МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \dfrac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax + b \leqslant 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1, плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124 \end{cases}$$

~~Условие: //1~~

$$-\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124 \end{cases}$$

$$13x - y = 216$$

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)} = 92 \\ y + \sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)} = -124 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x + \sqrt[3]{216\cdot(13x+y)} = 92 \\ y + \sqrt[3]{216\cdot(13x+y)} = -124 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 13x + 6\sqrt[3]{13x+y} = 92 \\ y + 6\sqrt[3]{13x+y} = -124 \end{cases}$$

$$13x + y + 2\cdot 6\sqrt[3]{13x+y} = -32$$

$$13x + y + 12\sqrt[3]{13x+y} + 32 = 0$$

Пусть: $\sqrt[3]{13x+y} = t$, тогда

$t^3 + 12t + 32 = 0$, если есть целые решения, то среди делителей свободного члена

Схема Горнера

	1	0	12	32
−2	1	−2	16	0

$\Rightarrow t^3 + 12t + 32 = (t+2)(t - 2t + 16) = 0$

$$\left\| \begin{array}{l} t - 2t + 16 = 0 \\ D = 4 - 16\cdot 4 < 0 \Rightarrow \text{нет решений} \end{array} \right\| \Rightarrow t = -2 \text{ — ед. корень.}$$

Вернемся к замене:

$t = -2 \Rightarrow \sqrt[3]{13x+y} = -2$

$13x+y = -8$

Имеем:

$$+\begin{cases} 13x+y = -8 \\ 13x-y = 216 \end{cases}$$

$26x = 208$

$x = \frac{104}{13} = 8$

$y = -8 - 104 = \cancel{-10} -112$

Ответ: $(8; -112)$

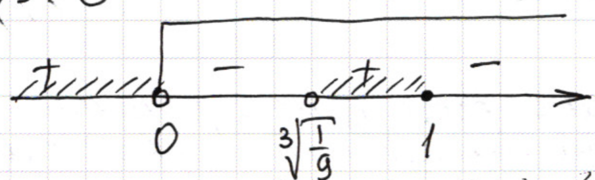
Задача №2

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$$

неотрицательное $\Rightarrow$ $\log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$ - неотрицательное

1) $\log_{9x^3} \frac{1}{x^3} \ge 0$

$$\begin{cases} (9x^3-1)\left(\frac{1}{x^3}-1\right) \ge 0 \\ 9x^3 > 0 \\ 9x^3 \ne 1 \\ \frac{1}{x^3} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{(9x^3-1)(1-x^3)}{x^3} \ge 0 \\ x > 0 \\ x \ne \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \end{cases}$$



Имеем условие: $\cancel{x \in (-\infty; 0) \cup (\sqrt[3]{\tfrac{1}{9}}; 1]}$ $x \in (\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; 1]$

2) Обе части одного знака на условии $\Rightarrow$ можем возвести в квадрат:

$$\log_{3x^2} x^9 \le \log^2_{9x^3} \frac{1}{x^3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9\log_{3x^2} x \le 9\log_{9x^3} x$$

$$\log_{3x^2} x \le \log_{9x^3} x$$

$$\frac{1}{\log_x 3x^2} - \frac{1}{\log_x 9x^3} \le 0$$

$$\frac{\log_x 9x^3 - \log_x 3x^2}{\log_x 3x^2 \cdot \log_x 9x^3} \le 0$$

$$\frac{\log_x \frac{9x^3}{3x^2}}{\log_x 3x^2 \cdot \log_x 9x^3} \le 0$$

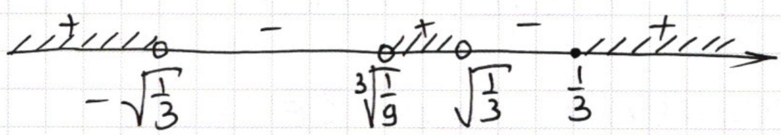
$$\frac{\log_x 3x}{\log_x 3x^2 \cdot \log_x 9x^3} \le 0$$

$\log_x 3x = 0$; $3x = 1$; $x = \frac{1}{3}$

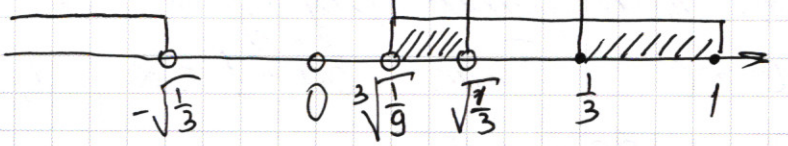
$\log_x 3x^2 = 0$; $3x^2 = 1$; $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\log_x 9x^3 = 0$; $9x^3 = 1$; $x = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(x + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x - \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)} \le 0$$



С учетом условия:



Итак, $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right]$

Ответ: $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right]$

Задача №3

Определим, остатки от ~~каких~~ степеней десяти могут в сумме дать 12828. Весьма очевидно, что степени больше 5-ой рассматривать нет смысла, так как в этом случае один из остатков будет представлять собой шести- (и более) значное число. Рассмотрим максимально возможные остатки от деления на $10^1, 10^2, 10^3$: $999 + 99 + 9 = 1107 < 12828 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ сумма не может состоять из остатков от деления на $10^1, 10^2; 10^3$. Аналогично, проверим для $10^2; 10^3; 10^4$: $9999 + 999 + 99 = 11007 < 12828 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ сумма не может состоять из остатков от деления на $10^2, 10^3; 10^4$. $\Rightarrow$ подходящие делители: $10^5; 10^4; 10^3$ (отдельно рассматривать ситуацию, когда в разряде ~~миллионов~~ сотен тысяч стоит 0 ~~нет~~ не имеет смысла)

Запишем число в виде: $xydcbae$.

