МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

① $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

② $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot (2\sin 2\beta \cos 2\beta) +$
$+ \sin 2\alpha = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta) +$
$+ \cancel{\sin 2\alpha} - \cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{2}{17}$

Из ② следует, что $2\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cancel{2}\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{\cancel{2}}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 2\beta = \frac{1}{\cos^2 2\beta} - 1 = 16 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\beta = \pm 4$.

Тогда $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\cos 2\beta$. Т.к. $\sin(2\alpha+2\beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha - 2\beta)$, то

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha - 2\beta\right) = -\cos 2\beta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha - 2\beta\right) + \cos 2\beta = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2\alpha - \cancel{2\beta} + \cancel{2\beta}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2\alpha - 2\beta - 2\beta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha - 2\beta\right) = 0\end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} - \alpha - 2\beta = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k \; (\neq \frac{\pi}{2} + \pi r) \text{ очев.}, r \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -2\beta - \frac{\pi}{4} + \pi n\end{array}\right.$

Т.к. $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\alpha = -2\beta - \frac{\pi}{4} + \pi n \neq \frac{\pi}{2} + \pi z$, $z \in \mathbb{Z}$. Тогда каждое найденное знач. α нас удв и искомые знач. $\operatorname{tg}\alpha$ равны:

1) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4} + \pi k) = -1$, 2) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-2\beta - \frac{\pi}{4} + \pi n) =$

$= tg(+2\beta + \frac{\pi}{4}) = \frac{tg(2\beta) + tg(\frac{\pi}{4})}{1 - tg(2\beta)\cdot tg(\frac{\pi}{4})} = \left[\begin{array}{l} \frac{4+1}{1-4\cdot 1} = -\frac{5}{3} \\ \frac{-4+1}{1+4\cdot 1} = \frac{-3}{5} \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha \in \{-1; -\frac{5}{3}; -\frac{3}{5}\}$.

№2

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-6) - 6(x-1) = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ (y-6)^2 + 9(x-1)^2 = 45 + 36 + 9 \end{cases}$

Огранич.: $\begin{cases} (y-6) - 6(x-1) \geq 0 \\ (y-6)(x-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 6 \geq 6(x-1) \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-6 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-6 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$

Сделаем замену $a = y - 6$, $b = x - 1$. Тогда система примет вид:

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$ Т.к. огранич. уже прописаны, то первую строку можем возвести в квад.:

(1) $(a-6b)^2 = a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \Rightarrow$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$(a-9b)(a-4b) = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = 9b \\ a = 4b \end{array}\right.$ Т.к. $a \geq 6b$, то и $\left[\begin{array}{l} a = 9b \geq 6b \Rightarrow b \geq 0 \quad (I) \\ a = 4b \geq 6b \Rightarrow b \leq 0 \quad (II) \end{array}\right.$

Тогда (I): $a^2 + 9b^2 = 81b^2 + 9b^2 = 90b^2 = 90 \Rightarrow$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1. \Rightarrow a = 9$

(II): $a^2 + 9b^2 = 16b^2 + 9b^2 = 25b^2 = 90 \Rightarrow$

$b^2 = \frac{18}{5} \Rightarrow b = -\sqrt{\frac{18}{5}} \Rightarrow a = -4\sqrt{\frac{18}{5}}$

Тогда $\begin{cases} b = 1 \\ a = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases}$ и $\begin{cases} b = -\sqrt{\frac{18}{5}} \\ a = -4\sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{18}{5}} + 1 \\ y = -4\sqrt{\frac{18}{5}} + 6 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{18}{5}} + 1 \\ y = -4\sqrt{\frac{18}{5}} + 6 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Огранич.: $\begin{cases} |x^2-26x|>0 \Rightarrow x \neq 0;\ 26 \\ 26x-x^2>0 \Rightarrow x \in (0;26) \end{cases}$

Т.к. $26x-x^2>0$, то $|x^2-26x| = 26x-x^2$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12} + (26x-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)} =$$

$$= (26x-x^2)^{\log_5 13}$$

$t = 26x-x^2$, $t>0$.

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$; $\ \Big| : t^{\log_5 12}$

$1 + t^{1-\log_5 12} = 1 + t^{\log_5 \frac{5}{12}} \geq t^{\log_5 \frac{13}{12}}$.

