МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$a+b\le 1$ $\qquad$ $a+b\ge 0$

$\frac{a}{4}+b\le 4$ $\qquad$ $\frac{a}{4}+b\ge 3$ $\qquad$ $\frac{a}{4}+b=4$

$a+b=1$

$\frac{3a}{4}=-3$

$y=-4x+5$ $\qquad$ $4+\frac{4}{4x-5}$ $\qquad$ $a=-4$

$b=5$

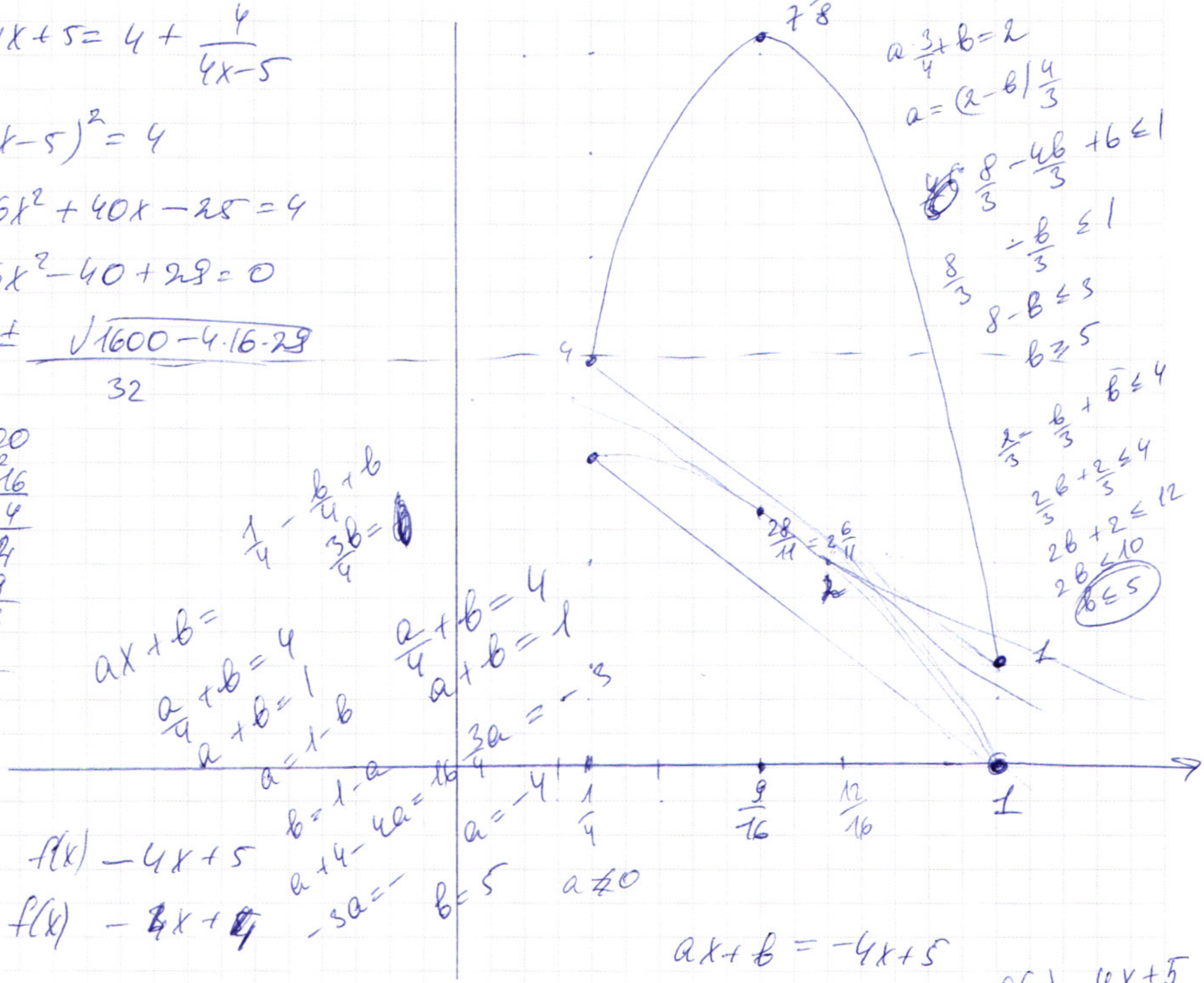
$-4x+5=4+\frac{4}{4x-5}$

$-(4x-5)^2=4$

$-16x^2+40x-25=4$

$16x^2-40+29=0$

$x=\pm\frac{\sqrt{1600-4\cdot16\cdot29}}{32}$



$a\frac{3}{4}+b=2$

$a=(2-b)\frac{4}{3}$

$\frac{8}{3}-\frac{4b}{3}+b\le 1$

$-\frac{b}{3}\le 1$

$8-b\le 3$

$b\ge 5$

$\frac{2}{3}-\frac{b}{3}+b\le 4$

$\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}\le 4$

$2b+2\le 12$

$2b\le 10$

$b\le 5$

1600, 16, 4, 64, 29, 576, 128, 1856

$\frac{1}{4}-\frac{b}{4}+b$ $\qquad$ $\frac{3b}{4}=$

$ax+b=$

$\frac{a}{4}+b=4$ $\qquad$ $\frac{a}{4}+b=4$

$a+b=1$ $\qquad$ $a+b=1$

$a=1-b$ $\qquad$ $\frac{3a}{4}=-3$

$b=1-a$ $\qquad$ $a=-4$

$a+4-4a=16$

$-3a=$ $\qquad$ $b=5$ $\qquad$ $a\ne 0$

1856

$f(x)\ -4x+5$

$f(x)\ -4x+4$

$ax+b=-4x+5$

$f(x)=-4x+5$

$ax+b$ $\qquad$ $\cancel{ax+b}$

$tg\,\alpha=-4$

$-4=-4(4x-5)^{-2}\cdot 4$

$-4=\frac{-16}{(4x-5)^2}$

$(4x-5)^2=4$

