МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№2

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$a=x-1$; $-6a=6-6x$

$b=y-6$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \Rightarrow 9a^2+b^2=90$

$\sqrt{xy-y-6x+6}=\sqrt{(y-6)(x-1)}=\sqrt{ab}$

$\sqrt{ab}=b-6a$

ОДЗ:

$b-6a\geq0$

$ab\geq0$

$ab=b^2+36a^2-12ab$

$36a^2+b^2-13ab=0$

$9a^2+b^2=90$

$b=0$

~~$\frac{a}{b}=t$~~

~~$36t^2-13t+1=0$~~

~~$D=169-144=25$~~

~~$t_0=\frac{13\pm5}{72}$~~

$\left(\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}\cdot2\right)^2=9$

$a^2=10$

$0=b-6a=-6a$

$a=0$

$b\neq0$

$\frac{b}{a}=t$

$4a-6a\geq0$

$a\leq0$

$a=0$

$b=0$

$9a^2+b^2\neq90$

$t^2-13t+36=0$

$D=25$

$t_0=\frac{13\pm5}{2}=4;9$

$\left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=9a \end{array}\right.$

$a=\frac{-3\sqrt2}{\sqrt5}$

$ab=\frac{9\cdot2}{5}\cdot4=\frac{72}{5}$

$\left[\begin{array}{l} 9a^2+16a^2=90 \\ 9a^2+81a^2=90 \end{array}\right.$ $a^2=\frac{18}{5}$; $a=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}=$

$a^2=1$

$a=1$; $b=9 \Rightarrow x=2$; $y=15$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~sin x~~

~~sin~~

$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$+\sin x$

$\sin x \cos 4\beta + \cos x \sin 4\beta = \sin x(\cos^2 y - \sin^2 y) + 2\cos x \sin y \cos y = \frac{-2}{17} =$

$= \sin x(1 - \sin^2 y + \cos^2 y) + 2 \sin y \cos x \cos y \quad = 2\sin x \cos^2 y + 2\sin y \cos x \cos y =$

$= 2\cos y(\cancel{\sin x \sin y}$

$\sin x \cos y$

$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$

$2\cos y(\sin x \cos y + \sin y \cos x) = -\frac{2}{17}$

$2\cos y \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{-2}{17}$

$\sin\alpha = \frac{12{,}5}{R} = \frac{13}{4R}$

$\cos\alpha = \frac{d}{R}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12{,}5}{d} = \frac{13}{r} = \frac{12}{2d-r}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$??

$\cos y = \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin y = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$r = \frac{26}{25}d \quad \frac{12}{\frac{24}{25}d} = \frac{25}{2d} =$

$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \frac{2}{\sqrt{17}}\sin\alpha\cos\alpha \pm \frac{4}{\sqrt{17}}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$

$m = \sin\alpha$

$n = \cos\alpha$

$2mn \pm 4(n^2 - m^2) = -(m^2 + n^2)$

$\left[\begin{array}{l} 4n^2 - 4m^2 + m^2 + n^2 + 2mn = 5n^2 + 2mn - 3m^2 = 0 \Rightarrow -3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + 5 = 0 \\ 5\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0 \end{array}\right.$

$3\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 5 = 0$

$D = 4 + 60 = 64$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 \pm 8}{6} = -1;\ \frac{5}{3}$

$D = 4 + 60 = 64$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-2 \pm 8}{10} = -1;\ \frac{6}{10}\ \frac{3}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	0	1	0	1	0	0	0	2	0	3	0	0	0	4	0	4	0	0	0	5	0	0	0	0	0

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

$x \in P; y \in P \Rightarrow$ см табл.

$x, y \notin P - x, y \in \varnothing$

$f(16) = f(2) + f(5)$

$x \notin P; y \in P - \checkmark$

$x \in P; y \notin P - \varnothing$

1 1 2 3 4 4 5

0 0 2 3 4 4 6 = 19

$7 \cdot (25 - 7) = 7 \cdot 18$

$f(x) = \frac{4}{3x-2} - 2$

$f'(x) = \frac{0(3x-2) - 3(4)}{(3x-2)^2} = a$

17

$\frac{-12}{(3x-2)^2} = a$

N 5

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$

34

17

$f(2)$

$f(1)$

$4 - (6x-4) = \frac{4}{3x-2} - 2$

$(3x-2)^2 = \frac{-12}{a}$

$\frac{4/3}{x - \frac{2}{3}}$

$3x - 2 = \sqrt{\frac{-12}{a}}$

$18x^2 - 51x + 28 = 0$

$x_b = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$\begin{array}{r} 1 \\ 81 \\ +64 \\ \cancel{+} \\ \hline 18 \\ \hline 163 \end{array}$

