МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

N.1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \frac{4}{5} \end{cases} \to \begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = \frac{4}{5} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{4}{5} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta) \cdot 2\cos 2\beta + 2\cos 2\beta (\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta) = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Разделим:

$$2\cos 2\beta = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{1}{\sqrt5}} = \frac{4}{\sqrt5} \to \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \to \sin 2\beta = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2 = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

1) $\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$ – когда $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot 2 + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha \cdot (\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0$

$$\begin{cases} \cos\alpha = 0 \to tg\,\alpha \text{ не определен} \\ \cos\alpha + 2\sin\alpha = 0 \to 2\sin\alpha = -\cos\alpha \quad 2\,tg\,\alpha = -1 \to tg\,\alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

2) $\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - (2\cos^2\alpha - 1) = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha = -2$

$2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = -1$

$\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0$

$D = 4\sin^2\alpha + 4$

$$\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha \pm 2\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}{2} \to \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 1} \\ \cos\alpha = \sin\alpha - \sqrt{\sin^2\alpha + 1} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

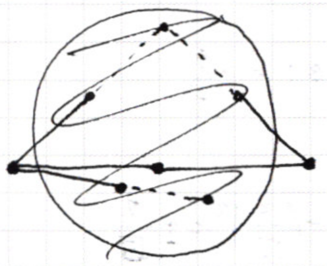
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

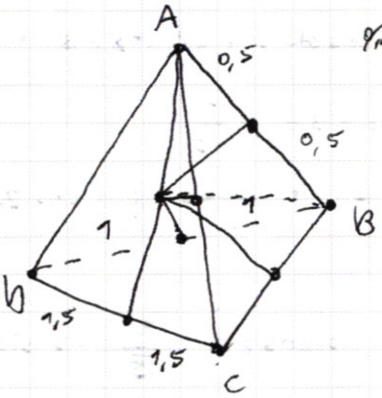
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

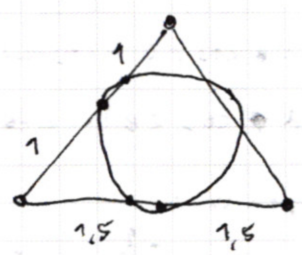
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







№2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \quad \to x-2y > 0 \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$$

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = -x - 2y + 2 \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$\cancel{(x-2y)^2}$

$$(x-2y)^2 = x\cdot(y-1) - 2(y-1)$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = (y-1)(x-2) \quad (y-1) = a \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \quad (x-2) = b \end{cases}$$

$$(b-2a)^2 = b\cdot a$$

$$b^2 + 9a^2 = 25 \qquad 2y-2 = 2-x \pm \sqrt{x^2-4x+24}$$

$$b^2 - 4ab + 4a^2 = b\cdot a$$

$$b^2 + 9a^2 = 5ab \qquad 5a^2 + 5ab - 25 = 0$$

$$b^2 + 9a^2 = 25 \qquad a^2 + ab - 5 = 0$$

$$D = b^2 + 20 \qquad y-1 = \frac{2 - x \pm \sqrt{x^2-4x+4+20}}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{ll} \text{I} & \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{\sin^2\alpha + 7} \to \cos\alpha > \sin\alpha \\ \text{II} & \sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{\sin^2\alpha + 7} \to \sin\alpha > \cos\alpha \end{array}\right.$$

I) $\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + 7$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \to \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \to \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right.$

$2\cos\alpha = -\sin\alpha$

$-\operatorname{tg}\alpha = 2 \to \operatorname{tg}\alpha = -2$ при $\cos\alpha > \sin\alpha$

II) $\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + 7$

$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \to \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha \end{array}\right. \to$ те же решения

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = -2$

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \to$ $f(2) = 0$ $f(7) = 1$ $f(17) = 4$

$f(3) = 0$ $f(11) = 2$ $f(19) = 4$

$f(5) = 1$ $f(13) = 3$ $f(23) = 5$

Найдем формулу $f(\frac{x}{y})$:

$f(\frac{x}{y} \cdot y) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ - меньше 0

Нам нужны натуральные числа $[1; 24]$:

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(3) + f(2) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(8) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = f(2) + f(6) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(4) + f(4) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = f(2) + f(10) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = f(4) + f(6) = 0$