Тогда остатки на $10^5, 10^4, 10^3$ соответственно равны: $dcbae$, $cbae$ и bae. (x, y, d, e, c, b, a — цифры)

Имеем:

$$\begin{array}{r} dcbae \\ +\ \ cbae \\ +\ \ \ bae \\ \hline 12828 \end{array}$$

Заметим, что $3e = \ldots 8$. При умножении на 3 только 6 дает последнюю цифру 8 $\Rightarrow$ $\Rightarrow e = 6$. Тогда $3a + 1 = \ldots 2$ (+1, потому что $3e = 18$) $\Rightarrow 3a = \ldots 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При умножении на 3 последнюю цифру 1 дает только 7 => ~~$b=7$~~ $a=7$

$3b+2=\dots8$ (+2, потому что ~~b~~ $3\cdot7=21$) => $3b=\dots6$.

Аналогично понимаем, что $b=2$

$2c=\dots2$ => $c=1$

$d=1$

Имеем число: $xy11276$.

x и y могут быть любыми => $x\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; $y\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Всего возможно $9\cdot10$ комбинаций =>

=> 90 чисел

Ответ: 90

№6

$$\frac{12x+26}{2x+3}\le ax+b\le 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$$

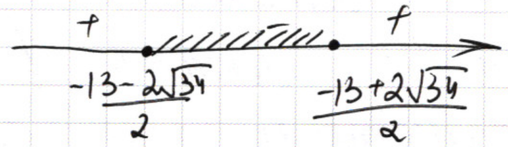
Пусть $f(x)=\frac{12x+26}{2x+3}=\left\|\begin{array}{r|l} -\,12x+26 & 2x+3 \\ 12x+18 & 6 \\ \hline 8 & \end{array}\right\|=6+\frac{8}{2x+3}$,

$g(x)=1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$; $h(x)=ax+b$.

Построим функции ~~на~~ в координатной плоскости xOy.

Условие: $x^2+13x+\frac{33}{4}\le0$ и $x\ne\frac{3}{2}$

$$\left\|\begin{array}{l} D=169-33=136 \\ x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{136}}{2}=\frac{-13\pm2\sqrt{34}}{2} \end{array}\right\|$$



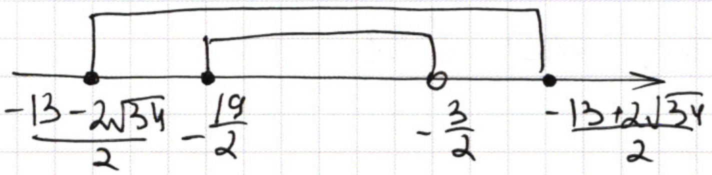
Проверим попадает ли заданный промежуток в условие

$$\frac{-13+2\sqrt{34}}{2} > -\frac{3}{2} \qquad \frac{-13-2\sqrt{34}}{2} < -\frac{19}{2}$$

$$13-2\sqrt{34} < 3 \qquad -2\sqrt{34} < -6$$

$$-2\sqrt{34} < -10 \qquad 2\sqrt{34} > 6$$

$$136 > 100 \qquad 136 > 36$$



$\Downarrow$

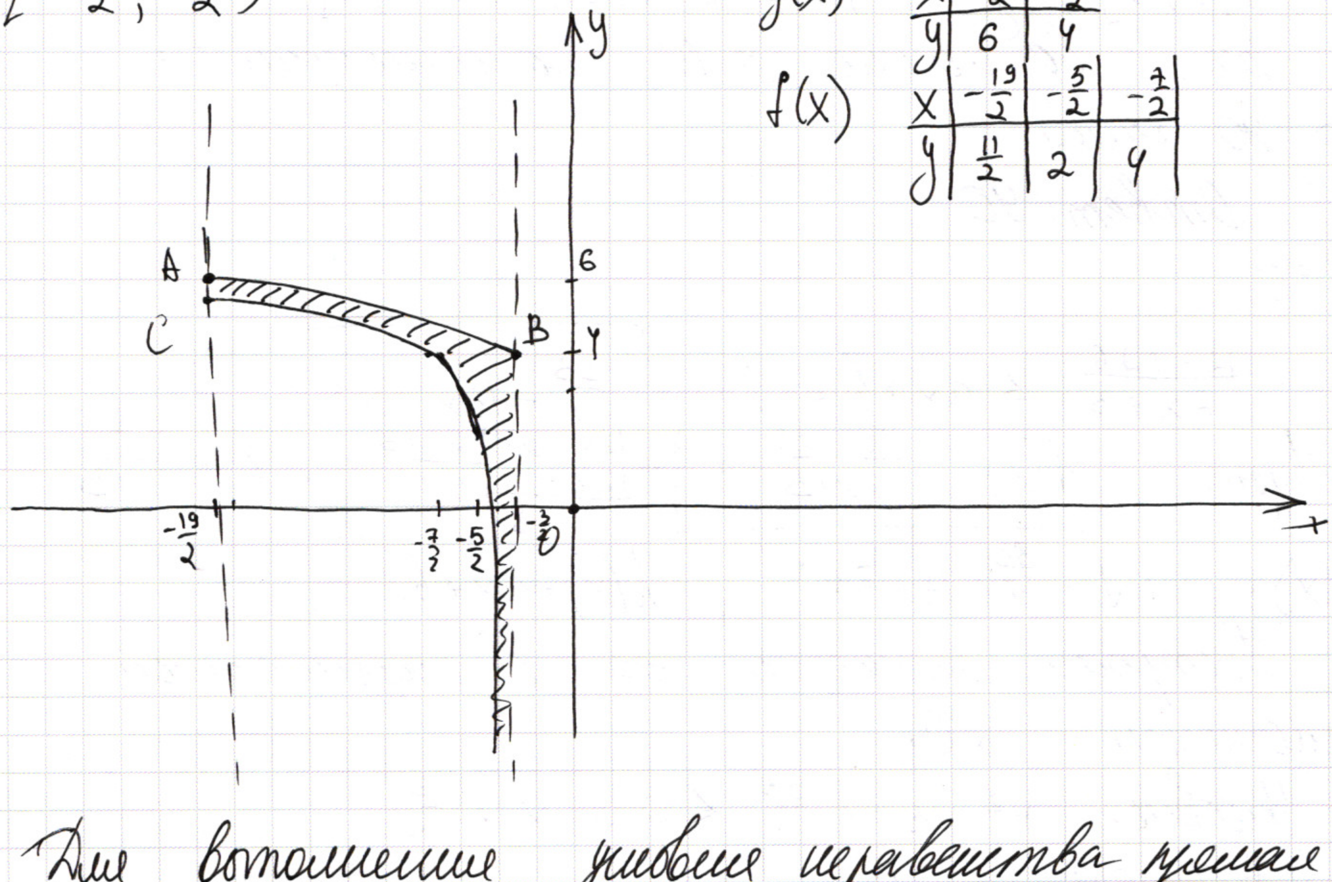
Заданный промежуток попал в условие
Построим графики функций на промежутке
$\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