$4x=7$ $\qquad$ $x=\frac{7}{4}$

$4x=3$ $\qquad$ $x_0=\frac{3}{4}$

$4x-5=2$

$4x-5=-2$

$2=-4\cdot\frac{3}{4}+b$

$2=-3+b$

$b=5$

$4+\frac{4}{\frac{4\cdot9}{16}-5}$

$\frac{9}{4}-5$

$\frac{16}{9-20}$ $\qquad$ $(4x-5)^{-1}$

$4-\frac{16}{11}$ $\qquad$ $44-16$ $\qquad$ $\frac{28}{11}$ $\qquad$ $4-2=2$

$4+\frac{4}{4\cdot\frac{3}{4}-5}$

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [\frac{p}{4}]$ $\quad p \in P$

$(x;y)$ $\quad 2 \le x \le 25$ $\quad 2 \le y \le 25$ $\quad f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(x \cdot y^{-1}) =$ $\quad x = k \cdot m$

$k \cdot n =$

$= f(x) + f(y^{-1})$ $\quad n \in$ 3

$f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$y \neq 2$ $\quad \frac{x}{y}$ $\quad \frac{3}{4}$

2,	0
3,	0
5,	1
7,	1
11,	2
13,	3
17,	4
19,	4
23	5

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$x \in [\frac{1}{4};1]$ $\quad 4(4x-5) + \frac{4}{4x-5}$

$4 + \frac{4}{4x-5}$ $\quad f(x) = 4 + \frac{4}{4x-5}$

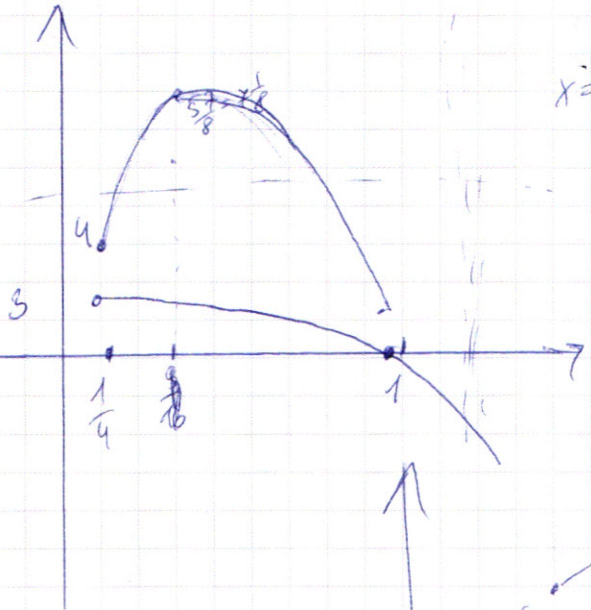
$ax+b \le -32x^2+36x-3$

$-32x^2+36x-3$ $\quad -1$

$x_B = \frac{\cancel{36}^{18}}{\cancel{2} \cdot 32} = \frac{9}{16}$ $\quad x = \frac{5}{4}$

