# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

$y = -\frac{49}{8}$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина $P$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $PQ$. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра $RS$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№1 3б
№2 4б
№3 ?
№4 5б
~~№7 6б~~
№6 не полностью

18

+10 /33

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y^2 - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} & (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 & (2) \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} 3y^2 - 2x \geqslant 0 \\ 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \quad (*) \end{cases}$

$\cancel{3y}$

$(*)$ $9y^2 - 15xy + 3y + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$(3y - x - 1)\cdot(3y - 4x + 2) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y \geqslant 2x \\ y = \frac{x+1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} 3y \geqslant 2x \\ y = \frac{4x-2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

(2) $3\cdot(x^2 - 2x + 1) + \frac{(9y - 12y + 4)}{3} = \frac{25}{3}$

$9\cdot(x-1)^2 + (3y-2)^2 = 25$

(1) $\begin{cases} 9\cdot(x-1)^2 + (x-1)^2 = 25 \\ x + 1 \geqslant 2x \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)^2 = \frac{5}{2} \\ x \leqslant 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}} \\ x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x \leqslant 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$

(2) $\begin{cases} 9\cdot(x-1)^2 + (4x-4)^2 = 25 \\ 4x - 2 \geqslant 2x \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)^2 = 25 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -4 \end{array}\right. \\ x \geqslant 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x = 6 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{22}{3}$

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

Пусть $2\alpha = x$, $2\beta = y$, тогда

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin x \cdot \cos 2y + \cos x \cdot \sin 2y + \sin x = -\frac{8}{17} \quad (1) \end{cases}$$

(1) $\sin x\,(2\cos^2 y) + 2\cos y \cdot \sin y \cdot \cos x = -\frac{8}{17}$

$\cos y \cdot (\sin x \cos y + \cos x \cdot \sin y) = -\frac{4}{17}$

$\cos y \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{4}{17}$

$\cos y = \frac{4}{\sqrt{17}}$

а) $\cos y = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin y = 1 : \sqrt{17}$ $\Rightarrow$

$4\sin x + \cos x = -1$ $\Rightarrow$

$4 \cdot \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $\Rightarrow$

$$\frac{8\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$$

$8\,tg\,\alpha = -2$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

б) $\cos y = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin y = -1 : \sqrt{17}$ $\Rightarrow$

$4\sin x - \cos x = -1$ $\Rightarrow$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$ $\Rightarrow$

$$\frac{8\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} - \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$$

$8\,tg\,\alpha + 2\,tg^2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -4 \end{array}\right.$

Нам не нужно проверять равносильность всех переходов, так как знаем, что различных значений не меньше трёх

Ответ: $-\frac{1}{4}$; $0$; $-4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} 3y^2 - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} & (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 & (2) \end{cases}$

(1) $\begin{cases} 3y - 2x \geqslant 0 \\ 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \quad (*) \end{cases}$

(*) $9y^2 - 15xy + 3y + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$(3y - x - 1)\cdot(3y - 4x + 2) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y \geqslant 2x \\ y = \frac{x+1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} 3y \geqslant 2x \\ y = \frac{4x-2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

(2) $3(x^2 - 2x + 1) + \frac{(9y - 12y + 4)}{3} = \frac{25}{3}$

$9(x-1)^2 + (3y-2)^2 = 25$

(1) $\begin{cases} 9(x-1)^2 + (x-1)^2 = 25 \\ x + 1 \geqslant 2x \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)^2 = \frac{5}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}} \\ x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right. \\ x \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 9(x-1)^2 + (4x-4)^2 = 25 \\ 4x - 2 \geqslant 2x \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)^2 = 25 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -4 \end{array}\right. \\ x \geqslant 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{22}{3} \end{cases}$

Ответ: $\left(1 - \sqrt{\frac{5}{2}};\ \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right);\ \left(6;\ \frac{22}{3}\right)$

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Заменим $x^2+6x=t$

Имеем: $3^{\log_4 t} + t \geqslant |t|^{\log_4 5}$

по определению $t>0 \Rightarrow |t|=t$

~~$3 = 4^{\log_4 3}$~~

$3 = 4^{\log_4 3} \Rightarrow 3^{\log_4 t} = \cancel{4^{\log_4 3}}$

$= \left(4^{\log_4 3}\right)^{\log_4 t} = t^{\log_4 3}$

I случай $0 < t \leqslant 1$

тогда $t > t^{\log_4 5}$, т.к. $\log_4 5 > 1$ и $t^{\log_4 3} > 0$

$\Rightarrow t + t^{\log_4 3} > t^{\log_4 5}$ – удовл.