$g(x)$:

x	$-\frac{19}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y	6	4

$f(x)$

x	$-\frac{19}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$
y	$\frac{11}{2}$	2	4



Для выполнения условия неравенства прямая должна лежать в заштрихованной области.
Заметим, что максимальный наклон прямой

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

будет, когда она пройдёт через точку A и коснется гиперболы. В этом же случае будет максимальное „поднятие" ⇒ мин. b и макс. a.

Минимальное a ⇒ когда пройдет через B и A.

~~Максимальное~~ Минимальное b ⇒ через B и C.

Тогда:

1) $\begin{cases} -\frac{19}{2}a + b = 6 \\ \frac{12x+26}{2x+3} = ax + b \end{cases}$ $\begin{cases} b = 6 + \frac{19}{2}a \\ \frac{12x+26-(2x+3)(ax+b)}{2x+3} = 0 \end{cases}$

$2ax^2 + 21ax + \frac{57a}{2} - 8 = 0$

Для того, чтобы было касание $D = 0$

$D = 213a^2 + 64a = 0$

$a(213a + 64) = 0$

$a = 0$, $b = 6$ или $a = -\frac{64}{213}$, $b = \frac{670}{213}$ — не уд, касание со второй частью гиперболы

2) $\begin{cases} -\frac{3}{2}a + b = 4 \\ -\frac{19}{2}a + b = 6 \end{cases}$

$\frac{16}{2}a = -2$

$a = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$

3) $\begin{cases} -\frac{19}{2}a + b = \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2}a + b = 4 \end{cases}$

$\frac{16}{2}a = \frac{3}{2}$

$a = \frac{3}{16}$

$b = \frac{137}{32}$

~~$a \in [-\frac{1}{4};$~~ $a \in [-\frac{1}{4}; 0]$ $b \in [\frac{137}{32}; 6]$

~~$b \in [6; \frac{137}{}$~~

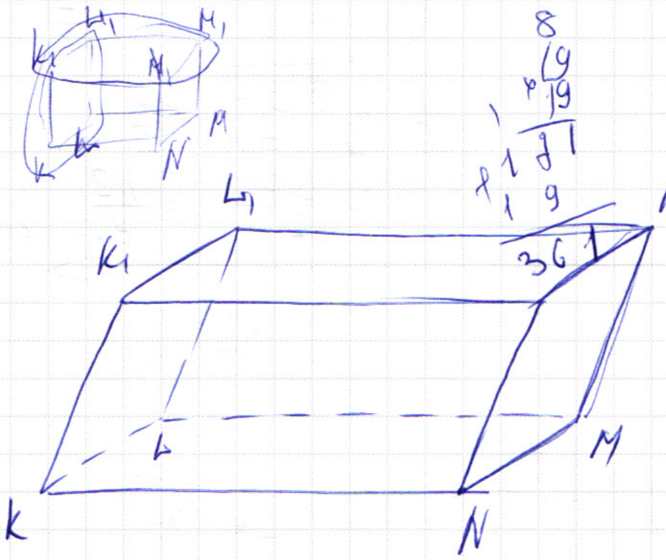
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$1+\sqrt{-\frac{33}{4}+\frac{13\cdot 19}{2}-\frac{19^2}{4}}=$$

$19 \cdot 19 = 361$

$361 + 33 = 394$

$13 \cdot 19 = 247$

$247 \cdot 2 = 494$

$\cancel{11}$ $x = -\frac{19}{2}$

$\frac{10}{2}+1=6$

$$y = f(x_0) + \cancel{f'(x-x_0)} \quad f'(x_0)(x_c - x_0)$$

$$f'(x) = 6 + \frac{8}{2x+3} = \cancel{8} \quad \frac{16}{(2x+3)^2}$$

$$6+\frac{8}{-19+3}+\frac{16}{(-19+3)^2}\left(x+\frac{19}{2}\right)=$$

$$= 6-\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\cdot x+\frac{19}{32}$$