Т.к. $\frac{13}{12}>1$, то $\log_5 \frac{13}{12} > 0$. Т.к. $\frac{5}{12}<1$, то $\log_5 \frac{5}{12} < 0$. Вследствие этого, т.к. $f(x)=x^a$, где $a<0$, — мон. убыв. функция, а $g(x)=x^a$, где $a>0$, — мон. возраст. функция, ~~то данное нер-во~~ ~~то по теореме они имеют не более одного пересечения~~ и по теореме $f(x)$ и $g(x)$ имеют не более одного пересечения, функции $\alpha(t) = 1 + t^{\log_5 \frac{5}{12}}$ и $\beta(t) = t^{\log_5 \frac{13}{12}}$ имеют также не более одного пересечения. Но т.к. $\alpha(0)=1>\beta(0)=0$,

они имеют ровно одно пересечение на уч. $t \in (0; +\infty)$. Заметим, что $\alpha(25) = 1 + 25^{\log_5 \frac{5}{12}} =$
$= 1 + \left(5^{\log_5 \frac{5}{12}}\right)^2 = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144} = \left(\frac{13}{12}\right)^2 = \left(5^{\log_5 \frac{13}{12}}\right)^2 =$
$= 25^{\log_5 \frac{13}{12}} = \beta(25)$. В силу того, что $\alpha(0) > \beta(0)$, $\alpha(25) = \beta(25)$, ~~...~~ $\alpha(t)$ - мон. убыв. ф. и $\beta(t)$ - мон. возраст. ф., можем сказать, что $\alpha(t) \geq \beta(t)$ при $t \in [0; 25]$.

По усл. $t > 0 \Rightarrow t \in (0; 25]$.

Тогда $26x - x^2 \in (0; 25] \Rightarrow$

$0 < 26x - x^2 \leq 25$

по ограничениям

$26x - x^2 \leq 25$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$(x-1)(x-25) \geq 0$

$x \in (-\infty; +1] \cup [25; +\infty)$.

~~Объединив~~ Пересекая полученный промежуток с промежутком из ограничений, получим ~~...~~ $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$.

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$.

№5

Пусть $k = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, где $k \in \mathbb{N}$, p_i - простые числа, а ~~$\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$~~ $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Тогда $f(k) = f(p_1^{\alpha_1}) + f\left(\frac{k}{p_1^{\alpha_1}}\right) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + f\left(\frac{k}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}}\right) = \ldots = \sum_{i=1}^{n} f(p_i^{\alpha_i})$

Заметим, что по той же логике $f(p^\alpha) = f(p) + f(p^{\alpha-1}) = \ldots = \alpha \cdot f(p) = \alpha\left[\frac{p}{4}\right]$, где p - простое, а $\alpha \in \mathbb{N}$. Тогда $f(k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\frac{p_i}{4}\right]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Теперь заметим, что $f(x) = f(\frac{x}{y} \cdot y) = f(\frac{x}{y}) + f(y) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

Нужно, чтобы $f(\frac{x}{y}) < 0$, т.е. $f(x) < f(y)$.

Давайте выпишем все $4 \leq p \leq 28$, p-простое.

p:	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$[\frac{p}{4}]$:	0	0	1	1	2	3	4	4	5
α_{max}:	4	3	1	1	1	1	1	1	1

— максимальная степень вхождения данного простого числа в число m, $4 \leq m \leq 28$

Заметим, что $\forall x \in N$, $4 \leq x \leq 28$, $f(x) \leq 5$.

Тогда давайте переберем все варианты для значений $f(x)$:

$f(x) = 5$: $x = 23$ — всего 1; $f(x) = 3$: $13; 2 \cdot 13$ — всего — 2

$f(x) = 4$: $x = 19; 17$ — всего 2; $f(x) = 2$: $11; 2 \cdot 11; 5^2$ — всего 3

$f(x) = 1$: $5; 7; 2 \cdot 5; 3 \cdot 5; 2 \cdot 7; 3 \cdot 7; 2^2 \cdot 5; 2^2 \cdot 7$ — всего 8 → все числа вида $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \leq 28$ или $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma \leq 28$, $\alpha, \beta \in N \cup \{0\}, \gamma \in N$

$f(x) = 0$: $4; 6; 12; 18; 16; 27; 9; 24; 8$ — всего 9 → все числа вида $2^\alpha \cdot 3^\beta \leq 28$