II случай $t \geqslant 1$

Решим ур-е:

$t^{\log_4 3} + t = t^{\log_4 5}$

$t = 16$ – удовл.: $9 + 16 = 25$

$\left(t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5}\right)' = t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 - t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$t^{\log_4 \frac{5}{4}} < 1$ (т.к. $t \geqslant 1$, $\log_4 \frac{5}{4} < 0$) $\Rightarrow$

$1 - t^{\log_4 \frac{5}{4}} > 0$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} > 0$, т.к. $t > 0$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 - t^{\log_4 \frac{5}{4}} > 0 \Rightarrow$ функция возрастает

$\Rightarrow$ ур-е имеет единственный корень $t = 16$

тогда подойдут либо $t \in (1; 16]$, либо $t \in [16; +\infty)$

Проверим подставной точкой

$t = 4$: $3 + 4 > 5$ – удовл. $\Rightarrow t \in (1; 16]$ – удовл.

~~Ответ: $t \in (0; 16]$~~

~~$x^2 + 9 + 6x$~~

~~$x + 3 - 2$~~

$x + 3 - 5 = -2$

$x + 3 + 5 = -8$

$x + 3 - 3 =$

$x + 3 + 3$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x^2+6x \geqslant 16 \\ x^2+6x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+3)^2 \leqslant 25 \\ (x+3)^2 > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x \geqslant -8 \end{cases} \\ \left[ \begin{array}{l} x > 0 \\ x < -6 \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Пусть $x^2+6x = t$, тогда

$3^{\log_4 t} + t \geqslant |t|^{\log_4 5}$

по определению $t > 0 \Rightarrow |t| = t$

$3 = 4^{\log_4 3} \Rightarrow 3^{\log_4 t} = (4^{\log_4 3})^{\log_4 t} = t^{\log_4 3}$

I случай : $0 < t \leqslant 1$

$t > t^{\log_4 5}$, т.к. $\log_4 5 > 1$ и $t^{\log_4 3} = 0$

$\Rightarrow t + t^{\log_4 3} > t^{\log_4 5}$ - удовл.

II случай $t \geqslant 1$

Решим уравнение

$t^{\log_4 3} + t = t^{\log_4 5}$

$\cancel{t + t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} = 0}$ $\quad t = 16$ - удовл. : $9 + 16 = 25$

~~t = 169 удовл. : 9 + 16 = 25~~

$(t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5})' = t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 - t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$t^{\log_4 \frac{5}{4}} < 1$ (т.к. $t \geqslant 1$, $\log_4 \frac{5}{4} < 0$) $\Rightarrow$

$1 - t^{\log_4 \frac{5}{4}} > 0$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} > 0$, т.к. $t > 0$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 - t^{\log_4 \frac{5}{4}} > 0$ $\Rightarrow$ функция возрастает

$\Rightarrow$ ур-е имеет единственный корень $t = 16$

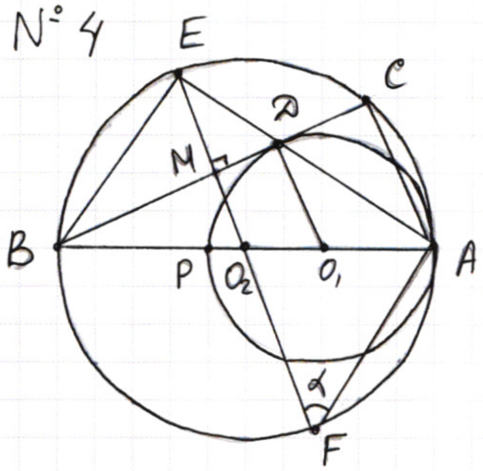
тогда подойдут либо $t \in (1; 16]$, либо $t \in [16; +\infty)$

