МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

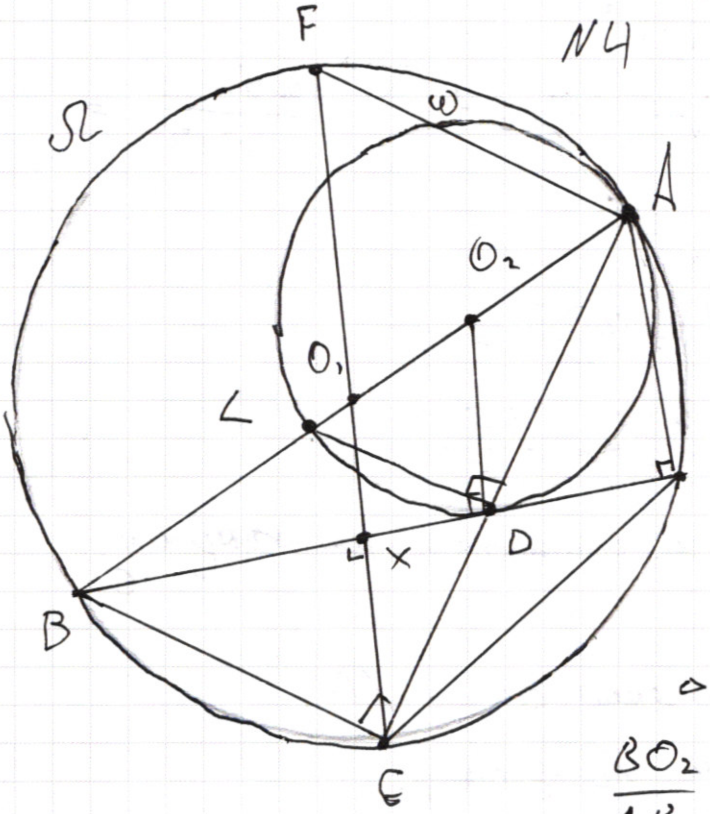
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4



Пусть O_1 - центр Ω

O_2 - центр ω.

X - пересечение FE и BC

Заметим, что $O_2D \perp BC$, т.к. BC - касательная

тогда, $O_2D \parallel AC$ =>

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BAC$

$$\frac{BO_2}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{O_2D}{AC}.$$

Пусть r - радиус ω, R - радиус Ω.

Заметим, что центры и точка касания лежат на одной ~~окружности~~ прямой. Так как AB - диаметр и содержит O_1, то также содержит O_2.

$AB = 2R$, $BO_2 = 2R - r$, $O_2D = r$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{17+8} = \frac{r}{AC}$$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25} \qquad \frac{r}{AC} = \frac{17}{25}$$

$$34R = 50R - 25r \qquad AC = \frac{25}{17} r$$

$$R = \frac{25}{16} r$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Так как AB - диаметр, то $\triangle ABC$ - прямоуг.

Тогда, $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 4R^2 - \cancel{\frac{16^2}{25^2}r^2} = \frac{25^2}{17^2}r^2$

$= 4\cdot\frac{25^2}{16^2}r^2 - \frac{25^2}{17^2}r^2$

$BC = 25$

$25^2 = \frac{4}{16^2}r^2\cdot 25^2 - \frac{25^2}{17^2}\cdot r^2$

$1 = \frac{4}{16^2}r^2 - \frac{r^2}{17^2} = r^2\left(\frac{4}{16^2} - \frac{1}{17^2}\right) = \frac{4\cdot 17^2 - 16^2}{16^2 17^2} =$

$= \frac{1156 - 256}{16^2 17^2} = \frac{900}{16^2 17^2}\cdot r^2$

$r = \frac{16\cdot 17}{\sqrt{900}} = \frac{16\cdot 17}{30} = \frac{272}{30} = \frac{136}{15}$

$R = \frac{25}{16}\cdot r = \frac{25\cdot 17}{30} = \frac{425}{30} = \frac{85}{6}$

$\angle AFE = \angle ABE$, т.к. опираются на одну и ту же дугу.

Пусть L - точка пересечения ω с AB.