$x = \frac{2 + \sqrt{\frac{-12}{a}}}{3}$

$y = \frac{4}{\sqrt{\frac{-12}{a}}} - 2 =$

-5

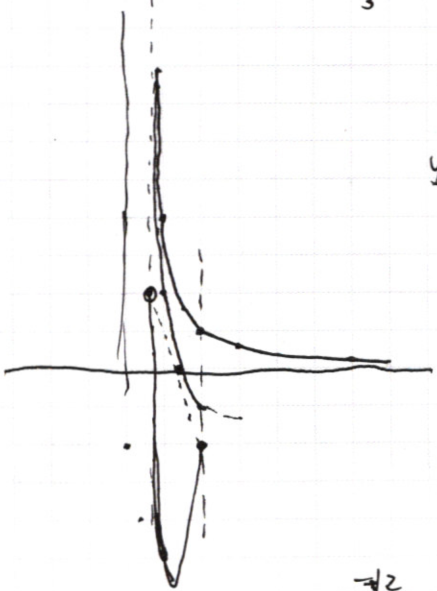
$4\sqrt{\frac{a}{-12}} - 2 =$

$8 - 34 + 28 =$

$32,5 - 25,5$

$= \sqrt{-\frac{4}{3}a} - 2$

$72 - 102 + 28$



~~$a(x) + b$ ...~~

$\frac{4}{3}$

$2a + b \in [-2; 1]$

b

$\frac{-12}{(3x-2)^2} = -3$

$2a + b \geq -2$

$2a \in [-b-2; -b+1]$

$a + b \geq 2$

$(3x-2)^2 = \frac{-12}{-3} = 4$

$(3x-2) = 2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$26x - x^2 = a$; $a > 0$ $26x - x^2 > 0$ $a^{\log_5 12} + a \geq 13^{\log_5 a}$

$\left(\log_5 12 \; a^{\log_5 12 - 1} + 1\right)$ $13^{\log_5 a} \ln 13 \cdot \frac{1}{a \ln 5}$

$a^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 a}$

$f(2) = 0$ $f(4) = 0$ $f(8)$

$f(3) = 0$ $f(6) = 0$

$f(5) = 1$ $f(7) = 1$

$a^{\log_5 12} + a \geq 13^{\log_5 a}$

x^a

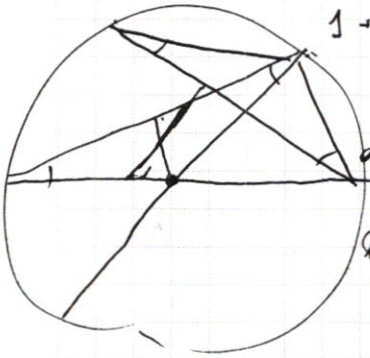
~~$a\left(1 + a^{\log_5 12 - 1}\right) \geq 13^{\log_5 a}$~~

$x^2 - 26x + 13^2 = (x-13)^2$

$\log_a$

$f(abcd) = f(abc) + f(d) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$

$1 + a^{\log_5\left(\frac{12}{5}\right)} \geq$ $\log_a 13 \cdot \log_5 a = \log_5 13$



$a^{\log_5 \frac{12}{5}} \geq \log_5 \frac{13}{5}$

$\frac{3}{2}$ $f(1) + f(1) =$

$\log_3$

$a \geq \log_{\log_5 \frac{12}{5}} \log_5 \frac{13}{5} = \frac{\ln\left(\log_5 \frac{13}{5}\right)}{\ln\left(\log_5 \frac{12}{5}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{\ln(13)}{\ln(5)}\right)}{\ln\left(\frac{\ln(12)}{\ln(5)}\right)} = \frac{\ln^2 13 - \ln^2 5}{\ln^2 12 - \ln^2 5}$

$f(a) + f(b) = f(ab)$; $f(p) = [p/4] = \text{floor}(p/4) = p//4$

$f(1a) = f(a) = f(a) + f(1)$

$f(1) = 0$ $f(2) = [0{,}5] = 0$ $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$

~~$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{y}{5}\right) + f\left(\frac{x-y}{y}\right) = f\left(\frac{x+y}{y}\right)$~~

$f\left(\frac{x}{y}\right) = -f\left(\frac{y}{x}\right)$ $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Rightarrow x = y$ или ??