Проверим подставной точкой

Пусть $t = 4$ : $3 + 4 > 5$ - удовл. $\Rightarrow$ $t \in (1; 16]$ - уд.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4




Дано: $\Omega(O_2; R)$, $\omega(O_1; r)$
$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$

Найти: $r$, $R$, $\angle AFE$, $S_{AEF}$

Решение:

1) Докажем, что $EF$ проходит через $O_2$:

$DO_1 \parallel EF$, т.к. $EF \perp BC$ и $DO_1 \perp BC$

$AB \cap \omega = P$
$\angle ADP = \angle AEB = 90^\circ$, т.к. опираются на диаметры

$\angle DPA = \angle EBA \Rightarrow \angle DO_1A = \angle EO_2A$ – центральные
$EF \cap AB = K$
$\angle EKA = \angle DO_1A$, т.к. $EF \parallel DO_1$
$\angle EKA = \angle EO_2A$
$\Rightarrow$ т. $K$ и $O_2$ совпадают

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{2R-r}{2R}$$

$$\frac{13}{18} = \frac{2R-r}{2R}; \quad r = \frac{5}{9}R$$

$\triangle BDO_1$ по т. Пифагора:

$BD^2 + DO_1^2 = BO_1^2$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{169}{4} + r^2 = (2R-r)^2 \\ &r = \frac{5}{9}R \end{aligned}\right\} \Rightarrow r = \frac{65}{24}, \quad R = \frac{39}{8}$$

Пусть
$\angle EFA = \alpha = \angle EBA$, тогда
$\angle DO_1A = 2\alpha$;
$\angle CAB = 180^\circ - 2\alpha$
$\angle CBA = 2\alpha - 90^\circ$

$$\sin \angle DBA = \frac{r}{2R-r} = \frac{5}{13} = -\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$$

$$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}; \quad \cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$AE = EF \cdot \sin\alpha = 2R \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

$AF = EF \cdot \cos\alpha = 2R \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$S_{AEF} = \frac{AE \cdot AF}{2} = \frac{351}{16}$

Ответ: $r = \frac{65}{24}$, $R = \frac{39}{8}$, $S_{AEF} = \frac{351}{16}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(5)=1$
$f(7)=1$
$f(11)=2$
$f(13)=3$
$f(17)=4$
$f(19)=4$
$f(23)=5$

$f(p)=f(p^2)+f\left(\frac{1}{p}\right)=f(p)+f(p)+f\left(\frac{1}{p}\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right)=-f(p)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$
$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$
$f\left(\frac{1}{5}\right)=-1$
$f\left(\frac{1}{7}\right)=-1$
$f\left(\frac{1}{11}\right)=-2$
$f\left(\frac{1}{13}\right)=-3$
$f\left(\frac{1}{17}\right)=-4$
$f\left(\frac{1}{19}\right)=-4$
$f\left(\frac{1}{23}\right)=-5$

Пусть $x=a_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\alpha_n}$ - разложение на простые множители

тогда $f(x)=\alpha_1\cdot f(a_1)+\ldots+\alpha_n\cdot f(a_n)$,

так как $f(a_i)$ нам известно, то и $f(x)$ мы можем найти

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha_1\cdot \underbrace{f\left(\frac{1}{a_1}\right)}_{=-f(a_1)}+\ldots+\alpha_n\cdot \underbrace{f\left(\frac{1}{a_n}\right)}_{=-f(a_n)}=-f(x)$$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$ - можно найти такие пары

тогда при $k=3,4,6,8,9,12,16,18,24,27$:
$f(k)=0 \Rightarrow$ их 10 штук

Это легко проверить: при таком $k$ $f(k)$ будет суммой вида $\alpha_1\cdot \underbrace{f(2)}_{=0}+\alpha_2\cdot \underbrace{f(3)}_{=0}=0$