тогда, $LD \perp AD$, т.к. AL - диаметр.

Тогда, $LD \parallel BE$, ~~то~~ $\triangle ABE \sim \triangle ALD$.

$AL = 2r$

$\frac{AL}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} = \frac{16}{25}$

$AD = \frac{16}{25}AE \Rightarrow DE = \frac{9}{25}AE$

$DE = \frac{9}{16}AD$

~~Запишем степень точки для т. D отн.~~ Ω.

~~$BD\cdot DC = AD\cdot DE$~~

$\triangle DXE \sim \triangle DCA$.

$\frac{XE}{AC} = \frac{DX}{DC} = \cancel{\frac{AD}{XE}} = \frac{DE}{AD} = \frac{9}{16}$

$DX = DC\,\frac{9}{16} = \frac{9}{2} = 4{,}5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CX = DX + DC = 8 + 4,5 = 12,5 = \frac{BC}{2}$.

~~Так как~~ Тогда, X – середина BC.

Тогда, FE – сер. пер. к BC, а значит, FE – диаметр Ω и $\triangle AFE$ – прямоуг.

Заметим, что $AC \parallel FE$, т.к. $AC \perp BC$, $FE \perp BC$.

тогда, $FACE$ – вписанная трапеция $\Rightarrow$ равнобокая.

$AF = CE$.

$CE = \sqrt{XE^2 + XC^2}$.

$XE = AC \cdot \frac{9}{16}$ из подобия $\triangle DXE$ и $\triangle DCA$

$XE = \cancel{\frac{25 \cdot 16}{30}} \frac{25 \cdot 16}{30} \cdot \frac{9}{16} = \frac{25 \cdot 9}{30}$

$CE = \sqrt{\frac{25^2 \cdot 9^2}{900} + \frac{25^2}{4}} = \sqrt{\frac{25^2 \cdot 9^2 + 15^2 \cdot 25^2}{900}} = \frac{25}{30} \cdot \sqrt{306} =$

$= \frac{5}{2} \cdot \sqrt{34}$

Из степени точки D отн Ω.

$BD \cdot DC = AD \cdot DE = AE \cdot \frac{16}{25} \cdot AE \cdot \frac{9}{25}$

$AE = \frac{25}{12} \sqrt{BD \cdot DC} = \frac{25}{12} \cdot 2\sqrt{34} = \frac{25}{6} \sqrt{34}$

$S_{AFE} = AE \cdot CE = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{25}{6} \sqrt{34} = \frac{125 \cdot 17}{6}$

~~Ответ~~ $\angle AFE = \cancel{\text{arctg}}\ \text{arctg}\left(\frac{AE}{CE}\right) = \text{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$.

Ответ: $S_{AFE} = \frac{125 \cdot 17}{6}$, $\angle AFE = \text{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$,

$r = \frac{136}{15}$, $R = \frac{85}{6}$

N 5

Найдем f от всех простых от 1 до 24

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=5$

Теперь, мы можем выразить f от всех натуральных чисел до 24 через $f(p)$, где p – простое.

$f(1)=f(1)+f(1)$

$2f(1)=f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$;

$f(4)=f(2)+f(2)=0$; $f(5)=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$; $f(7)=1$; $f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$; $f(10)=f(2)+f(5)=1$; $f(11)=2$;

$f(12)=f(4)+f(3)=0$; $f(13)=3$; $f(14)=f(2)+f(7)=1$;

$f(15)=f(3)+f(5)=1$; $f(16)=f(4)+f(4)=0$;

$f(17)=4$ $f(18)=f(3)+f(6)=0$; $f(19)=4$;

$f(20)=f(4)+f(5)=1$; $f(21)=f(3)+f(7)=1$;

$f(22)=f(2)+f(11)=2$; $f(23)=5$;

$f(24)=f(6)+f(4)=0$.

$f(x)=f(y)+f(x/y)$

$f(x)-f(y)=f(x/y)$

Мы хотим, чтобы $f(x/y)<0$.

Тогда, $f(x)<f(y)$.

f принимает значения от 0 до 5 на отрезке $[1;24]$ для нат. чисел.)

№5 продолжение

Пусть $f(x)=0$.

