18;24;27\}$

$24+22+22+20+20+17\cdot3+9\cdot8=24+44+40+51+72=$

$=231$

Ответ: $\boxed{231}$

N4.



$\angle ACB=90^\circ$ т.к опир на диаметр

AK - диаметр $w \Rightarrow \angle ADK=90^\circ$

$\angle AKD=\angle ADC \Rightarrow \angle DAC=\angle KAD \Rightarrow AD$ - бис $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{DC}=\frac{AB}{BD}=AC=\frac{12}{13}AB$

Тогда: $\sqrt{AB^2-AC^2}=BC$

$\sqrt{x^2+\left(\frac{12}{13}x\right)^2}=25$

$\frac{5}{13}x=25 \Rightarrow x=65 \Rightarrow \boxed{R_W=32,5}$

$BD^2=AB\cdot BK=D_W\cdot(D_W-D_w) \Rightarrow D_w=D_W-\frac{BD^2}{D_W}=$

$=\frac{65\cdot65-13^2}{65}=62,4 \Rightarrow \boxed{R_w=31,2}$

т.к $\angle EAC=\angle EAB \Rightarrow EC=BE$

$\angle BFE=\angle BAE$

$\angle BFA=90^\circ$ (опир на D_W) $\Rightarrow \angle AFE=90^\circ-\frac{\angle BAC}{2}=$

$=90^\circ-\frac{\arcsin\frac{25}{65}}{2}=\boxed{90^\circ-\frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2}}=$

$EF\perp BC \Rightarrow EF\parallel AC$

т.к $BE=EC \Rightarrow EF$ - медиана ~~треуг~~ и биссектриса.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot EF\cdot MC = \frac{1}{4} EF\cdot BC$$

$$BE = BA\cdot \sin\angle BAE = EC \Rightarrow EM = \sqrt{BA^2\sin^2\angle BAE - MC^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MF = \frac{BM\cdot MC}{\sqrt{BA^2\cdot\sin^2\angle BAE - MC^2}} \Rightarrow S = \frac{BC}{4}\cdot\left(\frac{BM\cdot \cancel{BC}}{\sqrt{BA^2\cdot\sin^2\angle BAE - MC^2}} + \sqrt{BA^2\sin^2\angle BAE - MC^2}\right)$$

$$= \frac{25}{4}\left(\frac{25}{4\cdot\sqrt{65^2\cdot\frac{144}{3744} - \frac{625}{4}}} + \sqrt{65^2\cdot\frac{144}{3744} - \frac{625}{4}}\right) =$$

$$= \frac{25}{4}\left(\frac{25}{4\cdot\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}\cdot\left(\frac{25}{10} + \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}(5) = 31{,}25$$

Ответ: $R_{W} = 32{,}5$; $R_w = 31{,}2$; $\angle = 90^\circ - \frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}$;

$S = 31{,}25$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

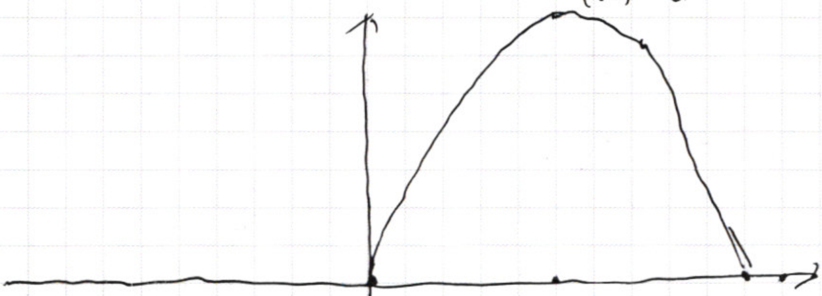
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$12^{\log_5(26x-x^2)}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26-x^2)}$

$26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26-x^2)}-12^{\log_5(26-x^2)}$

(13; 169)