при $k=5,7,10,14,15,20,21$:
$f(k)=1 \Rightarrow$ их 7 штук

При $k = 11, 22, 25$ : $f(k) = 2$ => их 3 штуки

При $k = 13, 26$ : $f(k) = 3$ => их 2 штуки

При $k = 17, 19$ : $f(k) = 4$ => их 2 штуки

При $k = 23$ : $f(k) = 5$ => 1 штука

1) Если $f(y) = 1$, то подходят 10 штук $x$

=> $10 \cdot 7 = 70$

2) Если $f(y) = 2$, то подходят 17 штук $x$

=> $17 \cdot 3 = \cancel{51}$ 51

3) Если $f(y) = 3$, то подходят 20 штук $x$

=> $20 \cdot 2 = 40$

4) Если $f(y) = 4$, то подходят 22 $x$

=> $22 \cdot 2 = 44$

5) Если $f(y) = 5$, то подходят 24 $x$

=> $24 \cdot 1 = 24$

Сложим : $24 + 44 + 40 + 51 + 70 = 229$

Ответ: 229.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $8x^2-34x+30 \le ax+b \le \frac{4x-3}{2x-2}$

$x \in (1;3]$

$\begin{cases} 8x^2-34x+30 \le ax+b \\ ax+b \le 2+\frac{1}{2x-2} \end{cases}$

$g(x) = 2+\frac{1}{2x-2}$

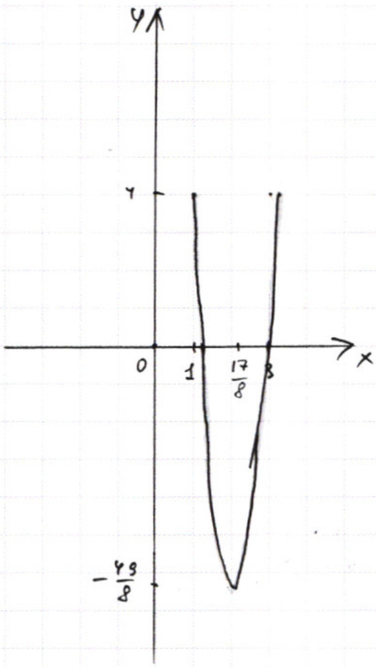
$g(3) = 2+\frac{1}{4}$

$f(x) = 8x^2-34x+30$

$f'(x) = 16x-34$; $x = \frac{17}{8}$ - экстремум $\Rightarrow$
экстремум в точке $\left(\frac{17}{8}; -\frac{49}{8}\right)$

$f(1)=4$

$f(3)=0$




Так как прямая $ax+b$
может пересечь параболу только в
$(1;4)$ и $(3;0)$,
рассмотрим прямую, проходящую
через эти точки

$\begin{cases} a+b=4 \\ 3a+b=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a=-2 \\ b=6 \end{cases}$

Рассмотрим пересечение прямой и $g(x)$

$-2x+6 = 2+\frac{1}{2x-2} \iff \frac{-2x\cdot(2x-2)+4\cdot(2x-2)-1}{2x-2} = 0$

$\Rightarrow$ $(2x-3)^2=0$
$2x-3=0$ $\Rightarrow$ прямая касается $g(x)$
$x = \frac{3}{2}$

$4 \le a+b$

$b \ge 4-a$

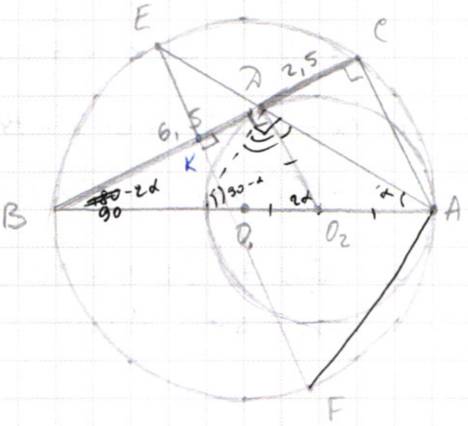
$\frac{9}{4} \le 3a+b \le 0$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Ω - большая

ω - меньшая




$\triangle ABC \sim \triangle O_2BD \sim \triangle O_1BK$

$\frac{AB}{C_2B} = \frac{BC}{BD} = \frac{9}{6,5} = \frac{90}{65} = \frac{18}{13} \Rightarrow \frac{AO_2}{AB} = \frac{5}{13}$

$\frac{r}{R} = \frac{5}{13} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{5}{6,5}$ 2R