Итого: 10 нулей; 7 единиц; 2 двойки; 1 тройка; 2 четверки; 1 пятерка

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

1) Когда $f(x) = 0$ можно подобрать любой y $f(y) > 0$:

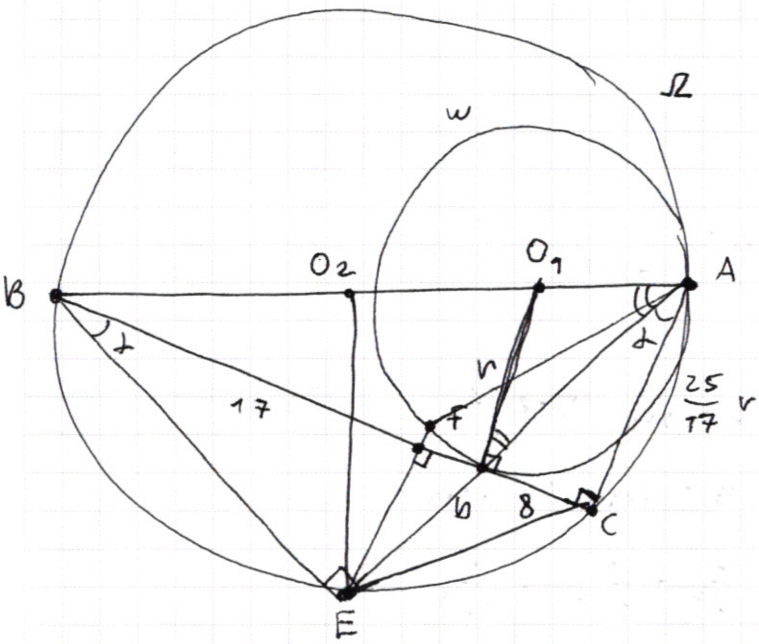
Кол-во вариантов обозначим за S_1

$S_1 = 10 \cdot (7 + 2 + 1 + 2 + 1) = 10 \cdot 13 = 130$

2) Когда $f(x) = 1$ можно подобрать любой y $f(y) > 1$:

$S_2 = 7 \cdot (2 + 1 + 2 + 1) = 7 \cdot 6 = 42$

№4.



r - радиус ω R - радиус Ω

$BD = 17$ O_1, O_2 - центры ω и Ω

$CD = 8$

Так как BD - кас-ная к ω

$O_1D \perp BD \to \triangle BO_1D$ и $\triangle BAC$ подобны по общему $\angle ABC$ и углам 90°

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R}$$

По теореме пифагора в $\triangle BDO_1$:

$$17^2 + r^2 = (2R-r)^2$$

Также: $34R = 50R - 25r \to 25r = 16R \to R = \frac{25r}{16}$

$$17^2 + r^2 = \left(\frac{25r}{8} - r\right)^2$$

$$17^2 + r^2 = \left(\frac{17r}{8}\right)^2 \to 17^2 + r^2 = \frac{17^2 r^2}{64} \to 17^2 r^2 = 64r^2 + 17^2 \cdot 8^2$$

$$(17-8)(17+8)r^2 = 17^2 \cdot 8^2$$

$$9 \cdot 25\, r^2 = 17^2 \cdot 8^2$$

$$r^2 = \frac{17^2 \cdot 8^2}{5^2 \cdot 3^2} \to r = \frac{17 \cdot 8}{5 \cdot 3}\ ;\ R = \frac{25}{16} r = \frac{\cancel{25}^{5} \cdot 17 \cdot \cancel{8}}{\cancel{16}_{2} \cdot \cancel{5} \cdot 3} = \frac{5 \cdot 17}{2 \cdot 3}$$

~~$\angle EAC = \angle$~~

$\angle BEA = 90^\circ$ т.к опирается на диаметр

Тогда, пусть $\angle EBC = \alpha \to \angle EAC = \alpha$ так как оба они вписанные и опираются на дугу EC

$\angle BDE = \cancel{90^\circ}\ 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$ - по т. о сумме углов $\triangle$-ка

Значит $\angle FED = \alpha = \angle$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x \geq 0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$t = x^2+18x$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t > 0$

$5^{\log_{12}t} \geq t\cdot(t^{\log_{12}13-1}+1)$

$5^{\log_{12}t} \geq t\cdot(t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)}+1)$