~~Точек~~ X при которых $f(x)=0$ всего 13.

Тогда, $f(y) \geq 1$. точек y 11.

$13 \cdot 11$ пар, если $f(x)=0$.

$f(x)=1$.

точек x: 7

$f(y) \geq 2$. точек y: 6, пар $7 \cdot 6$

$f(x)=2$

точек x: 2

$f(y) \geq 3$, точек y: 4 пар $2 \cdot 4$

$f(x)=3$

точек x: ~~2~~ 1

$f(y) \geq 4$, точек y: 3, пар $1 \cdot 3$

$f(x)=4$ ~~8~~

точек x: 2

$f(y) \geq 5$, точек y: ~~2~~ 1, пар $2 \cdot 1$

Больше пар не будет, т.к. значений больше 5 f не принимает на $[1;24]$.

~~Отсюда~~ Полученные пары непересекающиеся, т.к. подмножества x не пересекаются.

Всего $13 \cdot 11 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 =$

$= 143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 198$

Ответ: 198 пар.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(4\alpha+4\beta) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5} = \pm 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)$.

Пусть будет знак „+"

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)$

~~Пусть $2\alpha+2\beta \neq 2\pi$, тогда~~ $\sin(2\alpha+2\beta) \neq 0$

$\cos 2\beta = \cos(2\alpha+2\beta)$

$\Downarrow$

$2\alpha = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \pi k \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\pi k = 0$

Если знак „-".

$\cos 2\beta = -\cos(2\alpha+2\beta)$

$2\alpha = \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$

~~$\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$~~ $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$.

$\operatorname{tg}\alpha$ не определен

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

$t=x^2+18x$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

чтобы неравенство существовало, t должен быть >0, т.к. $\log_{12}t$.

Тогда, $|t|=t$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t} = 5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}} = t^{\frac{1}{\log_5 12}} = t^{\log_{12}5}$$

$$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$t\left(t^{(\log_{12}5)-1}+1-t^{(\log_{12}13)-1}\right) \geq 0$$

т.к. $t>0$, то

$$t^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1-t^{\log_{12}\frac{13}{12}} \geq 0$$

При $t \leq 1$ это будет всегда верно, т.к.

$$\log_{12}\frac{5}{12} < \log_{12}\frac{13}{12} \Rightarrow t^{\log_{12}\frac{5}{12}} \geq t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$$

~~t~~ $t>1$

$$t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}} \geq -1$$

$-\cancel{t^{\log_{12}\frac{5}{12}}}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

~~сделаем~~ сделаем замену $t=x^2+18x$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

так как $\log_{12}t$, t в выражение, то чтобы $\log_{12}t$ существовало нужно, чтобы $t>0$.

Тогда, $|t|=t$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2-2x\,2\alpha+4\beta y^2=xy-x-2y+2$

$\sin\alpha\,\cos^2$

$x(x-1)\;(\sin 3\alpha+4\beta)(2y-1)-2=0$ $\qquad\frac{2}{\sqrt5}$

$\cos\alpha$ $\quad \sin\alpha+\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(\alpha+2\beta)+\cos 2\beta+\sin 2\beta(\cos(2\alpha+2\beta))+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

⑥

$x(x-2y)-y(x-2y)+2y^2$ $\quad \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$(x-y)(x-2y)$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+$ $\quad \sin\alpha\cos$

$\sin 2\alpha=\sin(4\alpha+4\beta)$

$x-2y=6\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$\sin^2\alpha$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$\sin$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