$\frac{O_2D}{AC} = \frac{6,5}{9} = \frac{65}{90} = \frac{13}{18}$

$\frac{r}{AC} = \frac{13}{18}$

№2. $\cancel{3x^2+3y^2-6xy}$ $\cancel{3(x^2+y^2-2x)}$

$3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}$

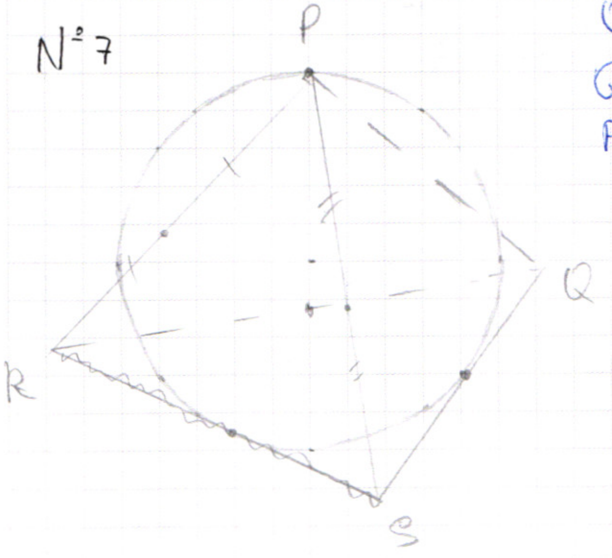
$\cancel{3x(2-2)+3y^2}$

$3x^2+3y^2-4 = 4y+6x$

$3x^2+3y^2-4-y-8x = 3y-2x$

$\sqrt{(3y-2)(x-1)} = 3x^2+3y^2-4-y-8x$

№7




$QR = 2$

$QS = 1$

$PS = \sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 15 \\ \hline 135 \\ +27\ \ \\ \hline 405 \end{array}$$

№ 6. $\frac{4x-3}{2x-2} \geq 9x+6 \geq 8x^2-34x+30$

1) $2(4x^2-17x+15)=0$

$D = 289-4\cdot4\cdot15 = 289-240 = 49$

$x = \frac{17\pm7}{8} = \left[\begin{array}{l} 1,25 \\ 3 \end{array}\right.$

$2\cdot4(x-1,25)(x-3)$

$(4x-5)(2x-3)$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq (4x-5)(2x-3)$

$\frac{(4x-3)-(4x-5)(2x-3)(2x-2)}{2x-2} \geq 0$

$\frac{16x^3-60x^2+70x-27}{2x-2} \leq 0$

2) $(2x-3)(2x-2) =$

$= 4x^2-4x-6x+6$

3) $(4x-5)(4x^2-10x+6) =$

$= 16x^3-40x^2+24x-20x^2+50x-30 =$

$= 16x^3-60x^2+74x-30$

4) $4x-3-16x^3+60x^2-74x+30 =$

$= -16x^3+60x^2-70x+27$

5) ~~$16\cdot27-60\cdot9+70\cdot3-27$~~

~~$405-540+210$~~

$\cos^2+\sin^2=1$

$\cos^2=1-\sin^2$

$1-\sin^2-\sin^2$

№ 1. $\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin2\alpha\cos4\beta + 2\sin2\alpha\cos2\alpha\sin2\alpha + \sin2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin2\alpha\,(1-2\sin^2 2\alpha + 2\sin2\alpha\cos2\alpha + 1) = -\frac{8}{17}$

~~$2\sin2\alpha\,($~~

$\sin2\alpha\,(2-2\sin2\alpha\cdot\sin2\alpha + 2\sin2\alpha\cos2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$2\sin2\alpha\,(1-\sin2\alpha(\sin2\alpha-\cos2\alpha)) = -\frac{8}{17}$

$\sin2\alpha\,(1-\sin2\alpha(\sin2\alpha-\cos2\alpha)) = -\frac{4}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $8x^2 - 34x + 30 \le ax + b \le \dfrac{4x-3}{2x-2}$

$x \in (1; 3]$

$$\begin{cases} 8x^2 - 34x + 30 \le ax + b \\ ax + b \le 2 + \dfrac{1}{2x-2} \end{cases}$$