$39 \cdot 2 = 78$

$\frac{39}{2}$

$33 + 9 = 42$

$78 - 42 = 36$

$$1+\sqrt{-\frac{33}{4}+\frac{13\cdot 3}{2}-\frac{9}{4}}$$

$$1+\sqrt{\frac{36}{4}} = 1+\frac{6}{2} = 4$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$-\frac{19}{2}a + b = \frac{11}{2}$$

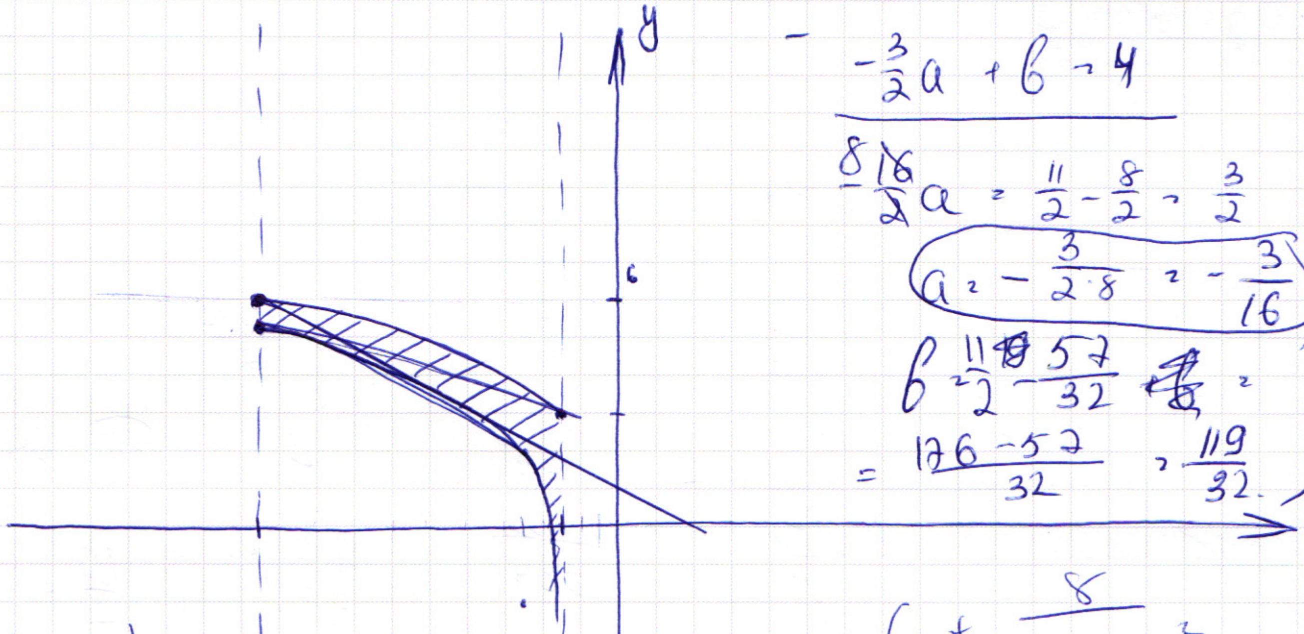
$$-\frac{3}{2}a + b = 4$$

$$-\frac{16}{2}a = \frac{11}{2} - \frac{8}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{3}{2\cdot 8} = -\frac{3}{16}$$

$$b = \frac{11}{2} - \frac{57}{32} = \frac{176-57}{32} = \frac{119}{32}$$

$176 - 57 = 119$



$$6 + \frac{8}{2x+3} =$$

$$6 + \frac{8}{-4} = 6 + \frac{8}{-5+3} = 6 - 2 = 2$$

$$b = 6 + \frac{19}{2}a$$

$19 + 7 = 133$

$213 \times 6 = 1278$

$1278 - 608 = 670$

$19 \cdot 32 = 38$, 57, 608

$$\frac{19}{2} \cdot \frac{64}{213}$$

$57 \cdot 4 = 228$

$441 - 228 = 213$

64

$8 \cdot 4 \cdot 2$

$$-\frac{19}{2}a + b = 6$$

$$a = \frac{2(b-6)}{19}$$

$$b = \frac{670}{213}$$

$$6 + \frac{8}{2x+3} = ax + b$$

$$\frac{12x + 26 - (ax+b)\cdot(2x+3)}{2x+3} = 0$$

$$12x + 26 - 2ax^2 - 3ax - 2bx - 3b = 0$$

$$26 + x(12 - 3a - 2b) - 3b - 2ax^2 = 0$$

$$2ax^2 - x(12 - 3a - 2b) + 3b - 26 = 0$$

$$2ax^2 - x(\cancel{12} - 3a - \cancel{12} - 19a) + 18 + \frac{19\cdot 3}{2}a - 26 = 0$$

$$2ax^2 + 21ax + \frac{57a}{2} - 8 = 0$$

$$D = 441a^2 - 4\cdot 2a \cdot \frac{57a}{2} + 8a\cdot 4\cdot 2 = \quad 213a^2 + 64a = 0$$

$$a(213a + 64) = 0$$

$a = 0$, $b = 6$ или $a = -\frac{64}{213}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\cos(2x-y)}$ $\cos 2x\cdot\cos y + \sin 2x\cdot\sin y + \sqrt{5}(\sin 2x\cdot\cos y - \cos 2x\cdot\sin y) = 12\sin y\cdot\cos\frac{\pi}{6} + 12\,\overset{\cos}{\cancel{\sin y}}\cdot\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\frac{\pi}{6}$