Из этих соображений посчитаем кол-во пар $(x; y)$

$f(y) = 5$: $2 + 2 + 3 + 8 + 9 = 24$ вар. для x

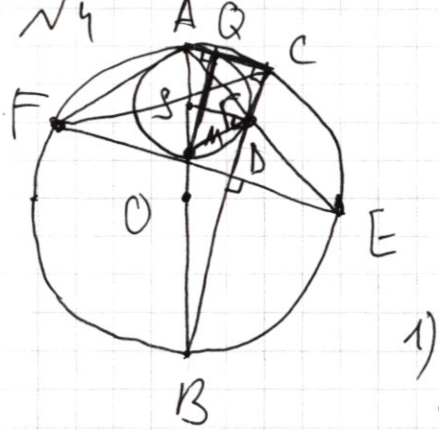
$f(y) = 4$: $2 + 3 + 8 + 9 = 22$ вар. для x

$f(y) = 3$: $3 + 8 + 9 = 20$ вар. для x

$f(y) = 2$: $8 + 9 = 17$ вар для x; $f(y) = 1$: 9 вар для x; $f(y) = 0$: 0 вар.

Ответ: $24+22+20+\overset{26}{17}+9 = 92$ пары.

№4



$\omega \cap AC = Q$

ц. ω – S

ц. Ω – O

$\omega \cap AB = A, M$

$BD = 13$, $CD = 12$

рад. $\omega = r$ $\angle BAD = \alpha$

рад. $\Omega = R$

1) В силу сим., A, S, O, B леж. на AB. Также т.к. AB – д. Ω, то $\angle ACB = 90°$, и т.к. AM – д. ω, то $\angle AQM = 90°$.

2) $\triangle ABC \sim \triangle SBD$ по 2 углам ($\angle ABC$ – общ. и оба тр. прямоуг.) $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BS}{AB} = \frac{13}{25} = \frac{2R-\cancel{2}r}{2R} \Rightarrow$

$24R = 25r$

$\triangle MAQ \sim \triangle BAC$ по 2 углам ($\angle BAC$ – общ. и оба прямоуг.) $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{2r}{2R} = \frac{24}{25}$.

3) По т. о степени точки: $CD^2 = AC \cdot QC = AC \cdot (AC - AQ) = 144 \Rightarrow$

$\frac{AQ}{AC} = \frac{24}{25}$ и $AC(AC-AQ) = 144$

$\Leftrightarrow AQ = \frac{24}{25}AC \Rightarrow AC \cdot \frac{1}{25}AC = 144$

$AC^2 = (12 \cdot 5)^2$

$AC = 12 \cdot 5 = 60 \Rightarrow AQ = \frac{24}{25} \cdot 60$

4) По т. Пифаг.: $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{25^2 + 12^2 \cdot 25} = 5 \cdot 13 = 65 \Rightarrow AM = \frac{24}{25} \cdot 65 = \frac{24 \cdot 13}{5}$

Ответ: $R = \frac{AB}{2} = \frac{65}{2}$, $r = \frac{AM}{2} = \frac{156}{5}$.

5) $\measuredangle MD$. Т.к. ADM опир на д. ω, то $\angle ADM = 90°$. Тогда $\angle AMD = 90 - \alpha$. По т. об угле между кас. и хордой, $\angle AMD = \angle ADC = 90 - \alpha \Rightarrow \angle DAC = \alpha$. Тогда $\angle DAC = \frac{\angle BAC}{2}$, т.к. $\angle CFE$ опир.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на ту же дугу Ω, что и $\angle EAC$ (он же $\angle DAC$), то $\angle CFE = \angle EAC$. Из тех же соображ., $\angle AFC = \angle ABC$.

б) Из $\triangle ABC$: $\sin\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{60}{65} = \frac{12}{13}$

$\sin\angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$

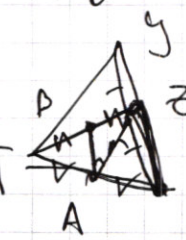
Тогда $\angle ABC = \arcsin\frac{12}{13}$, $\angle BAC = \arcsin\frac{5}{13} \Rightarrow$

$\cancel{\angle EAC}$ $\angle CFE = \frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2}$, $\angle AFC = \arcsin\frac{12}{13} \Rightarrow$

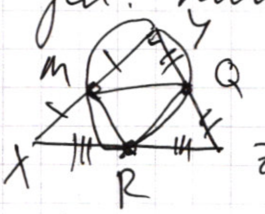
$\angle AFE = \angle CFE + \angle AFC = \arcsin\frac{12}{13} + \frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2}$

Ответ: $\angle AFE = \arcsin\frac{12}{13} + \frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2}$.