$\log_{12}t = y$

~~$5^y \geq 12^y$~~

$5^y + 12^y \geq (12^y)^{\log_{12}13}$

$(x^2)^3 = x^6$

$5^y + 12^y \geq 12^{\log_{12}13\cdot y}$

$5^y + 12^y \geq 13^y$ при $y=2$ $25+144=169$ $\to$ при $y>2$

нер-во не выполн

~~$\left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y \geq 1$~~

~~$\log_y(5^y+12^y) \geq \log_y 13\cdot y$~~

~~$\log_5(5^{\log_{12}(x^2+18x)} + \log x^2+18x) \geq$~~

$\log_5(5^{\log_{12}x^2+18x}) \geq \log_5(x^2+18x^{\log_{12}13} - x^2-18x)$

$\log_{12}x^2+18x \geq \log_5(x^2+18x\cdot(x^2+18x^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1))$

$y = \log_{12}(x^2+18x)$

$\frac{1}{5^y} + \frac{1}{12^y} \vee \frac{1}{13^y}$

$$\begin{array}{r} 18\\ \times\, 18\\ \hline 124\\ +\,18\\ \hline 204 \end{array}$$

$576+204=780$

$780 = 2\cdot5\cdot39 = 2\cdot5\cdot13\cdot3$

$$\begin{array}{r} 18\\ \times\, 18\\ \hline 144\\ +\,18\\ \hline 324 \end{array}$$

$324+576=900=30^2$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x > 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x>0$ т.к наход. под логарифмом → раскроем модуль с плюсом

$$\begin{cases} 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} \\ x^2+18x>0 \to x(18+x)>0 \end{cases}$$

+ -18 − 0 +

$\to x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

проведем замену

$y = \log_{12}(x^2+18x)$

$x^2+18x = 12^y$

$(x^2+18x)^{\log_{12}13} = 12^{y \cdot \log_{12}13} = 13^y$

Получаем:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ y = \log_{12}(x^2+18x) \\ 5^y + 12^y \geq 13^y \end{cases}$$

Заметим, что при $y=2$:

$25+144=169$ — получаем равенство

при $y \in [0; 2)$:

$5^y + 12^y \geq 13^y$

$5^0+12^0 \geq 13^0 \to 1+1 \geq 1$

Функции монотонно возрастают → от 0 до 2 неравенство выполнено.

При $y<0$:

Введем замену $t = -y$:

$\frac{1}{5^t} + \frac{1}{12^t} \vee \frac{1}{13^t} \qquad t \in (0; +\infty)$

Видим что уже $\frac{1}{12^t} > \frac{1}{13^t}$ так как $12^t < 13^t$

Значит от $-\infty$ до 0 нер-во также выполнено

Итого:

$y \in (-\infty; 2]$

$x^2 + 18x = 12^y$

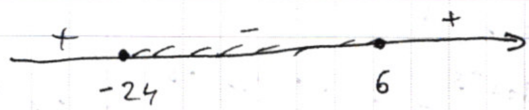
$\downarrow$

$x^2 + 18x \in (0; 12^2]$

$$\begin{cases} x^2 + 18x > 0 \rightarrow x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x^2 + 18x \le 12^2 \rightarrow x^2 + 18x - 144 \le 0 \end{cases}$$

$D = 18^2 + 4 \cdot 144 = 900 = 30^2$

$x = \frac{-18 \pm 30}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = -24 \end{array} \right.$



$$\begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-24; 6] \end{cases} \rightarrow \text{Ответ: } x \in (-24; -18) \cup (0; 6]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

Преобразуем:

$$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3} = 3+\frac{0,5}{x+\frac{3}{4}}$$ — гипербола с асимпт. $x=-\frac{3}{4}$