$g(x) = 2 + \dfrac{1}{2x-2}$

$g(3) = 2 + \dfrac{1}{4}$

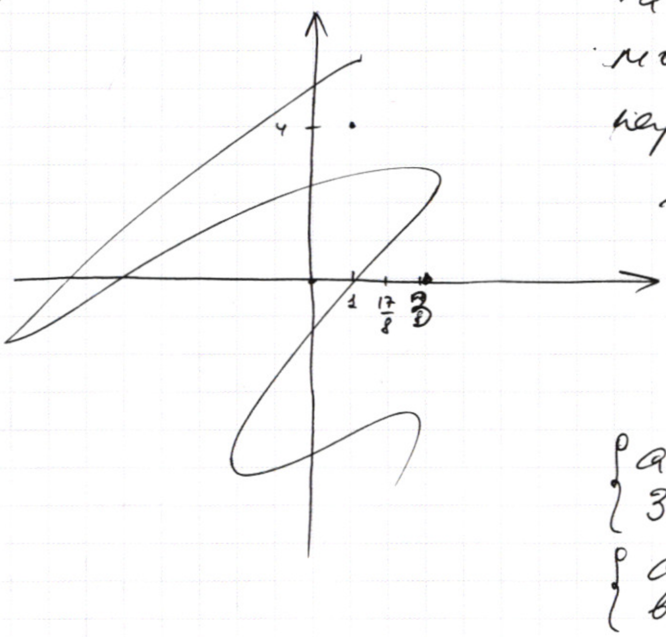
$f(x) = 8x^2 - 34x + 30$

$f'(x) = 16x - 34$ ; $x = \dfrac{17}{8}$ – экстремум

экстремум в $f\left(\dfrac{17}{8}; -\dfrac{49}{8}\right)$

$f(1) = 4$

$f(3) = 0$




Так как прямая $ax+b$ может пересечь параболу только в $(1;4)$ и $(3;0)$, рассмотрим прямую, проходящую через эти точки

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \end{cases}$$

Рассмотрим пересечение прямой и $g(x)$

$-2x + 6 = 2 + \dfrac{1}{2x-2} \iff \dfrac{-2x\cdot(2x-2) + 4\cdot(2x-2) - 1}{2x-2} = 0$

$\Rightarrow$ $(2x-3)^2 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

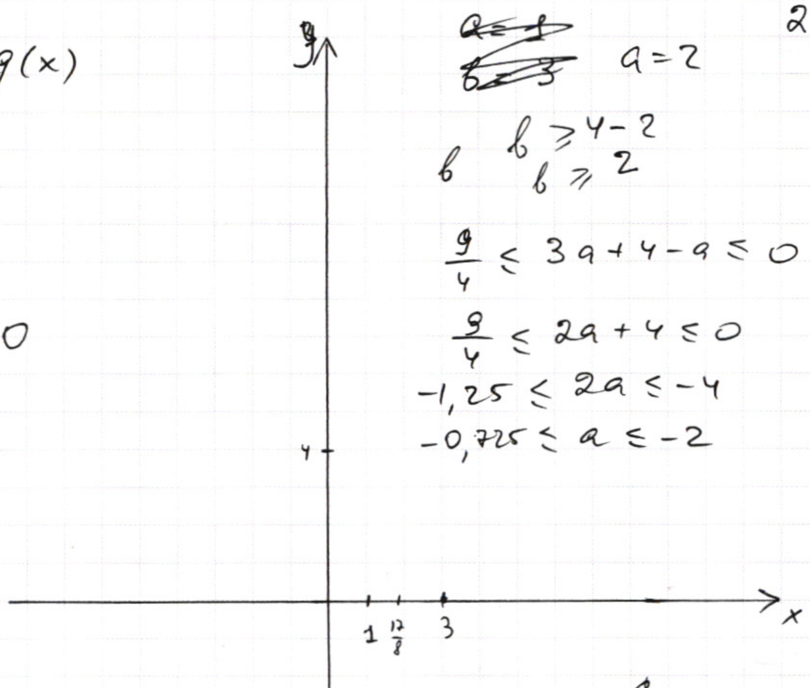
(Нумеровать только чистовики)