$\frac{26x-x^2}{12^{\log_5(26-x^2)}} \geq 13^{\log_5(26-x^2)}-1$

$\frac{26x-x^2+12^{\log_5(26-x^2)}}{12^{\log_5(26-x^2)}} \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\log_5(26x-x^2+12^{\log_5(26x-x^2)})-\log_5(26x-x^2)\log_5(12) \geq \log_5(26x-x^2)\cdot\log_5 13$

$\log_5(\ldots) \geq \log_5(26x-x^2)\cdot\log_5(156)$

$26x-x^2+12^{\log_5(26-x^2)} \geq (26x-x^2)^{\log_5(156)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)^1-(26x-x^2)^{\log_5 13} \geq 0$

~~$(26x-x^2)^{\log_5 5}((26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}}+1$~~

$(26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}}+1 \geq (26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}}$

~~$1 \geq (26x-x^2)^{\log_5}$~~

$12^{\log_5(26x-x^2)}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$12^{\log_5(26x-x^2)}+5^{\log_5(26x-x^2)} \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$12^x+5^x \geq 13^x$

$\log_5(26x-x^2) \leq 2$

$26x-x^2 \leq 25$

$x^2-26x+25 \geq 0$

$x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$

~~13^3~~ $=$

$\times\begin{array}{r}144\\13\\\hline +288\\144\\\hline 1728\end{array}$

$\times\begin{array}{r}1728\\225\\\hline 1853\end{array}$

$\times\begin{array}{r}169\\13\\\hline +507\\169\\\hline 2197\end{array}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$x=1 \quad (y-6)^2=90 \quad y-6=\pm\sqrt{90} \quad y=\pm\sqrt{90}+6$

$y=6 \quad 9(x-1)^2=90 \quad (x-1)^2=10 \quad x=\pm\sqrt{10}+1$

$(1;6)$ – центр эллипса

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1)=0=f(2)=f(3)=f(4)=\cancel{f(5)}=f(6)=\cancel{f(7)}=f(8)=f(9)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{x}{y}\in\left[\frac{1}{7};7\right]$

$1=y\cdot\frac{1}{y}$

$f\left(y\cdot\frac{1}{y}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=0-f(y)=-f(y)$

$\cancel{f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(6)=0}$

$\cancel{f(5)=f(7)=1}$

$f(11)=2 \quad f(13)=3 \quad f($

$\boxed{\begin{aligned} &f(1)=f(2)=f(3)=0 \\ &f(5)=f(7)=1 \\ &f(11)=2 \\ &f(13)=3 \\ &f(17)=f(19)=4 \\ &f(23)=5 \end{aligned}}$