№6



1) Рассм. плоскость сечения сферы из усл. плоскостью (YZX):



в сеч. получится окружность, проход. через Y, Q, R, M. Но $\triangle RMQ$ — серединный и по теореме $\angle MRQ = \angle XYZ \Rightarrow$

сер. сторон (см. рис.)

Т.к. чет-ник $RMYQ$ — вписс, то $\angle MRQ + \angle XYZ = 180^\circ \Rightarrow \angle XYZ = 90^\circ$.

2) Т.к. MQ — ср. линия в $\triangle XYZ$, то $MQ \parallel XZ$. Но из-за того же $AB \parallel XZ$. Если рассм. сечение сферы из усл. плоскостью (AMQ), то

обнаружим в ней вписанный чет-ник с рав-
ными и параллельными противопол. стор. ⇒
$MQBA$ - прямоугольник. ⇒ т. к. $MQ \perp AQ$,
то $TY \perp XZ$.

~~3) Из (1) ⇒ YB = MQ ⇒ YB = ½ XB ⇒~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

1 ✓ 4 7
2 ✓ 5 ✓
3 ✓ 6

[redacted]

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \, 2\cdot\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha =$
$= \cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}} -\frac{2}{17}$

$2\cos^2 2\beta - 1$

$\cancel{2}\cos^{\cancel{4}} 2\beta \sin(2\alpha + 2\beta) = \cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}} -\frac{\cancel{2}1}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\cos 4\beta = \frac{2}{17} - 1 =}$

$-\frac{15}{17} = \cos 4\beta$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \cos(90 - 2\alpha - 2\beta) =$

$= -\cos 2\beta = \cos(180 - 2\beta)$

$90 - 2\alpha - 2\beta = \pm(180 - 2\beta) + 2\pi k$

$\left[\begin{array}{l} 90 - 2\alpha - 2\beta = 180 - 2\beta + 2\pi k \\ 90 - 2\alpha - 2\beta = -180 + 2\beta + 2\pi k \end{array}\right.$

$+2\alpha = -4\beta + 270 + 2\pi k$

$x(y-6) - (y-6)$

$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$

$\sqrt{(y-6)(x-1)} + y - 6x =$

$= y - 6 - 6x + 6 =$

$= (y-6) - 6(x-1)$

$9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$

$36 + 9$

$\cancel{3(x}\ (y-6)^2 + \cancel{18x}\ 9(x-1)^2 = 2\cdot 36 + 2\cdot 9$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

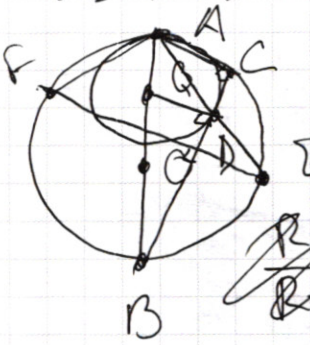
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$1 + t^{1-\log_5 12} \geq t^{\log_5 13 - \log_5 12}$



$CD = 12$

$BD = 13$

$1 + t^{\log_5 \frac{5}{12}} \geq t^{\log_5 \frac{13}{12}}$

$t = 25$

$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} = n$

$f(n) = \alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \alpha_n \left[\frac{p_n}{4}\right]$

$-\frac{12}{(3x-2)^2}$

	4	2	1	1	1	1	1	1	1
p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$\left[\frac{p}{4}\right]$	0		1		2	3	4		5

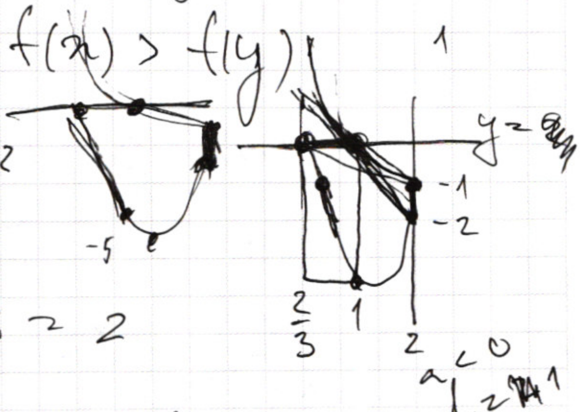
$f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) - f(x) < 0$