☑ черновик ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~N5. $f(a\cdot 1)=f(a)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0.$~~

~~Для целых чисел x, $f(x)=[x/4]$, если x — простое число. Если x — составное, то $f(x)=f(d_1 d_2 d_3\dots)=f(d_1)+f(d_2 d_3\dots)=f(d_1)+f(d_2)+f(d_3)+\dots$; где $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3\dots = x$; $d_1; d_2; d_3\dots$ — простые множители. Т.к. $f(2)=f(3)=0$, для $x\in[4;28]$ единственное составное число x, при котором $f(x)\neq 0$ — $x=25$ (наим. простое число после 2 и 3 — 5). $f(5)=1$; $f(25)=2$. Посчитаем значение $f(x)$ для простых x на промеж. $x\in[4;28]$: $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=$~~

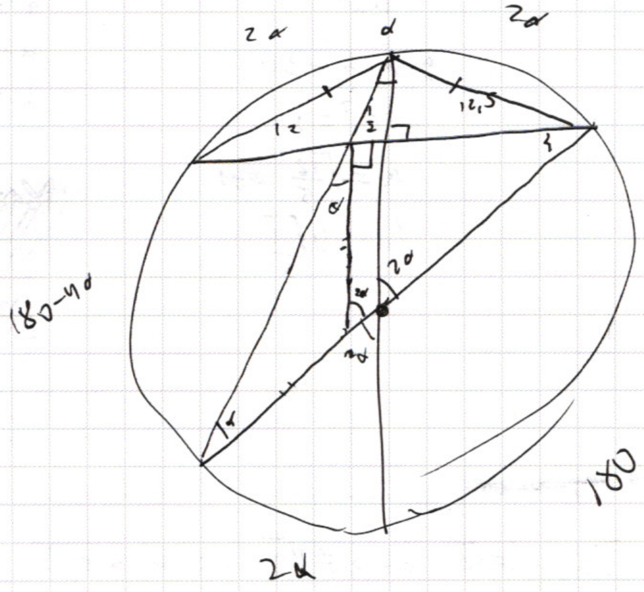
$$\begin{array}{r} 625 \\ -\,163 \\ \hline 462 \end{array} \Big| \underline{2} \quad 231$$

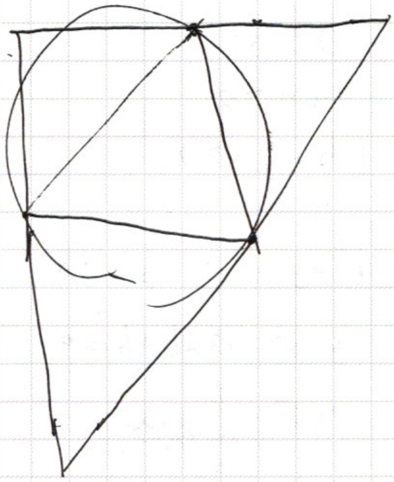
~~$9+17+20+22+24$~~

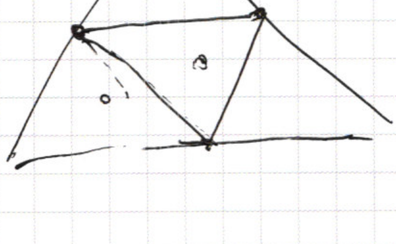
$9\cdot 8+17\cdot 3+20\cdot 2+22\cdot 2+24\cdot 1$

$72+51+40+44+24=$

$$\begin{array}{r} 72 \\ 51 \\ 40 \\ 44 \\ 24 \\ \hline 231 \end{array}$$







☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Пусть $x-1=a$; $y-6=b$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$9a^2+b^2=90$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$b-6a=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$b-6a=\sqrt{ab}$

ОДЗ:

$\begin{cases} ab\geq 0 \\ b-6a\geq 0 \end{cases}$

$b^2+36a^2-12ab=ab$

$36a^2-13ab+b^2=0$

При $a=0$; $b^2=90$; $b=\sqrt{90}$; $b=\sqrt{0}$; $b=0\neq\sqrt{90} \Rightarrow a,b\in\varnothing$

$a\neq 0$.