$-\frac{32 \cdot 81}{16 \cdot 16} + \frac{36 \cdot 9}{16} - 3$ $\quad ax+b$

$-2 \cdot 81$



$-\frac{81}{8} + \frac{18 \cdot 9}{8} - 3$

$\frac{81 \cdot 2 - 81}{8}$

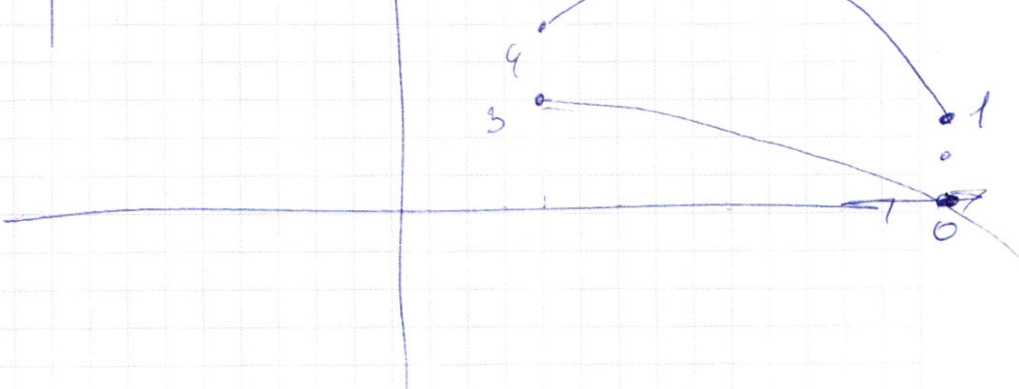
$\frac{81}{8} - 3$ $\quad -2 + 9 - 3$

$-5 + 9$

$\frac{81-24}{8}$

$\frac{57}{8}$ $\quad 1$ $\quad -32 + 36 - 3$

$4 - 3$



☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$x-12y=\sqrt{12xy-12y-x+6}$ $\quad x-12y \quad -2x+2xy+6 \quad 2y(x-6)+(x-6)$

$\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$ $\quad (x-6)^2-36+(6y-3)^2-9=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$ $\quad x-6=a$ $\quad 12y-6$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$ $\quad (x-6)^2+9(2y-1)^2=90$ $\quad 2y-1=b$ $\quad a-6b$

$x-12y$

$\sqrt{90-b^2}-6b=\sqrt{90-b^2 b}$

$a^2=90-b^2$

$a=\sqrt{90-b^2}$

$a^2-12ab+36b^2=ab$ $\quad \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

$a^2+9b^2=90$

$90b^2=90$ $\quad a=\dfrac{13b\pm\sqrt{169b^2-4\cdot 36b^2}}{2}=\dfrac{13b\pm 5b}{2}$

$81b^2+9b^2=90$ $\quad a=9b$ $\quad b^2=1$ $\quad b=\pm 1$

$16b^2+9b^2=90$ $\quad a=4b$ $\quad b^2=\dfrac{90}{25}$ $\quad b=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

$25b^2=90$ $\quad b=1 \quad a=9$ $\quad x-6=9$ $\quad 2y-1=1$ $\quad \begin{pmatrix} x=15 \\ y=1 \end{pmatrix}$

$\times \; b=-1 \quad a=-9$ $\quad x-6=-9$

$-\dfrac{12\sqrt{10}}{5}+\dfrac{18\sqrt{10}}{5}$ $\quad \times \; b=\dfrac{3\sqrt{10}}{5} \quad a=\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$

$\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$

$b=-\dfrac{3\sqrt{10}}{5} \quad a=-\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$ $\quad -\dfrac{3\sqrt{10}}{5}=2y-1$

$\begin{pmatrix} y=\dfrac{5-3\sqrt{10}}{10} \\ x=\dfrac{30-12\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x=15 \\ y=1 \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{1-\frac{3\sqrt{10}}{5}}{2}=y$ $\quad -\dfrac{12\sqrt{10}}{5}=x-6$

$x=6-\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2-10x+5^{-\log_3(x^2-10x)}$