$\cos 2x\cdot\cos y + \sin 2x\cdot\sin y + \sqrt{3}\sin 2x\cos y - \sqrt{3}\cos 2x\cdot\sin y =$

$= \overset{6}{\cancel{12}}\sin y\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + 6\cos y$

$\cos 2x(\cos y - \sqrt{3}\sin y) + \sin 2x(\sin y + \sqrt{3}\cos y) =$

$= 6(\sqrt{3}\sin y + \cos y)$

$\cancel{\cos \quad \sin x \quad \sin}$

$\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cdot\cos y - \sin y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y}$

$\cos 2x\cdot\cos y + \sin 2x\cdot\sin y + \sqrt{3}\sin 2x\cos y - \sqrt{3}\cos 2x\sin y = 6\sqrt{3}\sin y + 6\cos y$

$\sqrt{3}\cos x\cdot\cos y$

$$\begin{cases}\sqrt{3}(\cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y) = \cancel{\frac{1}{2}\cos}\cos y + \frac{7\sqrt{3}}{2}\sin y\\ \cos 2x\cdot\cos y + \sin 2x\cdot\sin y + \sqrt{3}\sin 2x\cdot\cos y - \sqrt{5}\cos 2x\cdot\sin y = 6(\sqrt{3}\sin y + \cos y)\end{cases}$$

$\sqrt{3}\cos x\cdot\cos y + \sqrt{3}\sin x\sin y \mp \cos 2x\cdot\cos y \mp \sin 2x\cdot\sin y \mp \sqrt{3}\sin 2x\cdot\cos y \mp$

$\mp\sqrt{3}\cos 2x\cdot\sin y = -\frac{5}{2}(\cos y + \sin y)$

$\frac{137}{32}$

$-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{16}$

$137\,|\,32$
$-128\,|\,4$

$4 + \frac{9}{32} =$

$\times\ 32$
$\ \ \ 4$
$+128$
$\ \ \ \ 9$
137

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{12x+26}{12x+18}\Big|\frac{2x+3}{6}, \quad 8$$

$$\Rightarrow \; 6+\frac{8}{2x+3} \le ax+b \le 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$$

$$-\frac{33}{4}-13x-x^2 \ge 0$$

$$x^2+13x+\frac{33}{4} \le 0$$

$$D = 169-4\cdot\frac{33}{4} = 169-33 = 136$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm 2\sqrt{34}}{2}$$

$$\frac{-13-2\sqrt{34}}{2} < -\frac{19}{2}$$

$$-2\sqrt{34} < -22$$

$$\sqrt{34} < 11$$

$$34 < 121$$

$$-\frac{33}{4}+\frac{13}{2}-\frac{19^2}{4}$$

$1+\sqrt{32}$

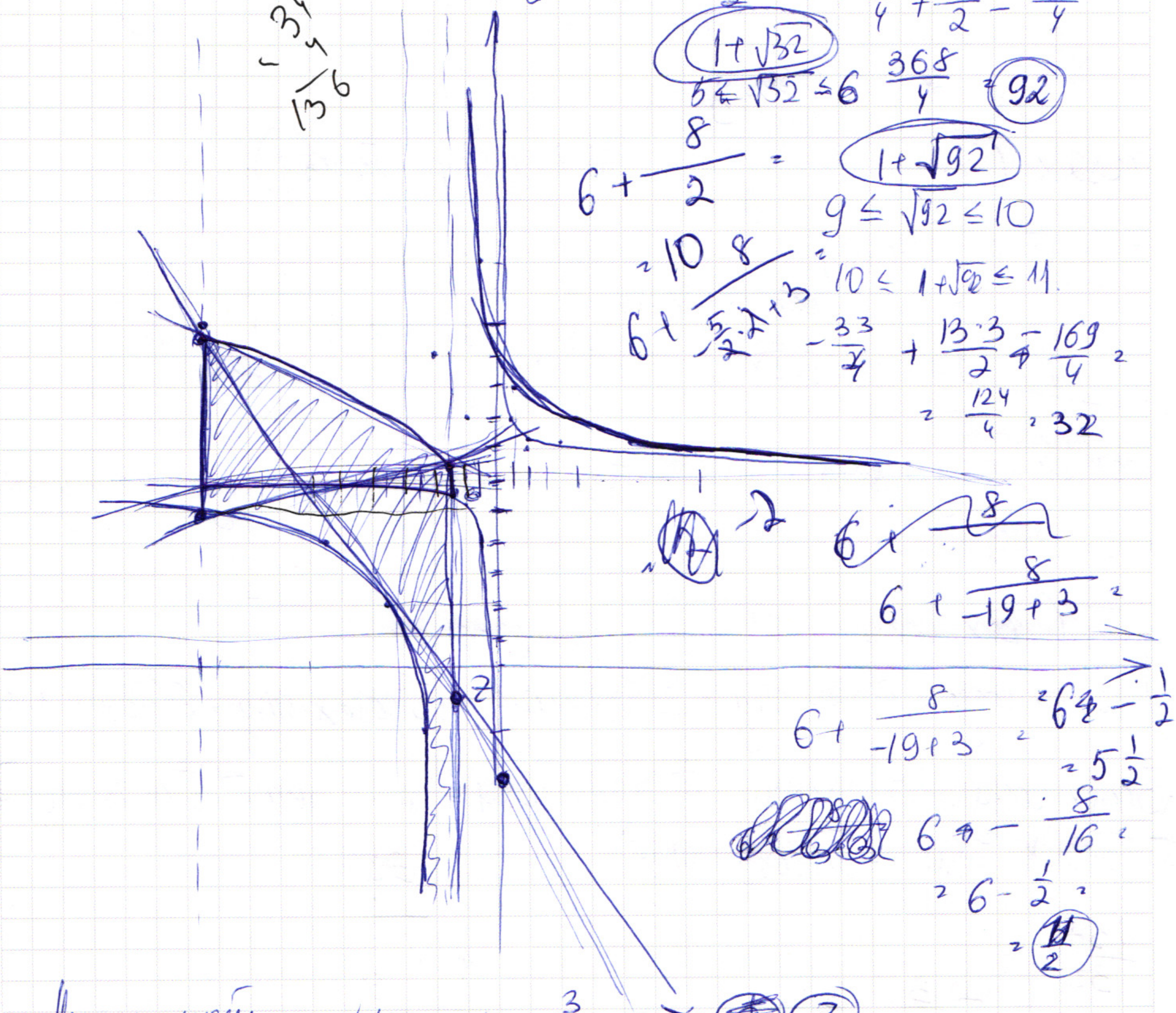
$5 \le \sqrt{32} \le 6$ $\quad \frac{368}{4} = 92$