$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$f(x) > f(y)$

$18 \cdot 4 - 102 + 28 = -2$



$= ax + b$

$\frac{51}{36}$

$17 \cdot \frac{2}{3} + 28 = 2$

$a < 0$

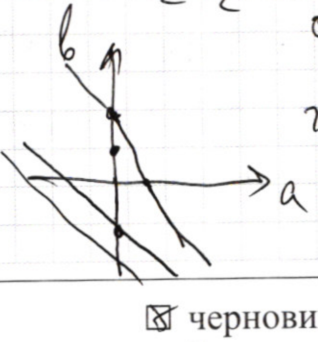
$-2 + \frac{4}{3x-2} \geq ax + b \geq$

$ax + b = 1$

$\frac{2}{3} \leq x \leq 1$

$2a + b = 1$

$1 - 2a$



$2a + b = -1$

$2a + b = -2$

$\frac{2}{3}a + b$

$2 \leq x \leq -1$

$-2 \leq 2a + b$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}\sqrt{ab} = a-6b\\ a^2+9b^2=90\end{cases}$$

$a \geq 6b$

$ab = a^2+36b^2-12ab$

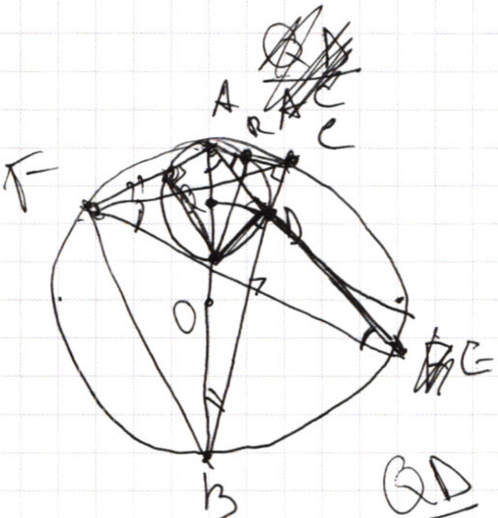
$a^2-13ab+36b^2=0$

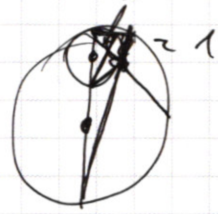
$(a-9b)(a-4b)=0$

$\hookrightarrow b\geq 0$ $\qquad$ $\hookrightarrow b<0$

$90b^2=90$ $\qquad$ $25b^2=90$ $\qquad$ $18\cdot 5$

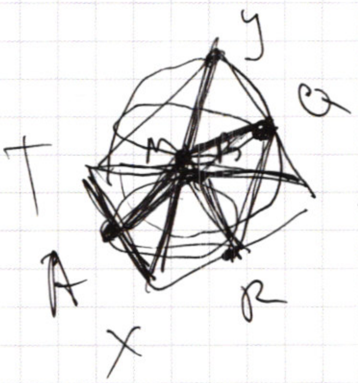
$-\sqrt{\frac{18}{5}}$





$\frac{QD}{AC} = \frac{13}{25} = \frac{2R-r}{2R}$

$25r = 24R$



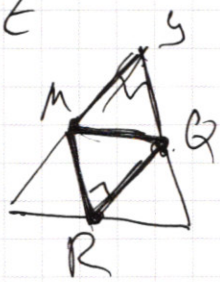
$CD^2 = AC\cdot AR$

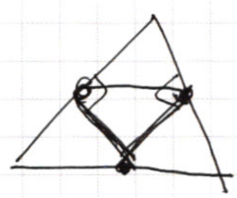
$\frac{AR}{AC} = \frac{22}{2R}$

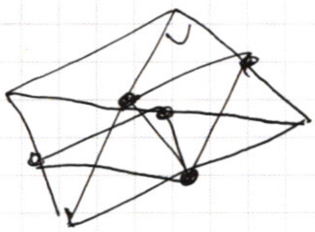
$\frac{13}{12}$

$\frac{24}{25}\cdot 144 =$

$130+26$







~~4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20~~

~~21 22 23 24 25 26 27 28~~

$28-4+1=25$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)