Пусть $\frac{b}{a}=t$.

$36a^2+b^2-13ab=0 \quad \Big| /a^2;\ a\neq 0$

$t^2-13t+36=0$

$D=169-144=25$

$t=\frac{13\pm5}{2}=9;4$

$\left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=9a \end{array}\right.$

1) $b=4a$

из ОДЗ:

$4a-6a\geq 0$

$a\leq 0$

$ab\geq 0$

$b\leq 0$

$9a^2+b^2=90$

$25a^2=90$

$a=-\sqrt{\frac{18}{5}}$

$b=-4\sqrt{\frac{18}{5}}$

2) $b=9a$

из ОДЗ:

$9a-6a\geq 0$

$a\geq 0$

$b\geq 0$

$9a^2+81a^2=90$

$a^2=1$

$a=1$

$b=9$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В Δ DBO_1

~~$D^2+16g=(2R-r)^2$~~

~~Т.к. CB хорда, а EF диаметр:~~

~~$EH \cdot HF = CH \cdot HB$~~

~~$(R-d)(R+d)=\left(\frac{25}{2}\right)^2$~~

~~R^2-d~~

∠ ~~ACB опир. на диаметр, поэтому ∠ACB = 90°~~

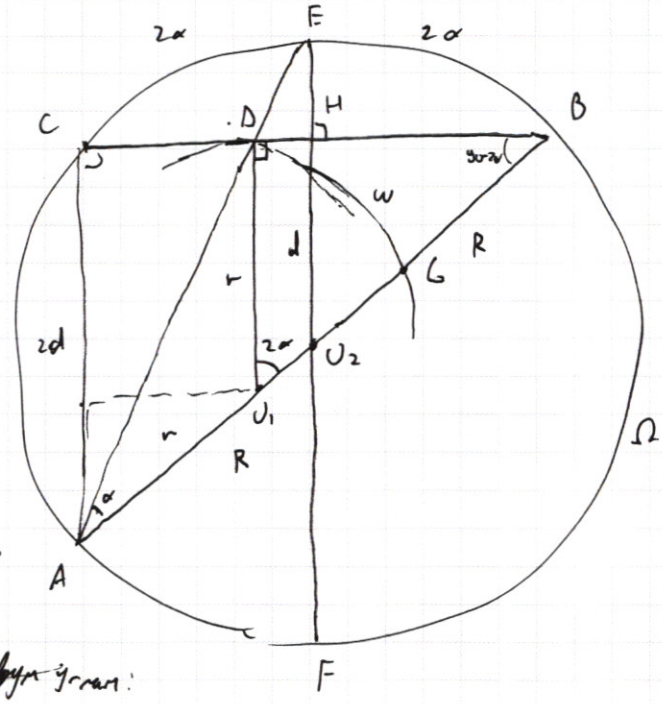
Δ ABC и Δ O_2HB подобны ~~подобны~~ по двум углам:

∠ ~~O_2HB~~ и ~~90°~~ $\frac{CA}{O_2H}=\frac{CB}{HB}=2$

∠ ABC

C ~~A = 2d~~

~~Sth:~~



$180^\circ-4\alpha$

∠ ACB опир. на диаметр AB и равен 90°

Δ ACB и Δ O_2HB подобны по прям. углу и ∠ABC (2 угла).

$\angle CAB = \angle HO_2B = \cup EB = 2\alpha = \angle DO_1B$

$\sin 2\alpha = \frac{25}{2R}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{13}{r} = \frac{12,5}{d} = \frac{EH}{HD} = \frac{R-d}{0,5}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{r}{13} = \frac{2d}{25} = \frac{1}{2(R-d)}$

$\operatorname{ctg}^2\alpha = \left(\frac{2R}{25}\right)^2 - 1 = \frac{4R^2-625}{625} = \frac{4d^2}{625}$

$\frac{4}{625}(R^2-d^2) = 1$

N 6 (продолж.)