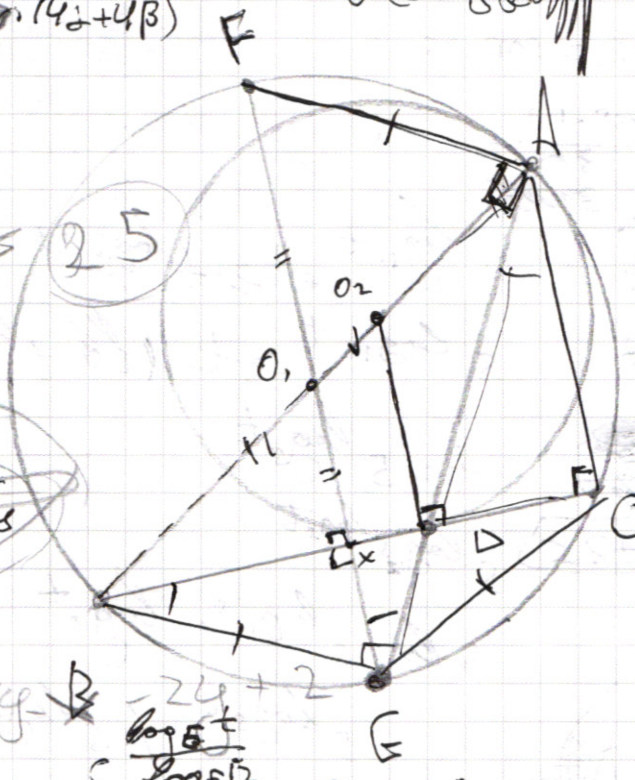
$\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)$

$x\geq 2 \quad y\geq 1$

$AD=\frac{18}{9}DE$ $\quad x\geq 2y$ $\quad x\leq 2$

$9AD=18DE$ $\quad y\leq 1$



$\frac{AD}{DE}=\frac{CD}{DK}$

$\frac{18}{9}=\frac{8}{\delta}$ $\quad 4{,}5$

$8+4{,}5=18{,}5$

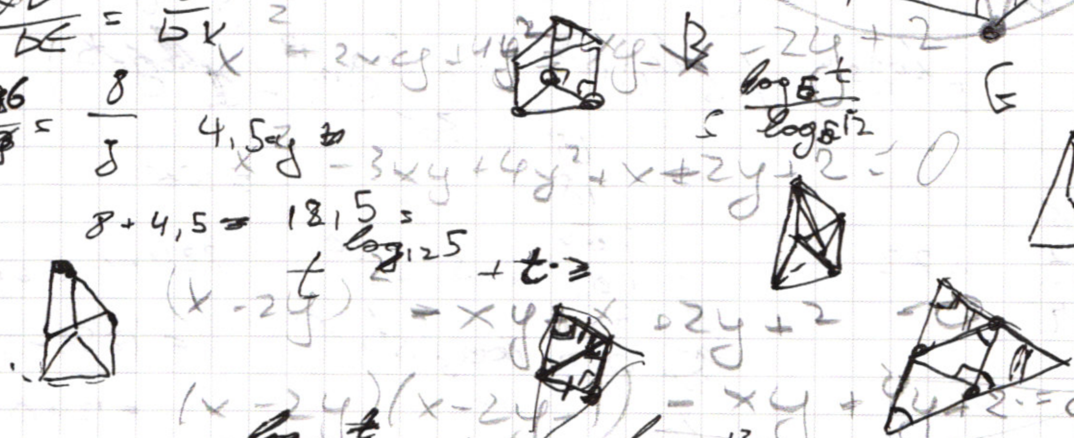
$x^2+2xy-4y^2+xy-x-2y+2$

$5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}}$

$x^2-3xy+4y^2+x+2y+2=0$

$t^{\log_{12}5}+t\geq$

$(x-2y)^2-xy+x+2y+2$

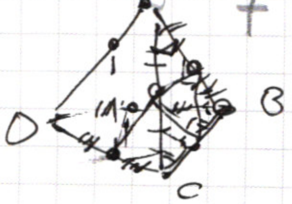


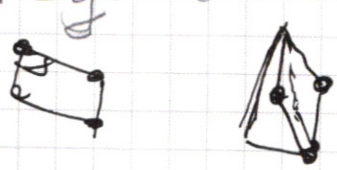
$(x-2y)(x-2y)-xy+2y+2=0$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$x(x-2y)+2y+2=0$