~~$f(4)=0 \quad f(5)=1$~~

$f(1)=18-51+28=-5$

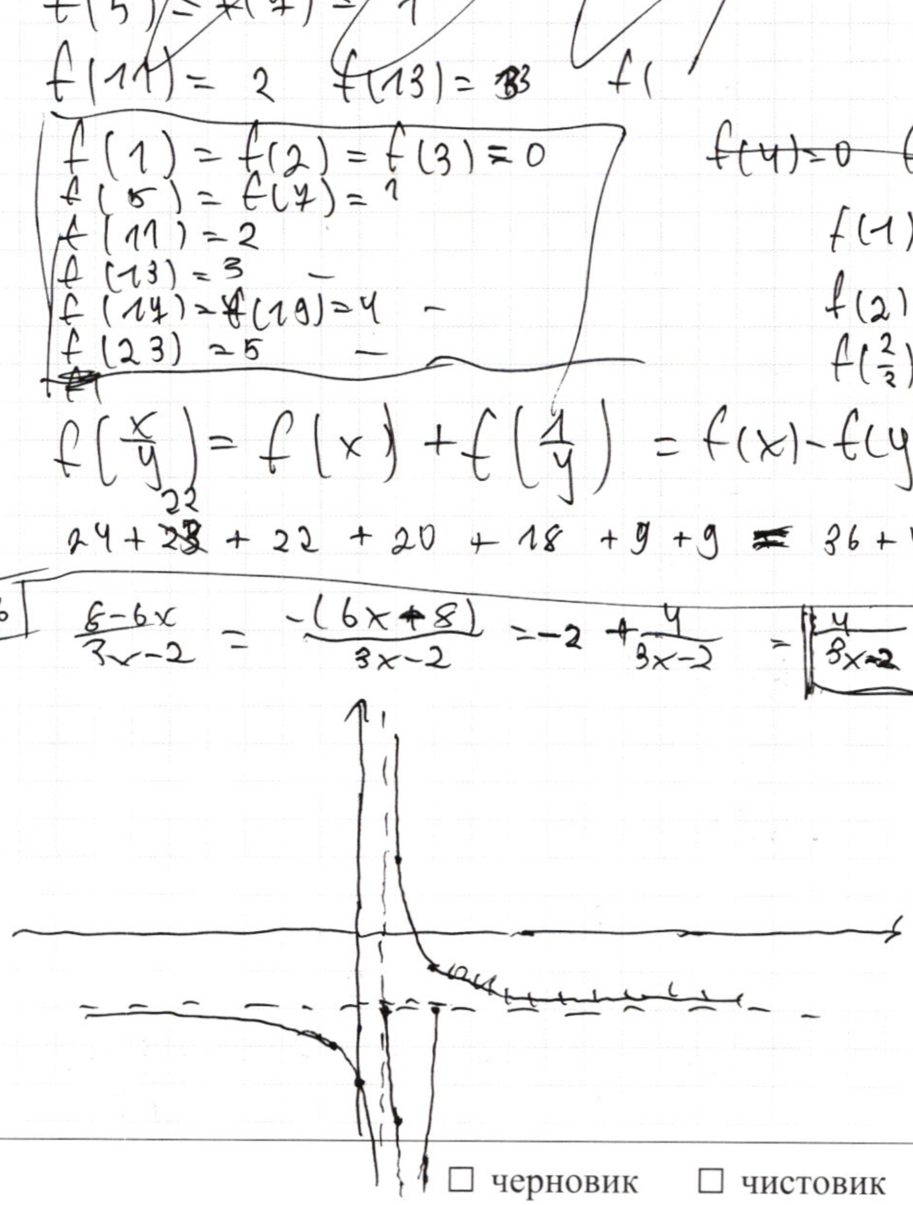
$f(2)=4\cdot18-102+28$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=4-34+28=-2$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$24+\cancel{23}^{22}+22+20+18+9+9=36+44+44=68+36=124$

№6 $\frac{6-6x}{3x-2}=\frac{-(6x-8)}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}=\boxed{\frac{4}{3x-2}-2}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$

$\boxed{x\in(0;26)}$

$$a^{\log_b c}=a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}}=c^{\log_b a}$$

$$12^{\log_5|x^2-26x|}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}-12^{\log_5(26x-x^2)}$$

$-\dfrac{25}{65}$ = $\cancel{\dfrac{5}{13}}$

$$t \geq 13^{\log_5 t}-12^{\log_5 t} \qquad t>0$$

$26x-x^2$ $\boxed{13}$ $26\cdot13-13^2=13\cdot13=\boxed{169}$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$-\dfrac{125}{12}\Big|\dfrac{4}{31{,}25}$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=\underline{45+9+36}$

$\sqrt{y(x-1)-6(x-1)}=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

~~$62\cdot62=62\cdot60+62\cdot2=$~~

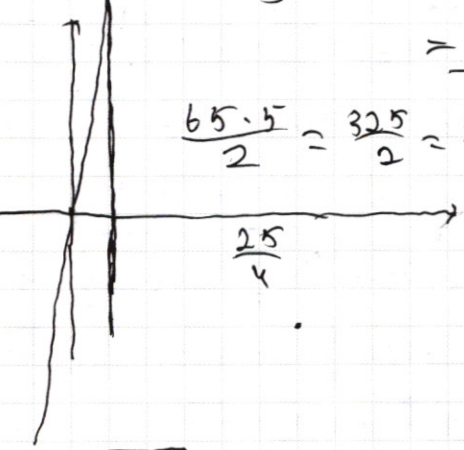
~~$=3720+124$~~

$\dfrac{144}{3744}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{65\cdot5}{2}=\dfrac{325}{2}=\dfrac{650}{4}$