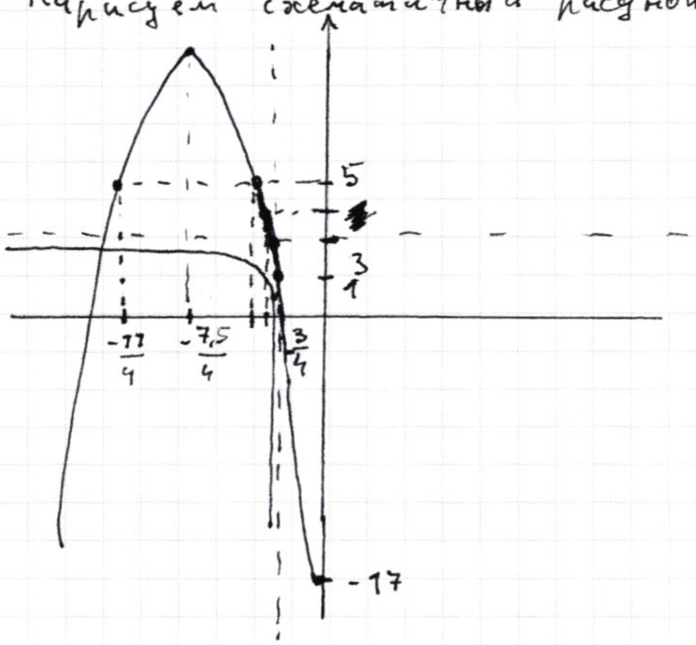
$y=3$

$-8x^2-30x-17$ — парабола, ветви вниз

$x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{7,5}{4}$ — лежит между $-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}$

$f(0)=-17$ — пер-е с осью OY

Нарисуем схематичный рисунок:



Найдем значения параболы в крайних точках $-\frac{11}{4}$ и $-\frac{3}{4}$

$$-8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+30\cdot\frac{3}{4}-17 = -\frac{18}{4}+\frac{90}{4}-\frac{68}{4} =$$

$$= \frac{90-86}{4} = 1$$

$$-8\cdot\left(\frac{11}{4}\right)^2+30\cdot\frac{11}{4}-17 = \frac{-121\cdot2+30\cdot11-68}{4}$$

$$= 5$$

Найдем симметричные $-\frac{11}{4}$ коорд. параболы

где $y=5 \rightarrow x=-1$

Найдем также значения гиперболы в точках $-\frac{11}{4}$ и -1

$3 + \dfrac{0,5}{-\frac{11}{4} + \frac{3}{4}} = 3 + \dfrac{0,5}{-\frac{8}{4}} = 3 + \dfrac{0,5}{-2} = 3 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{4}$

$3 + \dfrac{0,5}{-1 + \frac{3}{4}} = 3 + \dfrac{0,5}{-\frac{1}{4}} = 3 - 2 = 1$

чтобы прямая $ax + b$ была больше гиперболы и меньше параболы нужно чтобы выполнялись такие условия:

значение $ax+b$ в т. $-\frac{11}{4}$ больше $\frac{11}{4}$ но меньше 5

значение $ax+b$ в т. -1 больше 1 но меньше 5

$$\begin{cases} a \cdot -\frac{11}{4} + b \geq \frac{11}{4} \to \frac{11}{4}(a+1) \leq b \to a \leq \frac{4}{11}b - 1 \\ a \cdot -\frac{11}{4} + b \leq 5 \to a \geq (b-5) \cdot \frac{4}{11} \\ -a + b \geq 1 \to a \leq b - 1 \\ -a + b \leq 5 \to a \geq b - 5 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Когда $f(x)=2$ подбираем $f(y)\geq 2$:

$S_3 = 2\cdot(1+2+1) = 2\cdot 4 = 8$

4) Когда $f(x)=3$ подбираем $f(y)\geq 3$:

$S_4 = 1\cdot(2+1) = 3$

5) Когда $f(x)=4$ подбираем $f(y)\geq 4$:

$S_5 = 2\cdot 1 = 2$

Для $f(x)=5$ и больше уже нет таких y.

Значит:

$S_{общ} = S_1+S_2+S_3+S_4+S_5 = 130+42+8+3+2 = 185$

Ответ: 185

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \rightarrow x-2y\geq 0 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2 \\ x-2y\geq 0 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = x\cdot(y-1)-2(y-1) \rightarrow (x-2y)^2=(y-1)(x-2) \\ x-2y\geq 0 \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = (x-2)(y-1) \\ x-2y\geq 0 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Делаем замену:

$y-1=a$

$x-2=b$

$$\begin{cases} (b-2a)^2 = b\cdot a \\ b-2a>0 \\ b^2+9a^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab \rightarrow b^2-5ab+4a^2=0 \\ b-2a>0 \\ b^2+9a^2=25 \end{cases}$$