$$6+\frac{8}{2} = 1+\sqrt{92}$$

$9 \le \sqrt{92} \le 10$

$= 10$ $\quad 10 \le 1+\sqrt{92} \le 11$

$$6+\frac{8}{-\frac{5}{2}\cdot 2+3} = \qquad -\frac{33}{4}+\frac{13\cdot 3}{2}-\frac{169}{4} = \frac{124}{4} = 32$$



$= 2$

$$6+\frac{8}{-19+3} = 6-\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$$

$$6-\frac{8}{16} = 6-\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$6+\frac{8}{-19+3} =$$

К прямой при $x = -\frac{3}{2}$, $y = 2$

$$6+\frac{8}{-\frac{5}{2}\cdot 2+3} = 6+\frac{8}{-2} = 6-4 = 2$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$+\begin{cases} 13x+y=8 \\ 13x-y=216 \end{cases}$$

$26x=224$

$13x=112$

$x=\frac{112}{13}=8\frac{8}{13}$

$13\cdot\frac{112}{13}+y=8 \Rightarrow 112+y=8$

$y=8-112=-104$

$112+104=216$

$\begin{cases} x=\frac{112}{3} & y=-104 \end{cases}$

$+\frac{216}{8}\over 224$

$-\begin{cases} \frac{19}{2}a+b=1+\sqrt{92} \\ \frac{3}{2}a+b=1+\sqrt{32} \end{cases}$

$\times\frac{13}{8}\over 104$

$-8a=\sqrt{92}-\sqrt{32}$

$a=-\frac{\sqrt{92}-\sqrt{32}}{8}=\frac{\sqrt{32}-\sqrt{92}}{8}$

$b=-\frac{19(\sqrt{32}-\sqrt{92})}{16}+1+\sqrt{92}$

$b=\left(\frac{19\sqrt{32}}{16}-\frac{3\sqrt{92}}{16}\right)+1=\frac{19\sqrt{32}-3\sqrt{92}+16}{16}$

$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3}\frac{1}{x^3}$ — не может быть отриц.

неотр. неотр.

$\log_{9x^3}\frac{1}{x^3}\geq 0$

$(9x^3-1)\left(\frac{1}{x^3}-1\right)\geq 0 \Rightarrow (9x^3-1)\left(\frac{1-x^3}{x^3}\right)\geq 0$

$\frac{(9x^3-1)(1-x^3)}{x^3}\geq 0$

$9x^3-1=0$

$9x^3=1$

$x^3=\frac{1}{9}$

$x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

$\frac{1}{x^3}=1$

$x^3=1$

$x=1$

$0 \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \quad 1$

$x\in(-\infty;0)\cup\left[\sqrt[3]{\frac{1}{9}};1\right]$

$\log_{3x^2} x^9 \le \log^2_{9x^3}\frac{1}{x^3}$

$3\,\cancel{9}\log_{3x^2}x+\cancel{3}\log_{9x^3}x\le 0$

$\log_{\sqrt[3]{3x^2}}x+\log_{9x^3}x\le 0$

$\cancel{\log_{\sqrt[3]{3x^2}}}$

$\frac{1}{3\log_x\sqrt[3]{3x^2}}+\frac{1}{\log_x 9x^3}\le 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92$

$y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124$

$c^3 = 169x^2 - y^2 = (13x - y)(13x + y)$

$\sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 - 13x$

$\begin{cases} 13x + c = 92 \\ y + c = -124 \end{cases}$

$13x - y = 92 + 124$

$13x - y = 216$

$169x^2 > y^2$

$32 \cdot 32 = 1024$, $144 \cdot 12 = 1728$, $1024 \cdot 32 = 32768$, $124 - 92 = 32$, $216 - 8 = 208$

$13x + \sqrt[3]{(13x - y)(13x + y)} = 92$

$\begin{cases} 13x + 6\sqrt[3]{13x + y} = 92 \\ y + 6\sqrt[3]{13x + y} = -124 \end{cases}$