$-\dfrac{3744}{288}\Big|\dfrac{144}{26}$

$-\dfrac{864}{864}$



$\dfrac{25}{4}$

$\times\dfrac{65}{65}$

325

390

$\boxed{4225}$

$-\dfrac{4225}{169}$

4056

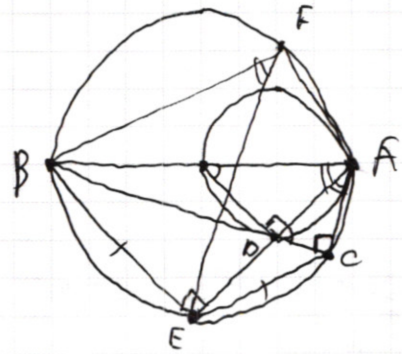
$-\dfrac{4056}{390}\Big|\dfrac{65}{62{,}4}$

$-\dfrac{156}{130}$

$-\dfrac{260}{260}$

0

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$



$13^2=D_{w_1}\cdot(D_{w_1}-D_{w_2})$

$AC=60$ $AD=\sqrt{60^2+12^2}=$

$=\sqrt{3600+144}=\sqrt{3744}$

$\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{BD}{AB} \Rightarrow$ ~~$CD=BD$~~ $AC=\dfrac{CD}{BD}AB$

$\sqrt{x^2+\left(\dfrac{12}{13}x\right)^2}=25$ arcsin ^{2}

$\dfrac{x}{\sqrt{13}}=25 \Rightarrow x=25\sqrt{13}$

$$25\sqrt{13}\,(25\sqrt{13}-x)=13^2$$

$$x=25\sqrt{13}-\frac{13^2}{25\sqrt{13}}=\frac{25^2\cdot13-13^2}{25\sqrt{13}}=\frac{13\cdot(25^2-13)}{25\sqrt{13}}=$$

$=\boxed{\dfrac{612\sqrt{13}}{25}}$ $\boxed{25\sqrt{13}}$ $\Rightarrow R_1=\dfrac{25\sqrt{13}}{2}$ $R_2=\dfrac{306\sqrt{13}}{25}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha)\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta-\alpha) = \sin\alpha + \sin\alpha\cos(\beta-\alpha) + \sin(\beta-\alpha)\cdot\cos\alpha =$

$= \sin\alpha + \cancel{\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha} + \sin^2\alpha\sin\beta + \sin\beta\cos^2\alpha - \cancel{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta}$

$\cancel{\sin\alpha+\sin\beta}$

$\cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin}$

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$ ~~$2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin\beta\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}$~~ $- \sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin\beta\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\beta\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}$

$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) =$

$= \sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin\beta\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin\beta\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin\alpha\sin^2\frac{\beta}{2} = \boxed{\sin\alpha - \sin\beta}$

~~$\sin\alpha+\sin\beta = \sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}$~~

$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

~~$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$~~

~~$4x + \sqrt{1-x^2} = -1$~~

~~$1-x^2 = 1+8x+16x^2$~~

~~$17x^2+8x=0 \quad x_1=0 \quad x_2=\frac{8}{17}$~~

$\sin(2\alpha+2\beta) + \cos 2\beta = \sin(2\alpha+2\beta) + \sin(90-2\beta) = 2\sin(\alpha+45^\circ)\cos(\alpha+2\beta-45^\circ) = 0$

$\underset{-1}{}\qquad\underset{-1}{}$

$\sin(\alpha+45^\circ)=0 \qquad \alpha+45^\circ=\pi n \qquad \alpha=135^\circ \qquad \alpha=315^\circ$

$\alpha+2\beta-45^\circ = \frac{\pi}{2}+\pi n$

$\alpha+2\beta = 135^\circ \qquad \alpha = 135-2\beta = 135^\circ - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

~~$\alpha+2\beta=$~~

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)