Отсюда следует:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}a + b = 0 \\ \frac{2}{3}a + b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a = -2 \\ 2a + 2b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 1 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

Эта прямая проходит над параболой; проверим, что она касается $f_1(x)$ в точке $(\frac{4}{3};0)$:

$$\begin{cases} f_1(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}a + b & \text{— верно изначально} \\ f_1'(\frac{4}{3}) = a \end{cases}$$

$$f_1'(x) = \frac{0(3x-2) - 3(4)}{(3x-2)^2} = \frac{-12}{(3x-2)^2}$$

$f'(\frac{4}{3}) = \frac{-12}{2^2} = \frac{-12}{4} = -3 = a$ — производные равны, прямая-касательная.

Пара $a, b = (-3; 4)$ подходит и является единственной подходящей

Ответ: $a = -3$; ~~...~~ $b = 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2 (продолж.)

1) $a = -\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$; $b = -4\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{5}} = -\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$x = a+1 = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}$; $y = b+6 = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$

2) $a = 1$; $b = 9$

$x = a+1 = 2$; $y = b+6 = 15$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = 2;\ y = 15 \\ x = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5};\ y = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$

N 6

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2 = f_1(x)$; $f_2(x) = 18x^2 - 51x + 28$; $f_1(x) \geq ax + b \geq f_2(x)$

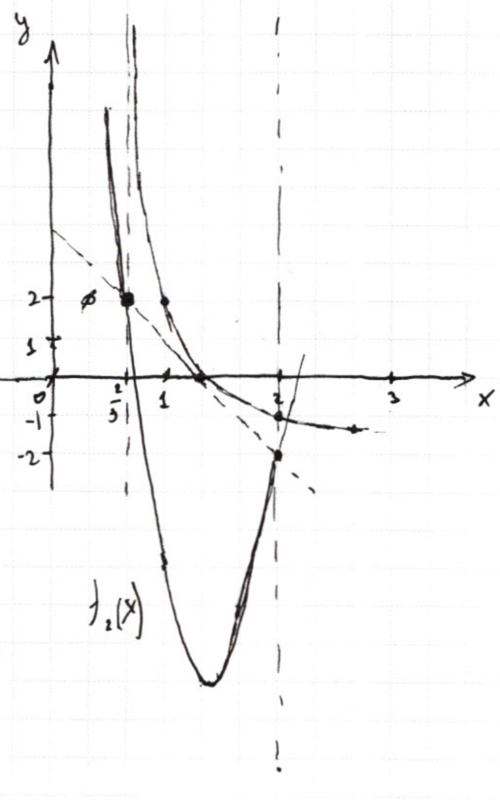
Построим приблизительные графики ~~[illegible]~~ $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$:

прямая должна проходить над пересечениями параболы с прям. $x = \frac{2}{3}$ и $x = 2$, чтобы для любого x $ax+b \geq f_2(x)$.

$f_2\left(\frac{2}{3}\right) = 2$; $f_2(2) = -2$.

Заметим, что точка $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ лежит на графике $y = f_1(x)$ $\left(f_1\left(\frac{4}{3}\right) = 0\right)$ и находится на одной прямой с границами параболы $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и $(2; -2)$

Прямая должна проходить под ней, но над отрезком, соединяющим границы параболы, который содержит эту точку. Значит прямая проходит через эту точку, а значит и через весь отрезок. ~~[illegible]~~



см. лист 3

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$169 + r^2 = x^2$

$a^{\log_5 12} + a \geq 13^{\log_5 a}$

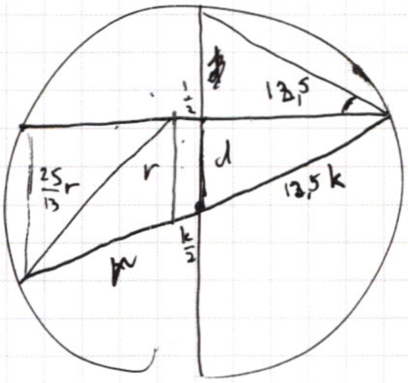
~~$a^{\log_5 12} + a \geq 13^{\log_5 a}$~~