$13x + y + 12\sqrt[3]{13x + y} = -32$

Заменим $\sqrt[3]{13x + y} = t$

$t^3 + 12t + 32 = 0$

$32: \pm 1\ \pm 2\ \pm 4\ \pm 8\ \pm 16\ \pm 32$

$t^3 + 12t + 32 = 0$

$t(t^2 + 12) = -32$

$-2(4 + 12)$

	1	0	12	32
−4	1	−4	−4	
8	1	8		
−2	1	−2	16	0

$(t + 2)(t^2 - 2t + 16) = 0$

$t^2 - 2t + 16 = 0$

$D = 4 - 164 < 0 \Rightarrow$ решений нет $\Rightarrow$

$\Rightarrow t = 2 \qquad \sqrt[3]{13x + y} = 2 \Rightarrow 13x + y = 8$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\left.\begin{array}{l} ax+b=1+\sqrt{92} \\ -\frac{19}{2}a+b=1+\sqrt{92} \end{array}\right| \Rightarrow b=1+\sqrt{92}+\frac{19}{2}a$$

$$\frac{12x+26}{2x+3}=ax+b$$

$$\frac{12x+26-(2x+3)(ax+b)}{2x+3}=0$$

$$12x+26-(2ax^2+2bx+3ax+3b)=0$$

$$12x+26-2ax^2-x(2b+3a)-3b=0$$

$$2ax^2+x\underline{(2b+3a-12)}-3b+26=0$$

$$D=(2b+3a-12)^2-8a(26-3b)=0$$

$$1+\sqrt{92}+\frac{19}{2}a+\frac{6}{2}a-12=\boxed{(\sqrt{92}-11)+\frac{25}{2}a}$$

$$92+121-22\sqrt{92}+25(\sqrt{92}-11)a+\frac{625}{4}a^2=0$$

$$231-22\sqrt{92}+25(\sqrt{92}-11)a+\frac{625}{4}a^2=0$$

$$\cancel{D=625(231-22\sqrt{92})-4\cdot\frac{625}{4}(231-22\sqrt{92})}$$

$$8a\left(26-3-3\sqrt{92}-\frac{19\cdot 3}{2}a\right)=8a\left(23-3\sqrt{92}-\frac{19\cdot 3}{2}a\right)$$

$$231-22\sqrt{92}+25(\sqrt{92}-11)a-8(23-3\sqrt{92})a+\frac{57}{2}a^2+\frac{625}{4}a^2=$$

$$=231-22\sqrt{92}+a(25\sqrt{92}-275-184+24\sqrt{92})+\frac{739}{4}a^2$$

$$231-22\sqrt{92}+a(49\sqrt{92}-459)+\frac{739}{4}a^2$$

$$D=49^2\cdot 92-459\cdot 49\cdot 2\cdot\sqrt{92}+459^2-(231-22\sqrt{92})\cdot 739=$$

$$=128892$$

$23\cdot 8=184$, $57\cdot 2=114$, $625+114=739$, $275+184=459$

$49\cdot 49$: $441+196=2401$; $2401\cdot 92$: $4802+21609=128892$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

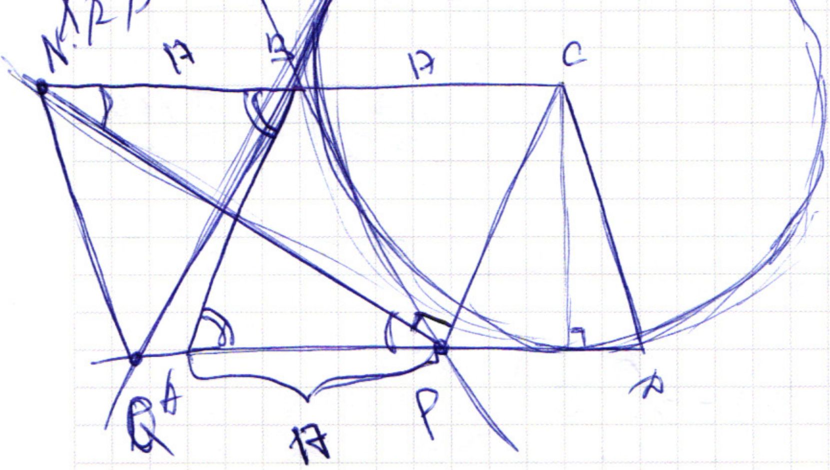
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1 2 3 4 5 6 7