Вычтем:

$$\begin{cases} 5a^2+5ab-25=0 \\ b-2a>0 \\ b^2+9a^2=25 \end{cases}$$

$\cancel{b2= 25}$

$a^2+ab-5=0$

$D=b^2+20$

$a=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+20}}{2} \rightarrow 2y-2=2-x\pm\sqrt{(x-2)^2+20}$

$$\left[\begin{array}{l} 2y=4-x+\sqrt{(x-2)^2+20} \\ 2y=4-x-\sqrt{(x-2)^2+20} \end{array}\right.$$

$(2y+x-4)^2=x^2-4x+24$

$4y^2+2yx-8y+2yx+x^2-4x-8y-4x+16=x^2-4x+24$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \to f(2)=0 \quad f(7)=1 \quad f(17)=4$

$f(3)=0 \quad f(11)=2 \quad f(19)=4$

$f(5)=1 \quad f(13)=3 \quad f(23)=5$

$f(x/y) = f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

~~Функция~~

$f(\frac{x}{y}) + f(2) = f(\frac{2x}{y})$

$f(2\cdot 3) = f(2) + f(3) = 0 = f(6)$

$f(2\cdot 11) = 0+2 = 2 = f(22)$

$\frac{x}{y}$ - число от 1 до 24

$22 \cdot 22$: $44 + 44 = 484$

$32 \cdot 17 = 510 + 34 = 544$

№6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4(x+\frac{3}{4})} = \frac{1}{x+\frac{3}{4}}\cdot 0{,}5$

$-8x^2-30x-17=0$

$D = 900 + 4\cdot 8\cdot 17 = 544$

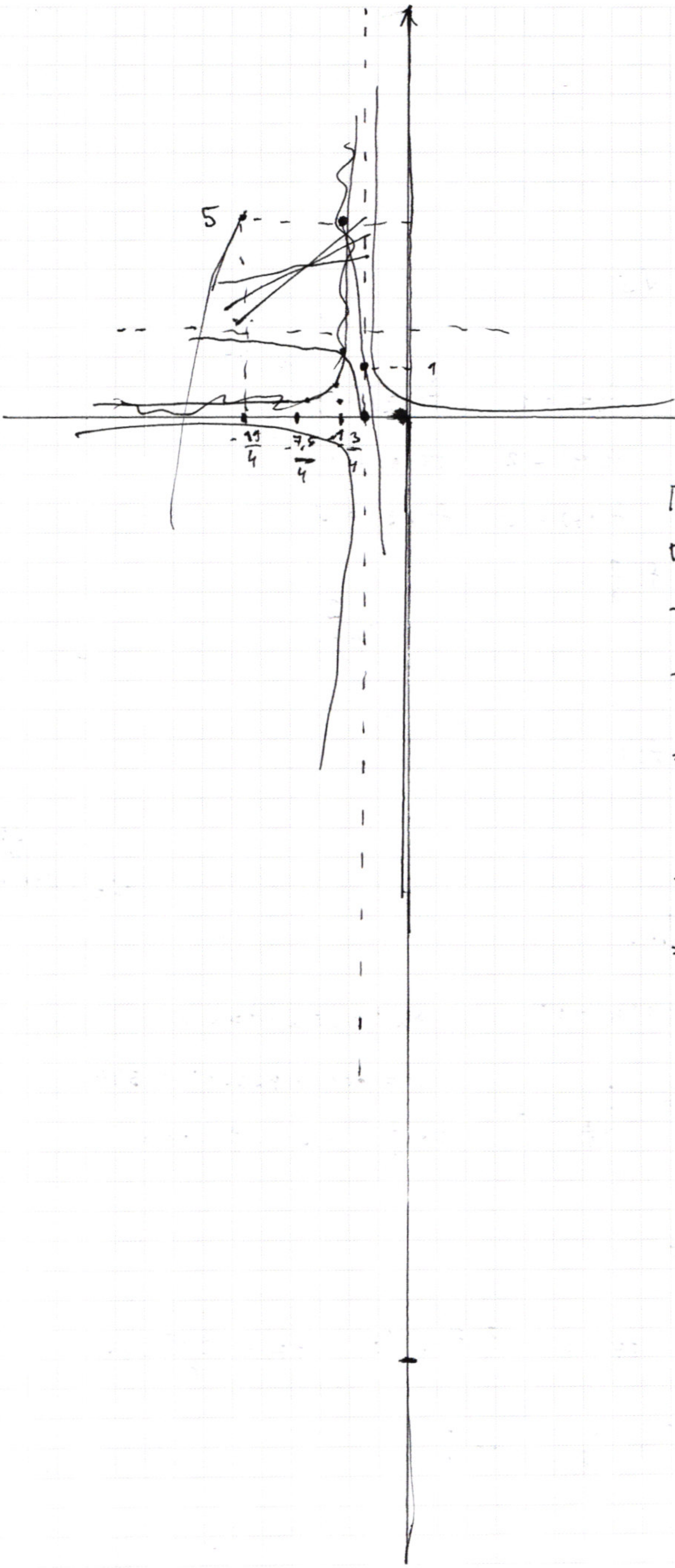
$-8\cdot \frac{3}{4}^2 - 30\cdot -\frac{3}{4} - 17 =$