$|t|^{\log_3 4}\geq t+5^{\log_3 -t}$ $\quad t<0$

$|t|^{\log_3 4}\geq t+(-t)^{\log_3 5}$ $\quad t^{2\log_3 2}+t-t^{\log_3 5}\geq 0$

$t+|t|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$

$t+t^{2\log_3 2}\geq 5^{\log_3 t}$ $\quad 10x-x^2>0$ $\quad 10x>0$ $\quad (x^2-10x)^{\log_3 4}>0$

$t-t^{\log_3 5}$ $\quad x(10-x)>0$

$x\in(0;10)$

$t\left(1-t^{\log_3 5-1}\right)+t^{2\log_3 2}\geq 0$ $\quad \cos(\alpha+\beta)$

$t-t^{\log_3 5}+t^{2\log_3 2}\geq 0$

$3^{\log_3 t}-3^{\log_3 t^{\log_3 5}}+3^{\log_3 t^{2\log_3 2}}=0$

$3^{\log_3 t}-3^{\log_3 5\cdot\log_3 t}+3^{\log_3 2\log_3 t^2}\geq 0$

$y-y^{\log_3 5}+y^{2\log_3 4}$

$2\log_3 4-1$ $\quad \log_3 4-\log_3 3$ $\quad \log_3\frac{4}{3}$

$\dfrac{2\sqrt{17}}{\sqrt{221}}$ $\quad 2=\dfrac{2}{x}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad x=\sqrt{13}$

$\dfrac{\sqrt{221}}{17}$ $\quad \dfrac{60}{34\sqrt{17}}+\dfrac{8}{34\sqrt{17}}=\dfrac{68}{34\sqrt{17}}=\dfrac{2}{\sqrt{17}}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$

$\dfrac{30}{34}\cdot\dfrac{30}{15\sqrt{17}}$ $\quad \dfrac{2\sqrt{17}}{17}=\dfrac{AE}{34}$ $\quad \boxed{4\sqrt{17}=AE}$

$4\sqrt{17}$ $\quad 2$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2a+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt5}$ $\quad$ $\sin(2a+4\beta)+\sin 2\alpha = \frac{-2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\alpha$ $\quad$ $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt5}$

$2\alpha+2\beta = \arcsin\frac{-1}{\sqrt5} + 2\pi k$

$2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin\frac{-1}{\sqrt5} + 2\pi k$

$\sin(2\alpha + 2(-2\alpha + \arcsin\frac{-1}{\sqrt5} + 2\pi k)) + \sin 2\alpha = \frac{-2}{5}$

$\sin(-2\alpha + 2\arcsin\frac{-1}{\sqrt5}) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\sin 2\alpha\cdot\cos 2\arcsin\frac{-1}{\sqrt5} + \sin 2\arcsin\frac{-1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{-2}{5}$

$-\sin 2\alpha(1 - 2\sin^2\frac{-1}{\sqrt5}$

$-\sin 2\alpha(1 - 2\cdot\frac{1}{5}) + 2\cdot\frac{-1}{\sqrt5}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{5}}\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{-2}{5}$

$-\sin 2\alpha\frac{3}{5} - \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}\sin 2\alpha - \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -2$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2(1-2\sin^2\alpha) = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad$ $/ :\sin^2\alpha$

~~$\sin\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha$~~

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ $\quad$ $/ :\cos^2\alpha$

$2tg\alpha + 4tg^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$tg\alpha = -1$

$tg\alpha = \frac{1}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t+|t|^{2\log_3 4}-t^{\log_3 5}\geq 0 \quad t\left(1+|t|^{2\log_3\frac{4}{3}}-t^{\log_3\frac{5}{3}}\right)\geq 0$

$1+|t|^{2\log_3\frac{4}{3}}-t^{\log_3\frac{5}{3}}\geq 0$

$1+t^{\log_3\frac{4}{3}}-t^{\log_3\frac{5}{3}}$

$\log_3\frac{4}{3}\cdot t^{\log_3\frac{4}{9}}-\log_3\frac{5}{3}\, t^{\log_3\frac{5}{9}}\geq 0$

$\log_3\frac{4}{3}\, t^{\log_3\frac{4}{9}}=\log_3\frac{5}{3}\cdot t^{\log_3\frac{5}{9}}$

$\frac{30}{34}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{16}{34}\cdot\frac{1}{2\sqrt{17}}$