$\operatorname{tg} \angle NCP = \frac{15}{8} = \frac{NP}{CP}$

$\sqrt{225x^2 + 64x^2} = 34$

$+\begin{array}{r}225\\64\\\hline 289\end{array}$

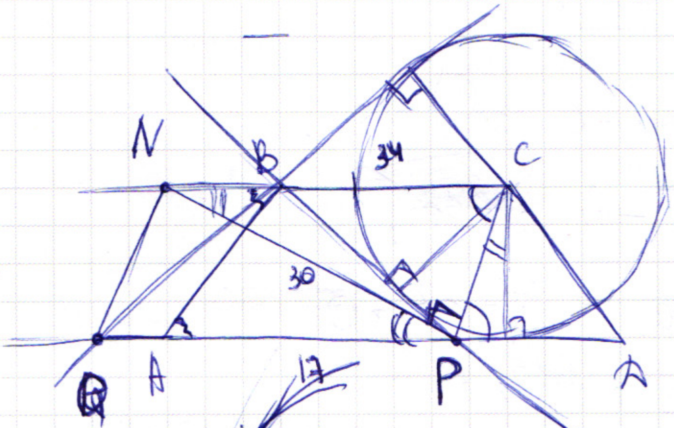
$17x = 34$

$x = 2$

$\Rightarrow CP = 16$

$NP = 30$

$\operatorname{tg} \angle PCK =$



$17x = 16$

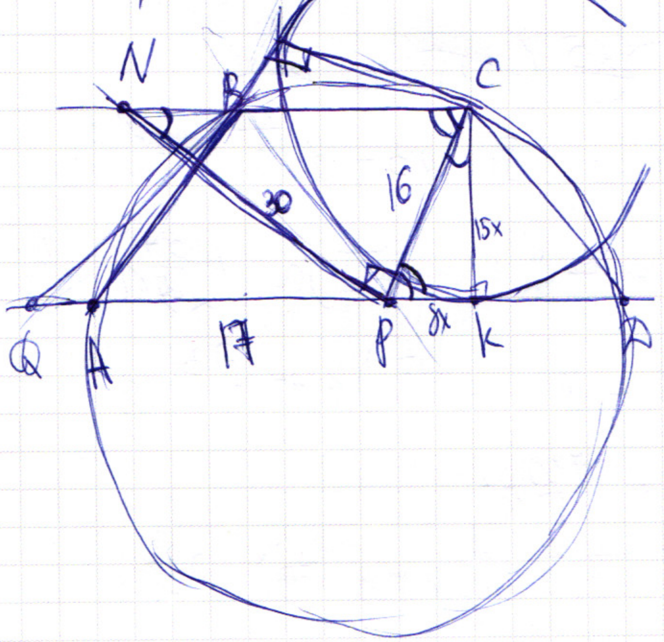
$x = \frac{16}{17}$

$CK = \frac{16 \cdot 15}{17} = \cancel{\sqrt{BC \cdot AD}}$

$AK = BC + \frac{AD - BC}{2} =$

$AK = \frac{AD + BC}{2} = 17 + \frac{16 \cdot 8}{17}$

$KD = AD - AK =$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\log_x 9x^3 + \log_x \sqrt[3]{3x^2}}{\log_x \sqrt[3]{3x^2} \cdot \log_x 9x^3} \le 0$$

$$\frac{\log_x 9x^3 \cdot \sqrt[3]{3x^2}}{\frac{1}{3}\log_x 3x^2 \cdot \log_x 9x^3} \le 0$$

$$\log_x 9x^3 \sqrt[3]{3x^2} = 0$$

$$(x-1)(9x^3 \cdot 3\sqrt[3]{x^2} - 1) \le 0$$

$$9x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}} = 9x^{\frac{11}{3}} = 1$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{9}\right)^4}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{9}\right)^4} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \quad 1$$

нет решений

$\Rightarrow x \in \left[\sqrt[3]{\left(\frac{1}{9}\right)^4}\right.$

С учетом условия, $x \in \left(\sqrt{\frac{1}{3}}; 1\right)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_x 9x^3 \sqrt[3]{x^2} \le 0 \\ \log_x 3x^2 \log_x 9x^3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_x 9x^3 \sqrt[3]{x^2} \ge 0 \\ \log_x 3x^2 \log_x 9x^3 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\log_x 3x^2 \cdot \log_x 9x^3 > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_x 3x^2 > 0 \\ \log_x 9x^3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_x 3x^2 < 0 \\ \log_x 9x^3 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$x \in \left(-\infty; \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$

$$(x-1)(3x^2-1) > 0$$

$\sqrt{\frac{1}{3}} \quad 1$

$$(x-1)(9x^3-1) > 0$$

$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} \quad 1$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

3 6 9 12 15 18 21 24 27

5 4 3 2 1

$$\begin{array}{r} 999 \\ +\ 99 \\ \hline 1098 \\ +\quad 9 \\ \hline 1107 \end{array}$$

$1107 < 12828 \Rightarrow$ степени от 5; 4; 3

$$\begin{array}{r} 9999 \\ +\ 999 \\ \hline 10998 \\ +\quad 9 \\ \hline 11007 \end{array}$$

$11007 < 12828$

но не может быть 6; 5; 4, т.к. будет больше

$\overline{dcbae}$

$$\begin{array}{r} dcbae \\ +\ cbae \\ +\ bae \\ \hline \end{array}$$

$3e = ...8$

Только только при умножении на 6 дает ~~остаток~~ последнюю 8 цифру

$\Rightarrow e = 6$

$3a + 1 = ...2$

$3a = ...1 \Rightarrow a = 7$

$3b = 6 \Rightarrow b = 2$

$2c = 2 \Rightarrow 1 = c$

$$\begin{array}{r} 11276 \\ +\ 1276 \\ \hline 12552 \\ +\ 276 \\ \hline 12828 \end{array}$$

$\Rightarrow$ числа имеют вид $d = 1$

$xy11276$, где $x \in \overbrace{\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}}^{9}$

$y \in \underbrace{\{...; 0\}}_{10}$

$9 \cdot 10 = 90$

4/x

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$\sqrt{3}\cos x \cdot \cos y + \sqrt{3}\sin x \cdot \sin y = 7\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos y - \sin\frac{2\pi}{3}\sin y\right)$

$\sqrt{3}\cos x \cdot \cos y + \sqrt{3}\sin x \cdot \sin y = -\frac{7}{2}\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)