=> прямая касается $g(x)$

$4 \le a + b$

$b \ge 4 - a$

$\frac{9}{4} \le 3a + b \le 0$



$\cancel{a=1}$

$\cancel{b=3}$ $a=2$

$b$ $b \ge 4-2$

$b \ge 2$

$\frac{9}{4} \le 3a + 4 - a \le 0$

$\frac{9}{4} \le 2a + 4 \le 0$

$-1{,}25 \le 2a \le -4$

$-0{,}725 \le a \le -2$

$2{,}25 - 4$

$0{,}5 + 0{,}125$

$b \ge 3$

$b \ge 5$

$\cancel{3+3 \le 0}$

$a = -1$

$b = 5$

$-3 + 5 \le 0$

$a = 2$

б

проверяем подставной точкой

$t = 3$

$3 + 4 \ge 5$ – удовл.

$\Rightarrow t \in (1; 9]$ – удовл.

$1 - t^{\log_4 \frac{5}{4}} > 0$, т.к. $t > 0$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} > 0$, $t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 - t^{\log_4 \frac{5}{4}} > 0$

$\Rightarrow$

$\left(t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5}\right)'$

$t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}$

при $t = 1$, т.к. $\log_3 \frac{5}{3} < 0$

$t^{\log_3 \frac{5}{3}} < 1$ и $t^{\log_3 \frac{4}{3}} > 0$

$\Rightarrow 1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} > 0$

$\Rightarrow$ функция возрастает

$\Rightarrow$ ур-е имеет единственный корень

$\Rightarrow$ кот подойдёт либо $t \in (1; 8]$, либо $t \in [8; +\infty)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Пусть $x^2+6x = t$, тогда

$3^{\log_4 t} + t \geqslant |t|^{\log_4 5}$

по определению $t > 0 \Rightarrow |t| = t$

$3 = 4^{\log_4 3} \Rightarrow 3^{\log_4 t} = (4^{\log_4 3})^{\log_4 t} = t^{\log_4 3}$

I случай : $0 < t \leq 1$

$t > t^{\log_4 5}$, т.к. $\log_4 5 > 1$ и $t^{\log_4 3} = 0$

$\Rightarrow t + t^{\log_4 3} > t^{\log_4 5}$ – удовл

II случай $t \geqslant 1$

Решим ур-е

$t^{\log_4 3} + t = t^{\log_3 5}$

~~$t + t^{\log_4 3} > t^{\log_4 5}$ – удовл~~

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} = 0$

$t = 9$ – удовл : $9 + 16 = 25$

$(t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5})'$

№6 $8x^2-34x+30 \le ax+b \le \frac{4x-3}{2x-2}$

$x \in (1; 3]$

$$\begin{cases} 8x^2-34x+30 \le ax+b \\ ax+b \le 2+\frac{1}{2x-2} \end{cases}$$

$g(x) = 2+\frac{1}{2x-2}$

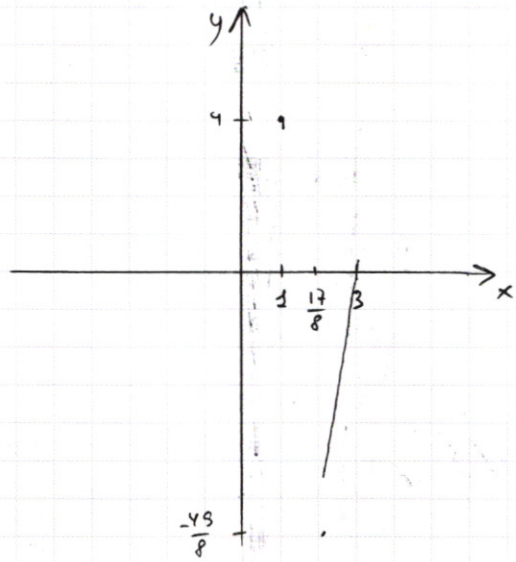
$g(3) = 2+\frac{1}{4}$

$f(x) = 8x^2-34x+30$

$f'(x) = 16x-34$ ; $x=\frac{17}{8}$ – экстремум

экстремум в точке $\left(\frac{17}{8}; -\frac{49}{8}\right)$

$f(1)=4$
$f(3)=0$




$\frac{49}{8} = 6\frac{1}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)