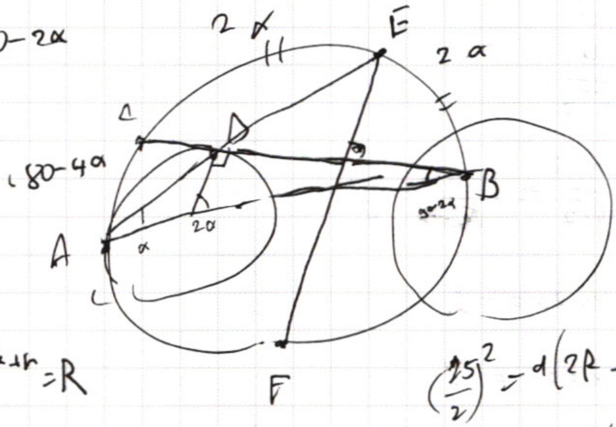
$a^{\log_5 12} - 13^{\log_5 a}$

$\frac{625}{169} r^2 + \frac{625}{4} = R^2$

~~$a(a^{\log_5 12 - 1} + 1)$~~

$180 - 2\alpha$



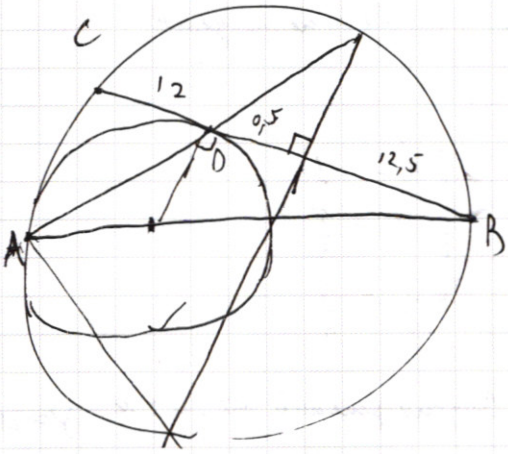


$13k + r = R$

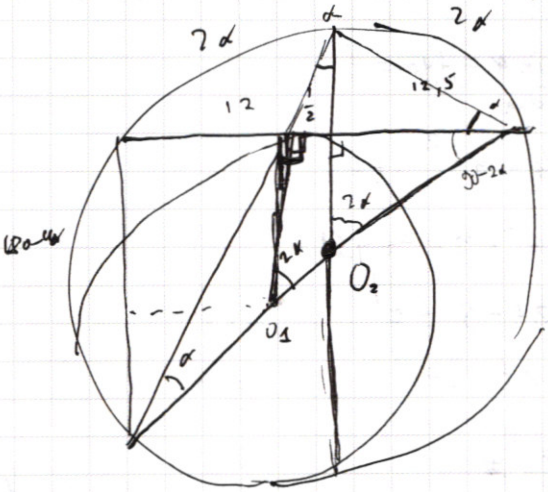
$\left(\frac{25}{2}\right)^2 = d(2R - d)$

$(d+R)(R-d)$

$R^2 - d^2 = \frac{625}{4}$



$90 - \alpha$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

N1

Пусть $2\alpha = x$; $2\beta = y$.

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+2y) + \sin x = \sin x\cos 2y + \cos x\sin 2y + \sin x = \sin x(1+\cos^2 y - \sin^2 y) +$

$+ 2\cos x \sin y\cos y = \sin x\cos^2 y + 2\cos x\sin y\cos y = 2\cos y(\sin x\cos y + \cos x\sin y) =$

$= 2\cos y\sin(x+y) = 2\cos y\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17}$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin^2 y = 1-\cos^2 y$

$\sin y = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+y) = \frac{\sin x}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\cos x}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = -(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \\ 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha = -(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \end{array}\right.$$

$/\cos^2\alpha$; $\cos\alpha \neq 0$, иначе $tg\,\alpha$ неопределён.

Пусть $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha = t$.

$$\left[\begin{array}{l} 2t + 4 - 4t^2 = -t-1 \\ 2t + 4t^2 - 4 = -t - 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3t^2 - 2t - 5 = 0 \qquad D = 64 \\ 5t^2 + 2t - 3 = 0 \qquad D = 64 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{2\pm 8}{6} \\ t = \frac{-2\pm 8}{10} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{5}{3} \\ t = \frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Других решений нет, и т.к. значений не менее 3х, все они верны.

$tg\,\alpha \in \{-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}\}$

Ответ: -1; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{3}$

N 5 (продолжение)

Оставшихся пар всего $625 - 163 = 462$, подходящих / 2 различные $- 231$.

Таким образом, существует 231 подходящая пара.