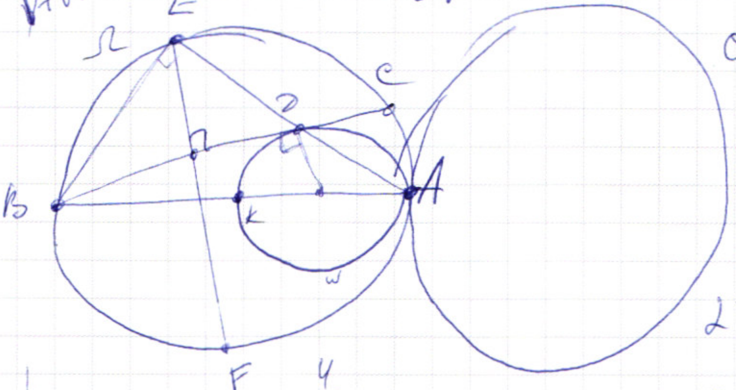
$\frac{15\cdot 4}{17\sqrt{17}}+\frac{8}{17\sqrt{17}}$

$\frac{68}{17\sqrt{17}}$

$R-?\ r-?$

$\angle AFE \quad S\triangle AEF$

$CD=\frac{15}{2} \quad BD=\frac{17}{2}$



$CO \quad \frac{15+17}{2}=16$

$BC=16 \quad \frac{DO}{CA}=\frac{17}{32}$

$DO=\frac{15\cdot 17}{16}$

$CA=\frac{15\cdot 17\cdot 32}{16\cdot 17}$

$R=16x$

$\alpha+\alpha+\beta+90-\alpha-\beta+x=180$

$\alpha+x=90$

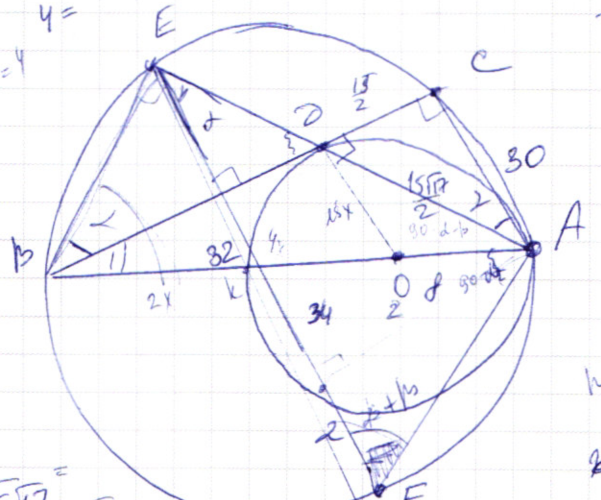
$\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{17}}$

$\operatorname{tg}\angle AFE=\frac{4}{1} \quad \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{ED}{CD}=\frac{BD}{DA}$

$BC=16$

$\frac{BO}{BA}=\frac{17}{2\cdot 16}=\frac{17}{32}$



$h=2 \quad \frac{x}{2\sqrt{17}} \quad x=4$

$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{17}}$

$BA=32x$

$BO=17x \Rightarrow r=15x$

$\frac{15x}{CA}=\frac{17}{32}$

$CA=\frac{15\cdot 32x}{17}$

$\sin\beta=\frac{30}{34}$

$BD^2=BK\cdot BA$

$\frac{289}{4}=2x\cdot 32x$

$\frac{289}{4}=64x^2$

$\frac{17}{2\cdot 8}=x$

$x=\frac{17}{16}$

$\sin\alpha=\frac{15}{2\cdot 15\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{34}$

$\sin(\beta+\alpha)=$

$\angle AFE=\angle ABE$

$\frac{225}{4}+900$

$AB=32\cdot\frac{17}{16}=34$

$\frac{15\cdot 17}{16}$

$\sin\alpha=\frac{\frac{15}{2}}{30}=\frac{1}{4}$

$3600+225$

$\frac{15\sqrt{17}}{2}$

$R=17,$

$r=\frac{255}{16}$

$\frac{15\cdot R}{2\cdot 15\sqrt{17}}$

$\frac{225}{4}+900=$

$225+3600$

$\sqrt{3825}$

$5\sqrt{153}$

$5\sqrt{3\cdot 51}$

$15\sqrt{17}$

$6 \quad \frac{12\sqrt{10}}{5}$

$BC=16$

$\frac{17}{32}=\frac{BO}{BA}$

$BO=17x \Rightarrow OA=15x$

$BA=32x$

$\frac{30\cdot 2}{18\sqrt{17}}$

$\sqrt{17}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\beta = -2\alpha + \pi - \arcsin\frac{-1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + 2(-2\alpha+\pi-\arcsin\frac{-1}{\sqrt5})) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha - 4\alpha + 2\pi - 2\arcsin\frac{-1}{\sqrt5}) + \sin 2\alpha = \frac{-2}{5}$