$-8x^2-30x-17=0$

$x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8} = -\frac{7{,}5}{4}$

$y = -8\cdot\frac{15^2}{8^2} + 30\cdot\frac{15}{8} - 17 = -\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17 =$

$= \frac{225-17\cdot 8}{8} = \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8} = 11\frac{1}{8}$



Гипербола < 0 на $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

Парабола:

$-8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 30\cdot\frac{3}{4} - 17$

$-8\cdot\frac{9}{16} + \frac{90}{4} - \frac{68}{4} =$

$= -\frac{18}{4} + \frac{90}{4} - \frac{68}{4} = \frac{90-86}{4} > 0$

$-8\cdot\left(\frac{11}{4}\right)^2 + 30\cdot\frac{11}{4} - 17 =$

$= -\cancel{8}\cdot\frac{121}{\cancel{16}_{2}} + \frac{30\cdot 11}{4} - \frac{68}{4}$

$= \frac{-121\cdot 2 + 30\cdot 11 - 68}{4} =$

$= \frac{-242 + 330 - 68}{4} = 5 > 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N.1.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$f(\frac{x}{y}\cdot y)\quad f(\frac{x}{y}) + f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

чтобы $<0 \to f(x) < f(y)$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}\end{cases}$$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cos 2\beta$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}\\ \sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta = -\frac{4}{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot 2\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot 2\cos 2\beta = -\frac{4}{5}\\ \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\cos 2\beta\cdot(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta) = -\frac{4}{5}\\ \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}$$

$\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{4}{5}$

$\cos\alpha = 0$

$2\sin\alpha = -\cos\alpha$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \to \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}\quad(\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta = 1 \to \frac{4}{5} + \sin^2 2\beta = 1)$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

Решаем.

$[2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1\qquad 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

№2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \quad x \geq 2y \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$xy-x-2y+2 \geq 0$$

$$x\cdot(y-1)-2(y-1)\geq 0$$

$$\cancel{(y-1)\cdot(x-2)\geq 0}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = (y-1)(x-2) \\ (x-2)^2+9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$x-2=t$

— замена

$y-1=l$

$x-2y=t-2l$

$$\begin{cases} (t-2l)^2 = t\cdot l \\ t^2+9l^2=25 \end{cases}$$

$$t^2-5tl+4l^2=0$$

$$t^2-25+9l^2=0$$

$$\begin{cases} t^2-4t\cdot l+4l^2=tl \to t^2-5tl+4l^2=0 \\ t^2+9l^2=25 \end{cases}$$

$$25-0=\cancel{t^2}+9l^2-\cancel{t^2}+5tl-4l^2$$

$$25=5l^2+5tl$$

$$5=l^2+tl$$

$$l^2+tl-5=0$$

$$D=t^2+20$$

$$l=\frac{-t\pm\sqrt{t^2+20}}{2} \to \left[\begin{aligned} 2l&=-t+\sqrt{t^2+20} \\ 2l&=-t-\sqrt{t^2+20} \end{aligned}\right.$$

$$2y-2=-x+2+\sqrt{(x-2)^2+20}$$

$$2y-2=-x+2-\sqrt{(x-2)^2+20}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)