Ответ: 231

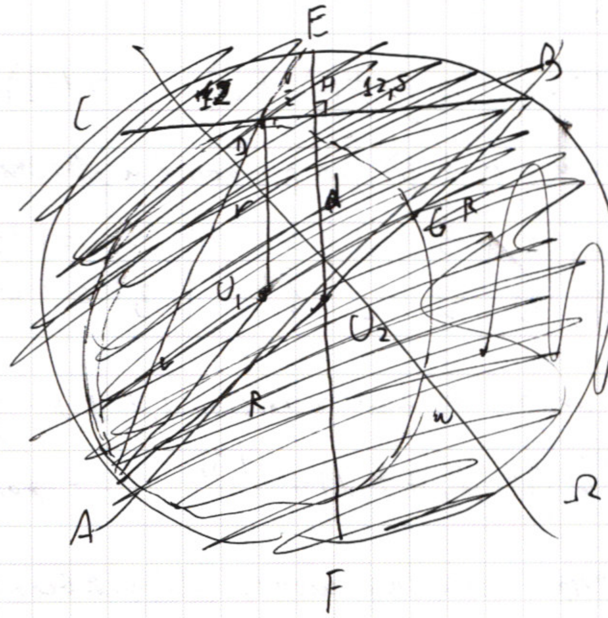
N 4

$CD = 12$; $BD = 13$

$r = ?$; $R = ?$

$\angle AFE = ?$

$S_{\triangle AFE} = ?$



Пусть O_1 – центр малой окр. радиусом r, (ω)

O_2 – большой окр. радиусом R. (Ω)

Пусть AB пересекает ω в т. G.

$\angle DAG$ в окр. ω опирается на ту же дугу, что и $\angle DO_1G$. Т.к. O_1 – центр, $\angle DO_1G =$ $= 2\angle DAG$. Пусть $\angle DAG = \alpha$, $\angle DO_1G = 2\alpha$. A так же лежит на Ω, поэтому

$\angle EO_2B = 2\alpha$ (аналогично). Т.к. $EF \perp BC$, $\angle O_2BC = 180^\circ - 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - 2\alpha$.

градусная мера $\cup BE = 2\alpha$, $\cup AC = 2 \cdot \angle O_2BC = 180^\circ - 4\alpha$, $\cup ACEB = 180^\circ$ (AB – диам.).

Отсюда $\cup CE = 2\alpha = \cup BE$. Отсюда следует, что EF – диаметр Ω (C и B равноудалены от EF, O_2 лежит на EF). Пусть пересечение CB и EF – H.

O_1 лежит на AB, т.к. AO_1 и AO_2 параллельны касательной к окружностям в т. A.

Пусть $HO_2 = d$. $CH = HB$ т.к. $\cup CE = \cup EB$.

$$\begin{cases} CH = HB \\ CH + HB = CD + DB = 25 \end{cases}$$

$CH = HB = 12{,}5 = \frac{25}{2}$

$DH = 0{,}5$

в $\triangle BHO_2$: $d^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 = R^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$f(1\cdot a)=f(a)=f(a)+f(1) \quad \Rightarrow f(1)=0$

Посчитаем $f(p)$ для p - простое и ~~...~~ $p\le 28$

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

Если x - составное число ($x=d_1d_2d_3d_4\ldots$), $f(x)=f(d_1d_2d_3d_4)=f(d_1)+f(d_2d_3d_4\ldots)=$
$=f(d_1)+f(d_2)+f(d_3)+f(d_4)+\ldots$; d - простые множители x.

Теперь можно посчитать $f(x)$ для всех $x\in[4;28]$:

x	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0	1

$f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=f(1)=0$

$f(a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$

$f(x)<f(y)$

Осталось найти кол-во пар x, y таких, что $f(x)<f(y)$

Для разных значений $f(x)$ при $x\in[4;28]$ посчитаем их кол-во:

$f(x)$	5	4	3	2	1	0
кол-во	1	2	2	3	8	9

Всего 25 чисел и 25^2 пар чисел $=625$

Всего есть $1^2+2^2+2^2+3^2+8^2+9^2=1+4+4+9+64+81=163$ пар x, y таких, что $f(x)=f(y)$.

Остальные пары можно разбить на группы вида $(x;y)$ и $(y;x)$ ($x\ne y$, иначе $f(x)=f(y)$). В одной группе $f(x)-f(y)$ принимает отрицательное значение 1 раз. ~~Таким~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)