$-\sin(+2\alpha + 2\arcsin\frac{-1}{\sqrt5}) + \sin 2\alpha = \frac{-2}{5}$

$-\sin 2\alpha \cdot \cos 2\arcsin\frac{-1}{\sqrt5} - \sin 2\arcsin\frac{-1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\sin 2\alpha\cdot(1 - \frac{2}{5}) - \cos 2\alpha \cdot 2\cdot\frac{-1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-3\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -2$

$-2\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -2$

$-\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha = \cancel{-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - 3\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha / \cos^2\alpha$

$-2tg\alpha - 4tg^2\alpha = -3 - 3tg^2\alpha$

$tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$tg\alpha = 1, \; tg\alpha = -3$

$2\log_3 4\,(10x-x^2)^{2\log_3 4 - 1}\cdot(10-2x)$

$(10x-x^2)^{2\log_3 4}$

$2\log_3 4 - \log_3 3$

$\log_3\frac{16}{3}$

$(\sin 2\alpha + 2\arcsin(\frac{1}{\sqrt5}))$

$\sin 2\alpha\cdot(1-\frac{2}{5}) -$

$-\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha + \frac{3}{5}\sin 2\alpha$

$f(x) = 10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} - (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$f'(x) = 10 - 2x + 4(\log_3 4)(10x-x^2)^{2\log_3 4 - 1}(5-x) - \log_3 5(10-2x)\cdot(10x-x^2)^{\log_3 5 - 1}$

$10 - 2x + 8\log_3 2\,(10x-x^2)^{\log_3\frac{16}{3}}(5-x) - \log_3 5\cdot 2(5-x)(10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{3}}$

$(5-x)(2 + 8\log_3 2(10x-x^2)^{\log_3\frac{16}{3}} - \log_3 5(10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{3}}$

$f(t) = t + t^{2\log_3 2} - t^{\log_3 5}$

$1 + 2\log_3 2\cdot t^{\log_3\frac{16}{3}} - \log_3 5\cdot t^{\log_3\frac{5}{3}} = 0$

$-2\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -2$

$4\cos 2\alpha = 4(\cancel{2\cos^2}1 - 2\sin^2\alpha) =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

1) $BC = BD + DC = 16$. Пусть O - центр меньшей окр. ω
Т.к. BD - касательная (по усл.) $\Rightarrow OD \perp BD$
$\angle BCA = 90$ т.к опирается на диаметр AB

$\triangle BCA \sim \triangle BDO$ ($\angle CBA$ - общ., $\angle BDO = \angle BCA = 90$)

$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BA} = \frac{17}{32}$. Пусть $BA = 32x$, тогда $BO = 17x$,

$OA = 15x$ - радиус меньшей окр-ти.

Пусть $BO \cap \omega = k$ (k лежит на отрезке BA),

тогда $Bk = AB - 2 \cdot OA = 2x$

По св-ву кас-ой:
$BD^2 = Bk \cdot BA \Rightarrow \frac{17^2}{4} = 64x^2$, $\Rightarrow x = \frac{17}{16}$

$\Rightarrow OA = 15 \cdot \frac{17}{16} = \frac{255}{16}$

$\frac{AB}{2} = 16 \cdot \frac{17}{16} = 17$ - радиус Ω

2) $\angle AFE = \angle ABE$ (вписанные, опир-ся на одну дугу)

$\angle ABE = \angle CBA + \angle CBE$

$\angle CBE = \angle CAE$ (впис, опир-ся на одну дугу)

~~из~~ Т.к $\triangle ABC \sim \triangle OBD$ (из п. 1) $\Rightarrow \frac{OD}{AC} = \frac{17}{32}$

$AC = \frac{32}{17} OD = \frac{32}{17} \cdot \frac{255}{16} = 30$

из прямоуг. $\triangle DCA$: по т. Пифагора:

$AD = \sqrt{DC^2 + CA^2} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$\sin\angle CAD = \frac{DC}{AD} = \frac{1}{2\sqrt{17}}$; $\cos\angle CAD = \frac{AC}{AD} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

из прямоуг $\triangle BCA$: $\sin\angle CBA = \frac{30}{34} = \frac{AC}{AB}$; $\cos\angle CBA = \frac{CB}{AB} = \frac{16}{34}$

$\sin\angle ABE = \sin(\angle ABC + \angle CBE) = \sin(\angle ABC + \angle CAD) =$
$= \sin\angle ABC \cdot \cos\angle CAD + \sin\angle CAD \cdot \cos\angle ABC = \frac{30}{34}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{16}{34}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}$
$= \frac{68\cdot 2}{34\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{4\sqrt{17}}{17}$

3) т.к. $EF \perp BC$ и $AC \perp BC$, $\Rightarrow EF \parallel AC$, $\Rightarrow \angle CAD = \angle AEF$ как накрест лежащие

из $\triangle BEA$ ($\angle BEA = 90^\circ$ т.к. опир-ся на диаметр)

$\sin\angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\Rightarrow AE = AB\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17} = 8\sqrt{17}$

В $\triangle AFE$ проведем высоту AH

$\sin\angle AEF = \frac{AH}{AE} = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\Rightarrow AH = \frac{AE}{\sqrt{17}} = 8$

$\cos\angle AEF = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{EH}{AE}$, $\Rightarrow EH = AE\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = 32$

$\sin\angle AFE = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\Rightarrow \cos\angle AFE = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$
$= tg\angle AFE = 4 = \frac{AH}{HF}$, $\Rightarrow HF = \frac{AH}{4} = 2$
$\Rightarrow EF = EH + HF = 2 + 32 = 34$

$= S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot AH\cdot FE = \frac{1}{2}\cdot 34\cdot 8 = 136$

Ответ: $\frac{225}{16}$; 17; $\arcsin\frac{4\sqrt{17}}{17}$; 136

Задача 6

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$f(x) = ax+b$ задаёт прямую на плоскости.
Обозначим эту прямую за l.
~~Заметим, что если l пересекает~~

$g(x) = -32x^2+36x-3$ – кв. функ. график парабола,
Назовем часть этой параболы, находящуюся между прямыми $x=\frac{1}{4}$ и $x=1$ ω

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Аналогично, графиком $t(x)=\frac{16x-16}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$ явл-ся гипербола. А ~~фигуру~~ часть гиперболы, ограниченную $x=1$ и $x=\frac{1}{4}$ назовем Ω.

Заметим, что если ℓ пересекает ω в точке x_0, $x_0\neq\frac{1}{4}$, $x_0\neq 1$, то

~~или $g(\frac{1}{4})>f(\frac{1}{4})$ или $g(1)>$~~

или $g(\frac{1}{4})<f(\frac{1}{4})$ или $g(1)<f(1)$ – не подходит

Прямая k, проходящая через концы ω (в т. $x=\frac{1}{4}$ и $x=1$) задается

$g(x)=-4x+5$ Док-во: $g(x)=Ax+B$

т.к. $\begin{cases}\frac{A}{4}+B=4\\ A+B=1\end{cases}\Rightarrow A=-4,\ B=5$

Заметим, что k касается Ω в т. $x_0=\frac{3}{4}$

$t(\frac{3}{4})=g(\frac{3}{4})=2$

Тогда если $f(\frac{3}{4})>2$, то ℓ пересечет ω, а если $f(\frac{3}{4})<2$, то ℓ пересечет Ω, т.е. $f(\frac{3}{4})<t(\frac{3}{4})$ – не подходит.

Значит $f(\frac{3}{4})=2$

Если $f(\frac{1}{4})>g(\frac{1}{4})$ – не подх.