$(x-2y)(x-3y-1)+2y+2=0$





черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16R = 25r$ 136

$AC = \frac{25}{17}r$

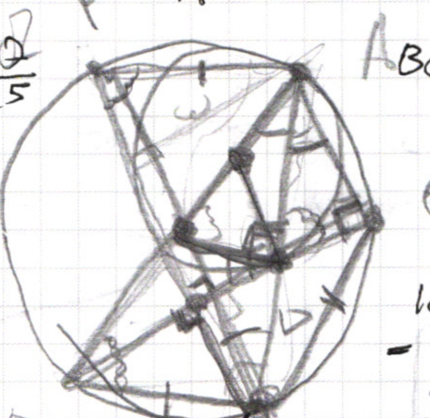
$\frac{r}{AC} = \frac{17}{25}$

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 8$

$2R = 2$

$DB = 17$

$34R = 50R - 25r$



$\frac{25 \cdot 17}{30} =$

306

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} \geq t\left(t^{\log \frac{13}{12}} - 1\right)$

$t = 5^{\log_5 t}$

$\frac{BD + CD}{BD} = \frac{25}{17}$

$5^{\log_{12} 5^{\log_5 t}}$

$5^{\log_{12} 5 \cdot \log_5 t} \geq 5^{\log_{12} 13 \log_5 t} - 5^{\log_5 t}$

$5^{\log_5 t}\left(5^{\log_{12} 5} - 5^{\log_{12} 13} - 1^{\log_5 t}\right)$

$\frac{2R}{2R - r} = \frac{BD + CD}{BD}$

256

$a \geq 5^b + 5^c$

$324 \cdot 4 - 256 =$

$\log_5 a \geq \log_5(5^b + 5^c)$

$AD \cdot DE = BD \cdot CD$

$= 1296 - 256 =$

$= 1240 =$

$\frac{2r}{2R} = \frac{AD}{AE} = \frac{16}{25}$

$\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

$25 AD = 16 AE$

$AD = \frac{16}{25} AE \quad DE = \frac{9}{25} AE$

$AD = \frac{16}{9} DE$

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$$

3

$$\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}=\sqrt{(y-1)(x-2)}=(x-2y)$$

$$(x-2y)^2=(y-1)(x-2)$$

$x^2+18x-1$

$$(x-2+3y-1)^2=25+6(x-2y)^2$$

$D=18^2+4$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

$$t=x^2+18x$$

$$5^{\log_{12}t}\geq |t|^{\log_{12}13}$$

$t>0$

$$5^{\log_{12}t}\geq t^{\log_{12}13}$$

$x+18x\leq 1$

$$t=5^{\log_5 t}$$

$$5^{\log_{12}t}\geq 5^{\log_5 t\cdot\log_{12}13}$$

$$\log_{12}t\geq\log_5 t\cdot\log_{12}13$$

$\log_{13}t\geq\log_5 t$

$$\frac{\log_{12}t}{\log_{12}13}\geq\log_5 t$$

при $t\leq 1$

$x+18x-5\leq 0$

N 5

$f(1) = f(1) + f(1) \quad f(1) = 0$

$f(2\cdot 1) = f(2) + f(1) \quad f(-1) = 0$

f

$f(1) = 0$

$f(x) = \boxed{f(y)} + f(x/y)$

$f(x) < f(y)$

$f(4) = f(2) + f(2)$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0 \quad f(1) = f(1) + f(1) = 0$

$f(3) = 0 \quad f(15) = 1 \quad f(2) = 0$

$f(5) = 1 \quad f(16) = 0 \quad f(3) = 0$

$f(7) = 1 \quad f(17) = 4 \quad f(4) = 0$

$f(11) = 2 \quad f(18) = 0 \quad f(5) = 1$

$f(13) = 3 \quad f(19) = 4 \quad f(6) = 0$

$f(17) = 4 \quad f(20) = 1 \quad f(7) = 1$

$f(19) = 4 \quad f(21) = 1 \quad f(8) = 0$

$f(23) = 5 \quad f(22) = 2 \quad f(9) = 0$

$f(23) = 5 \quad f(10) = 1$

$f(x/y) = f(x) - f(y) \quad f(24) = 0 \quad f(11) = 2$

$f(x) < f(y) \quad f(12) = 0$

$f(x) = 0 \quad f(13) = 3$

$11 \cdot 13 + 2 \cdot 6 + \quad f(14) = 1$

$+ 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)