если $f(\frac{1}{4})<g(\frac{1}{4})$, то $f(1)>g(1)$ – не подходит

(т.к. $f(\frac{3}{4})=2$, то ℓ пересечет k, $\Rightarrow f(1)>g(1)$)

$\Rightarrow f(\frac{1}{4})=g(\frac{1}{4})=4$, $\Rightarrow$ ~~подходит только~~

ℓ – искомая прямая, совпадает с k

$\Rightarrow a = -4, \quad b = 5$

Ответ: $(-4;5)$

Задача 1

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2\beta = -2\alpha + \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi k \\ 2\beta = -2\alpha + \pi - \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi n \end{array}\right.$

Подставим во II ур-е:

~~$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -$~~

$\left[\begin{array}{l} \sin(2\alpha + 2\cdot 2\beta) = \sin(-2\alpha + 2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 4\pi k) = \\ \quad = \sin(-2\alpha + 2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})) \\ \sin(2\alpha + 2\cdot 2\beta) = \sin(-2\alpha + 2\pi - 2\arcsin -\frac{1}{\sqrt5} + 4\pi n) = \\ \quad = \sin(-2\alpha - 2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})) \end{array}\right.$

1) $\sin(-2\alpha + 2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})) = \sin(-2\alpha)\cdot\cos(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})) + \sin(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}))\cdot\cos(-2\alpha) = -\sin 2\alpha(1 - 2\sin^2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})) + 2\sin(\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}))\cdot\cos(\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}))\cdot\cos 2\alpha =$
$= -\sin 2\alpha\,(1 - \frac{2}{5}) + \cancel{2\sin}\, 2(-\frac{1}{\sqrt5})\sqrt{1 - \sin^2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})}\cdot\cos 2\alpha =$
$= -\sin 2\alpha\cdot\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\cos 2\alpha$

2) $\sin(-2\alpha - 2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})) = -\sin 2\alpha(\cos(-2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}))) + (-\cos(-2\alpha)\cdot\sin 2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})) = -\sin 2\alpha(1 - \frac{2}{5}) - \cos 2\alpha\cdot\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}))}\cdot\sin\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})\, 2 =$
$= -\sin 2\alpha\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cos 2\alpha$

$\left[\begin{array}{l} \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{3}{5}\sin 2\alpha - \frac{4}{5}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{3}{5}\sin 2\alpha + \frac{4}{5}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\frac{2}{5}\sin2\alpha-\frac{4}{5}\cos2\alpha=-\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}\sin2\alpha+\frac{4}{5}\cos2\alpha=-\frac{2}{5}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin2\alpha-4\cos2\alpha=-2\\ 2\sin2\alpha+4\cos2\alpha=-2\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-4+8\sin^2\alpha=-2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha\\ 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+4-8\sin^2\alpha=-2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+6\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha=0 \quad |:\cos^2\alpha\\ 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha=0 \quad |:\cos^2\alpha\end{array}\right.$$

Т.к. $tg\alpha$ определен, $\cos\alpha\neq0$

$$\left[\begin{array}{l}4tg\alpha+6tg^2\alpha-2=0\\ 4tg\alpha-2tg^2\alpha+6=0\end{array}\right.$$ Решаем кв. ур-я относительно $tg\alpha$:

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}tg\alpha=1\\ tg\alpha=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}tg\alpha=-1\\ tg\alpha=\frac{1}{3}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

* $\cos\arcsin x=\sqrt{1-\sin^2\arcsin x}$

Т.к. $-\frac{\pi}{2}\leq\arcsin x\leq\frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow \cos\arcsin x\geq0$

Задача 2

$$\begin{cases}x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}\\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases}$$

Сделаем замену: $x-6=a$ и $2y-1=b$ тогда:

$$\begin{cases}a-6b=\sqrt{ab} \quad (1)\\ a^2+9b^2=90\end{cases}$$

Возведем первое ур-е в квадрат (Так мы не потеряем корни, но можем получить новые, поэтому потом проверим)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

Решим первое ур-е как квадратное относительно a:

$$\left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$$

Подставим во второе:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9b \\ 90b^2=90 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ 25b^2=90 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=1 \\ a=9 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-9 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ a=+\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} b=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ a=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Подставляя в ур-е (1) получаем, что $\begin{cases} a=-9 \\ b=-1 \end{cases}$ и $\begin{cases} a=\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ b=\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ — не подходят,

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=+9 \\ 2y-1=+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ 2y-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{30-12\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(15;1)$, $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$

Задача 3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

О.Д.З.: $10x-x^2>0$

$x\in(0;10)$

Пусть $x^2-10x=t$

$$t+|t|^{2\log_3 2} \geq t^{\log_3 5}$$

$$t+|t|^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$$

На О.Д.З.: $t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

Функция слева возрастает быстрее чем функция справа. Ответ:

при $t=0$ выполняется равенство, т.е. $x\in(0;10)$

но $t>0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №6

(Нумеровать только чистовики)